HANDELSHØJSKOLEN I KØBENHAVN

Erhvervsøkonomi-matematik studiet

4 timers skriftlig prøve

MATEMATIK H1

2. semester (omprøve)

19. august 1992, kl. 9.00 - 13.00.

Alle hjælpemidler er tilladt, dog ikke regnemaskiner af nogen art.

Opgave 1 (10%)

Lad

$$g(x) = \int_x^{x^2} \cos(xy)\, dy + x \quad (x \in \mathbb{R}) .$$

a) Beregn $g(0)$ og $g'(0)$.

b) Vis, at g har lokalt minimum i 0, f.eks. ved at beregne $g''(0)$.

Opgave 2 (15%)

Betragt

$$f(x, y) = -\frac{x^2 + 2y^2}{(x+y)^2} \;\; (x \neq -y) .$$

a) Find samtlige stationære punkter for f.

b) Gør rede for, at f i området

$$D = \{(x, y) \mid 1 \leq x \leq 2 \,,\; \frac{1}{2} \leq y \leq 1\}$$

antager en største og mindste værdi og bestem disse.

c) Gør rede for, at f ikke antager et globalt minimum.

 Opgavesættet fortsættes på side 2

Opgave 3 (15%)

Lad $F(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$. Løsningsmængden til ligningen

$$F(x,y) = 0$$

fremstiller en kurve C.

a) Find det punkt $(x_0, y_0) \neq (0,0)$, hvor C skærer linien $x = y$.

b) Det oplyses, at i en omegn af (x_0, y_0) kan C opfattes som grafen for en C^∞-funktion $y = f(x)$. Bestem det 2. Taylorpolynomium for f i udviklingspunktet x_0.

c) Udregn dobbeltintegralet

$$\iint_A F(x,y)\,dx\,dy$$

over området

$$A = \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq \sqrt{y}\,,\ 0 \leq y \leq 1\}\ .$$

Opgave 4 (5%)

a) Skriv det komplekse tal

$$\frac{1+i}{1-i} + i \quad \text{på formen} \quad a + bi\ .$$

b) Løs inden for de komplekse tal andengradsligningen

$$4z^2 - 8z = -5\ .$$

Bestem modulus for hver af løsningerne.

Opgave 5 (10%)

a) Vis, at matricen

$$\underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Opgave 5 fortsættes på side 3

kan diagonaliseres og angiv en tilhørende diagonalmatrix.

b) Vis, at matricen

$$\underline{\underline{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ikke kan diagonaliseres.

c) Udregn $\underline{\underline{B}}^3$ og $\underline{\underline{B}}^5$.

Opgave 6 (20%)

I et 3-dimensionalt vektorrum V er der givet basen $(\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3)$. Vektorerne $\underline{\tilde{b}}_1, \underline{\tilde{b}}_2, \underline{\tilde{b}}_3$ defineres ved

$$\begin{aligned} \underline{\tilde{b}}_1 &= \underline{b}_1 \\ \underline{\tilde{b}}_2 &= 2\underline{b}_1 - \underline{b}_2 \\ \underline{\tilde{b}}_3 &= -3\underline{b}_1 + 2\underline{b}_2 - \underline{b}_3 \ . \end{aligned}$$

a) Gør rede for, at sættet $(\underline{\tilde{b}}_1, \underline{\tilde{b}}_2, \underline{\tilde{b}}_3)$ er en basis for V og angiv koordinattransformationsmatricen for overgangen fra basen $(\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3)$ til basen $(\underline{\tilde{b}}_1, \tilde{b}_2, \tilde{b}_3)$.

b) En lineær afbildning $f : V \to V$ er med hensyn til basen $(\underline{\tilde{b}}_1, \underline{\tilde{b}}_2, \tilde{b}_3)$ givet ved matricen

$$\underline{\underline{\tilde{B}}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Find matricen $\underline{\underline{B}}$ hørende til f m.h.t. basen $(\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3)$.

c) Find en symmetrisk matrix $\underline{\underline{C}}$, således at for alle koordinatsøjler $\underline{\underline{X}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ gælder

$$\underline{\underline{X}}^{\mathrm{t}} \underline{\underline{B}}\, \underline{\underline{X}} = \underline{\underline{X}}^{\mathrm{t}} \underline{\underline{C}}\, \underline{\underline{X}} \ .$$

d) Er den kvadratiske form givet ved $\underline{\underline{C}}$ positiv eller negativ definit, positiv eller negativ semidefinit eller indefinit ?

Opgavesættet fortsættes på side 4

Opgave 7 (10%)

En lineær afbildning $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ er givet ved matricen

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} .$$

I det følgende tænkes $\mathbb{R}^4$ udstyret med det sædvanlige skalarprodukt.

a) Find en ortonormalbasis for underrummet $U = f(\mathbb{R}^4)$.

b) Bestem ortogonalprojektionen af vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{på} \quad U^\perp .$$

Opgave 8 (15%)

a) Beregn determinanten af matricen

$$\begin{pmatrix} s & 0 & t & 0 \\ 0 & s & 0 & t \\ t & 0 & s & 0 \\ 0 & t & 0 & s \end{pmatrix} ,$$

hvor s og t er givne reelle tal, og angiv de værdier af s og t for hvilke matricen er regulær.

b) I det følgende tænkes $\mathbb{R}^4$ udstyret med det sædvanlige skalarprodukt. Find en ortonormalbasis i $\mathbb{R}^4$ bestående af egenvektoren for matricen

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

c) Find en ortogonal matrix $\underline{\underline{T}}$, således at $\underline{\underline{T}}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{T}}^{-1}$ er en diagonalmatrix og angiv denne diagonalmatrix.