Københavns Universitet
Handelshøjskolen i København August 1995

Matematik H1

Erhvervsøkonomi-matematik studiet

4 timers skriftlig prøve

2. semester

dato

Alle hjælpemidler er tilladt, dog ikke regnemaskiner af nogen art.
Sættet er på 3 sider og består af 7 opgaver.

Opgave 1 (15 pt)

Lad V være et 3-dimensionalt vektorrum med basis $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ og lad en lineær afbildning $f : V \to U$ være fastlagt ved

$$\begin{aligned} f(\mathbf{a}_1) &= \mathbf{a}_1 - 2\mathbf{a}_2 \\ f(\mathbf{a}_2) &= 3\mathbf{a}_2 + 3\mathbf{a}_3 \\ f(\mathbf{a}_3) &= 2\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + 5\mathbf{a}_3 \,. \end{aligned}$$

a) Opskriv matricen for f med hensyn til basen $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$.
b) Find en basis for billedrummet

$$U = f(V) \quad \text{for} \quad f \,.$$

Det antages nu yderligere, at V er udstyret med et skalarprodukt, og at $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ er en ortonormalbasis.

c) Bestem en ortonormalbasis for det ortogonale komplement $U^\perp$ til U.

Opgave 2 (20 pt)

En lineær afbildning $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ er givet ved matricen

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

 Opgave 2 fortsættes på side 2

a) Find samtlige egenværdier for f.

b) Vis, at f kan diagonaliseres og bestem en basis for $\mathbb{R}^3$, med hensyn til hvilken den til f hørende matrix er en diagonalmatrix.

c) Lad

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} .$$

Bestem egenvektorer $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ for f, således at

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 .$$

Opgave 3 (15pt)

Lad $U_1 = \text{span}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ og $U_2 = \text{span}\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4\}$ være de to underrum af talrummet $\mathbb{R}^4$ bestemt ved

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} , \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} , \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

og

$$\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} , \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} , \mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} , \mathbf{b}_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} .$$

a) Find en basis for hvert af underrummene U_1 og U_2.

b) Vis, at $U_1 \cap U_2 = \{0\}$.

c) Gør rede for, at U_1 og U_2 er komplementære og find projektionen af vektoren

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

på U_1 langs U_2.

Opgavesættet fortsættes på side 3

Opgave 4 (5 pt)

a) Angiv modulus og (hoved)argument for det komplekse tal

$$-1 + i\,.$$

b) Find samtlige komplekse tal $z = x + iy$, så

$$e^z = -1 + i\,.$$

Opgave 5 (15 pt)

Lad

$$f(x + y) = x^2 - 2x + y^2 + 2y$$

og

$$g(x, y) = x^2 + 4y^2 + 8g + 1\,.$$

a) Find maksimum og minimum for $f(x, y)$ under bibetingelsen $g(x, y) = 1$.
b) Find maksimum og minimum for g under bibetingelsen $f(x, y) = -1$.

Opgave 6 (15 pt)

Lad $f(x, y) = \sin xy\ (x, y) \in \mathbb{R}^2$.
Funktionen g er defineret ved

$$g(x) = \int_0^x f(x, y)\,dy \qquad (x \in \mathbb{R})\,.$$

a) Gør rede for, at g er differentiabel.
b) Vis, at $g(0) = g'(0) = g''(0) = 0$.
(Du behøver ikke at redegøre for at g er 2 gange differentiabel).
c) Udregn integralet

$$\int_0^1 x^2 g(x)\,dx\,.$$

Opgavesættet fortsættes på side 4

Opgave 7 (15 pt)

Lad funktionen f være givet ved

$$f(x,y) = 6x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{3}} - 2x - y + 2(x,y) \geq 0\,.$$

a) Gør rede for, at f har globalt maksimum, men intet globalt minimum.

b) Gør rede for, at f antager en største værdi S og en mindste værdi M inden for mængden

$$A = \{(x,y) \mid y + 2x \leq 2\}\,.$$

c) Bestem S og M.