

Reel analyse og lineær algebra (Matematik H1)

Erhvervsøkonomi-matematik studiet

4 timers skriftlig prøve

Alle hjælpemidler er tilladt, dog ikke regnemaskiner af nogen art.
Sættet er på 2 sider og består af 6 opgaver.

Opgave 1 (Vægt 20%)

Lad

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- 1) Find egenværdierne for \underline{A} og rodmultipliciteten af disse.
- 2) Bestem for hver af de fundne egenværdier en basis for det tilhørende egenrum.
- 3) Begrund uden at udføre diagonaliseringen, at \underline{A} er diagonaliserbar.
- 4) Bestem en matrix \underline{S} , så $\underline{S}\underline{A}\underline{S}^{-1} = \underline{D}$ er en diagonalmatrix, og angiv \underline{D} .

Opgave 2 (Vægt 15 %)

Udregn alle 1. ordens partielle afledede for følgende funktioner:

$$f(x, y) = e^{5x+4y} \cos(3x + 2y) - (x^2 + 2y^2)\ln(2x + 3y) ,$$

$$g(x, y) = \int_{2x-3y}^{x^2+y^3} \frac{dt}{1+t^2} ,$$

$$h(x, y) = \int_1^2 \frac{2x^2y^3}{1+t^2} dt .$$

Opgave 3 (Vægt 15 %)

En lineær afbildning $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ er givet ved

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & -2 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix},$$

- 1) Bestem $\ker f$.
- 2) Find dimensionen af $f(\mathbb{R}^4)$, og angiv en basis for $f(\mathbb{R}^4)$.
- 3) Udvid den fundne basis for $f(\mathbb{R}^4)$ til en basis for \mathbb{R}^3 .

Opgave 4 (Vægt 20 %)

Lad

$$f(x, y) = x^3 + 2xy - y^2 - y, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

- 1) Bestem samtlige stationære punkter for f .
- 2) Afgør for hvert af de fundne punkter, om f har lokalt minimum, lokalt maksimum eller saddepunkt.
- 3) Vis, at f er konkav i halvplanen $x < -\frac{1}{3}$.
- 4) Begrund, at f har en størsteværdi i halvplanen $x < -\frac{1}{3}$ men ikke i \mathbb{R}^2 .

Opgave 5 (Vægt 15 %)

I talrummet \mathbb{R}^4 er givet vektorerne

$$\underline{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- 1) Bestem en ortonormal basis for underrummet $U = \text{span}\{\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3\}$.
- 2) Udregn ortogonalprojektion af \underline{a} på U .
- 3) Udvid den ortonormale basis i U til en ortonormal basis i \mathbb{R}^4 . Vink: Benyt resultatet i spørgsmål 2.

Opgave 6 (Vægt 15 %)

Lad

$$f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - y, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

- 1) Bestem eventuelle stationære punkter for f .
- 2) Lad A være området givet ved

$$A = \{(x, y) \mid -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}.$$

Skitsér området, og begrund, at f har såvel en største- som en mindsteværdi i A .

- 3) Bestem derpå største- og mindsteværdien for f i A .