Københavns Universitet
Eksamen ved Handelshøjskolen i København august 1996

Matematik H1

Erhvervsøkonomi-matematik studiet

4 timers skriftlig prøve

Alle hjælpemidler er tilladte, dog ikke regnemaskiner af nogen art.
Sættet er på 3 sider og består af 8 opgaver som vægtes lige.

Opgave 1

Lad $\underline{x} \in \mathbb{R}^4$ og $\underset{=}{A}$ være 4×4 matricen givet ved

$$\underset{=}{A} = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 5 & 3 \\ 0 & 6 & 4 & 2 \\ 2 & 8 & 6 & 4 \\ 3 & 9 & 7 & 5 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestem den fuldstændige løsning til ligningssystemet

$$\underset{=}{A}\underline{x} = \underline{0}.$$

(b) Lad f være den lineære afbildning af $\mathbb{R}^4$ ind i $\mathbb{R}^4$ som er givet ved $\underset{=}{A}$.
Find en basis for f's billedrum.

Opgave 2

For $c \in \mathbb{R}$ defineres en 3×3 matrix $\underset{=}{A}(c)$,

$$\underset{=}{A}(c) = \begin{pmatrix} c & 0 & c^2 + c \\ c^2 - 2c & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestem mængden

$$F = \{c \in \mathbb{R} \mid \underset{=}{A}(c) \text{ har 3 forskellige egenværdier}\}.$$

Opgave 2 fortsættes på side 2

(b) Bestem mængden

$$D = \{c \in \mathbb{R} \mid \underline{\underline{A}}(c) \text{ kan diagonaliseres}\}.$$

(c) Bestem mængden

$$O = \Big\{c \in \mathbb{R} \big| \text{ Der findes en ortonormalbasis for } \mathbb{R}^3 \\ \text{bestående af egenvektorer for } \underline{\underline{A}}(c)\Big\}.$$

Opgave 3

I $\mathbb{R}^3$ er der givet 3 vektorer $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3$

$$\underline{a}_1 = (0,1,1), \quad \underline{a}_2 = (1,1,1), \quad \underline{a}_3 = (1,1,0).$$

Der er endvidere givet en lineær afbildning $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ som opfylder

$$f(\underline{a}_1) = \underline{a}_2, \quad f(\underline{a}_2) = \underline{a}_3, \quad f(\underline{a}_3) = \underline{a}_1.$$

(a) Vis, at sættet $\alpha = (\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3)$ udgør en basis for $\mathbb{R}^3$.
(b) Bestem matricen for f m.h.t. basen α.
(c) Bestem matricen for f m.h.t. den naturlige basis.

Opgave 4

I $\mathbb{R}^4$ er der givet vektorerne $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3$, ved

$$\underline{a}_1 = (1,2,0,2), \quad \underline{a}_2 = (3,3,4,0), \quad \underline{a}_3 = (8,1,4,4).$$

(a) Find en ortonormalbasis for span$\{\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3\}$.
(b) Bestem ortogonalprojektionen af $\underline{v} = (9,4,-9,-7)$ på span$\{\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3\}$.

Opgavesættet fortsættes på side 3

Opgave 5

Der er givet 2 funktioner f og g på $\mathbb{R}^3$ ved

$$f(x,y,z) = -x + y + \ln(1+z^2)$$
$$g(x,y,z) = x^2 y(1+z+z^2)^{-1} .$$

(a) Bestem de partielle afledede af 1. orden af både f og g.

Ligningerne $f(x,y,z) = 0$ og $g(x,y,z) = 1$ fastlægger y og z som differentiable funktioner af x

$$y = h(x)\,, \quad z = k(x)$$

i en omegn af punktet $(1,1,0)$.

(b) Beregn $h'(1)$ og $k'(1)$.

Opgave 6

Der er givet funktioner f, g, h af 3 reelle variable ved

$$f(x,y,z) = (x+1)^2 + z$$
$$g(x,y,z) = 2x + 2y + z$$
$$h(x,y,z) = x^2 + y^2 .$$

Find største- og mindsteværdi for f under bibetingelserne $g(x,y,z) = 1$ og $h(x,y,z) = 1$.

Opgave 7

Lad $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ være givet ved

$$f(x,y) = (5x^2 + 2y^2 - 2xy - 8x - 2y + 5)(2x - 3y)^2 .$$

Det oplyses, at $(1,1)$ er et stationært punkt for f.

(a) Bestem Taylorpolynomiet for f af grad 2 i udviklingspunktet $(1,1)$.

(b) Bestem arten af det stationære punkt $(1,1)$.

Opgavesættet fortsættes på side 4

Opgave 8

Lad M være det begrænsede område i planen som afgrænses af kurverne bestemt ved ligningerne:

$$x^2 - y = 0, \quad x^2 + y = 2\,.$$

(a) Tegn en skitse af M.
Lad $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ være givet ved

$$f(x,y) = 2xe^y\,.$$

(b) Beregn

$$\iint_M f(x,y)dxdy\,.$$