

**HANDELSHØJSKOLEN I KØBENHAVN**

Erhvervsøkonomi-matematik studiet

4 timers skriftlig prøve

**MATEMATIK H1**

2. semester (omprøve)

19. august 1992, kl. 9.00 - 13.00.

*Alle hjælpemidler er tilladt, dog ikke regnemaskiner af nogen art.*

**Opgave 1 (10%)**

Lad

$$g(x) = \int_x^{x^2} \cos(xy) dy + x \quad (x \in \mathbb{R}).$$

- Beregn  $g(0)$  og  $g'(0)$ .
- Vis, at  $g$  har lokalt minimum i 0, f.eks. ved at beregne  $g''(0)$ .

**Opgave 2 (15%)**

Betragt

$$f(x, y) = -\frac{x^2 + 2y^2}{(x + y)^2} \quad (x \neq -y).$$

- Find samtlige stationære punkter for  $f$ .
- Gør rede for, at  $f$  i området

$$D = \{(x, y) \mid 1 \leq x \leq 2, \frac{1}{2} \leq y \leq 1\}$$

antager en største og mindste værdi og bestem disse.

- Gør rede for, at  $f$  ikke antager et globalt minimum.

**Opgave 3 (15%)**

Lad  $F(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$ . Løsningsmængden til ligningen

$$F(x, y) = 0$$

fremstiller en kurve  $C$ .

- Find det punkt  $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$ , hvor  $C$  skærer linien  $x = y$ .
- Det oplyses, at i en omegn af  $(x_0, y_0)$  kan  $C$  opfattes som grafen for en  $C^\infty$ -funktion  $y = f(x)$ . Bestem det 2. Taylorpolynomium for  $f$  i udviklingspunktet  $x_0$ .
- Udregn dobbeltintegralet

$$\iint_A F(x, y) dx dy$$

over området

$$A = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq \sqrt{y}, 0 \leq y \leq 1\}.$$

**Opgave 4 (5%)**

- Skriv det komplekse tal

$$\frac{1+i}{1-i} + i \quad \text{på formen} \quad a + bi.$$

- Løs inden for de komplekse tal andengradsligningen

$$4z^2 - 8z = -5.$$

Bestem modulus for hver af løsningerne.

**Opgave 5 (10%)**

- Vis, at matricen

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Opgave 5 fortsættes på side 3

kan diagonaliseres og angiv en tilhørende diagonalmatrix.

b) Vis, at matricen

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ikke kan diagonaliseres.

c) Udregn  $B^3$  og  $B^5$ .

### Opgave 6 (20%)

I et 3-dimensionalt vektorrum  $V$  er der givet basen  $(\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3)$ . Vektorerne  $\tilde{\underline{b}}_1, \tilde{\underline{b}}_2, \tilde{\underline{b}}_3$  defineres ved

$$\begin{aligned}\tilde{\underline{b}}_1 &= \underline{b}_1 \\ \tilde{\underline{b}}_2 &= 2\underline{b}_1 - \underline{b}_2 \\ \tilde{\underline{b}}_3 &= -3\underline{b}_1 + 2\underline{b}_2 - \underline{b}_3.\end{aligned}$$

- a) Gør rede for, at sættet  $(\tilde{\underline{b}}_1, \tilde{\underline{b}}_2, \tilde{\underline{b}}_3)$  er en basis for  $V$  og angiv koordinattransformationsmatricen for overgangen fra basen  $(\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3)$  til basen  $(\tilde{\underline{b}}_1, \tilde{\underline{b}}_2, \tilde{\underline{b}}_3)$ .
- b) En lineær afbildning  $f : V \rightarrow V$  er med hensyn til basen  $(\tilde{\underline{b}}_1, \tilde{\underline{b}}_2, \tilde{\underline{b}}_3)$  givet ved matricen

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Find matricen  $B$  hørende til  $f$  m.h.t. basen  $(\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3)$ .

- c) Find en symmetrisk matrix  $C$ , således at for alle koordinatsøjler  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$  gælder

$$\underline{X}^t \underline{B} \underline{X} = \underline{X}^t \underline{C} \underline{X}.$$

- d) Er den kvadratiske form givet ved  $C$  positiv eller negativ definit, positiv eller negativ semidefinit eller indefinit?

**Opgave 7 (10%)**

En lineær afbildning  $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  er givet ved matricen

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

I det følgende tænkes  $\mathbb{R}^4$  udstyret med det sædvanlige skalarprodukt.

- Find en ortonormalbasis for underrummet  $U = f(\mathbb{R}^4)$ .
- Bestem ortogonalprojektionen af vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ på } U^\perp.$$

**Opgave 8 (15%)**

- Beregn determinanten af matricen

$$\begin{pmatrix} s & 0 & t & 0 \\ 0 & s & 0 & t \\ t & 0 & s & 0 \\ 0 & t & 0 & s \end{pmatrix},$$

hvor  $s$  og  $t$  er givne reelle tal, og angiv de værdier af  $s$  og  $t$  for hvilke matricen er regulær.

- I det følgende tænkes  $\mathbb{R}^4$  udstyret med det sædvanlige skalarprodukt. Find en ortonormalbasis i  $\mathbb{R}^4$  bestående af egenvektoren for matricen

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

- Find en ortogonal matrix  $T$ , således at  $TAT^{-1}$  er en diagonalmatrix og angiv denne diagonalmatrix.