Speciale:
Approksimation og dimension af topologiske rum

Esben Mose Hansen

16. marts 2000

Indhold

Figurer

Indledning

Dette speciale er blevet til et lille stykke ad gangen, hvor målet ofte har været både svært at se og indse. Mens dette har gjort processen meget spændende og varieret har det desværre også betydet at specialets kurs er lidt slingrende. F.eks. indførtes normale overdækninger mest som et redskab i forbindelse med lebesguedimension i generelle rum, som det senere viste sig blev mindre vigtigt da den sidste sætning i specialet viste sig kun at gælde i en klasse af rum, hvor endelige normale overdækninger og endelige overdækninger koinciderer. Til gengæld viste sådanne overdækninger sig nyttige i forbindelse med approksimative systemer, hvorfor arbejdet på ingen måde var spildt — men jeg er bange for at denne proces har sat sit tydelige præg på specialet. Jeg skal være den første til at beklage dette; til gengæld tror jeg, at læseren vil kunne indleve sig i den spændende rejse ud i en krog af matematikken, som mange ikke får at se.

Apropos læseren forudsætter dette speciale kun lidt almindelig mængdelære og generel topologi. Dvs. at læseren bør kende til diverse klasser af topologiske rum og deres indbyrdes forhold, navnlig metriske og kompakt hausdorffrum. Desuden må læseren være bekendt med relationer på mængder samt lidt elementær viden om ordinaltal og kardinaltal. Alt dette og langt mere er at finde i [Engelking].

Jeg har desværre ikke nået langt nok til selv at bidrage med noget originalt og alt hvad der står bevist i dette speciale står formegentligt andensteds. Af alle afsnittene er det 2. afsnit om normale overdækninger det, hvor jeg selv har udført det meste arbejde selv. Det jeg har lånt udefra kommer hovedsageligt fra [Engelking]. 3. afsnit er i vid udstrækning en gennemgang af det indledende afsnit i [Morita 73], hvor jeg har støttet mig meget til [EDM2]. 4. afsnit er plukket fra alle de ovenstående værker. 5. afsnit er næsten udelukkende fra [Engelking], mens 6. og 7. afsnit læner sig op ad [E-S 52]. 8. afsnit er fra [Nagata] undtagen eksemplet, der stammer fra [Pears]. 9. og sidste afsnit er taget fra [MW 89] og i mindre grad [Mardešić].

Endeligt vil jeg lige sige lidt om notation. Mængder og topologiske rum er som regel betegnet med store bogstaver som en mængde A og et rum X, hvor topologien er underforstået. Er X et topologisk rum betegner $\mathcal{T}(X)$ topologien på X. Familier af delmængder, brolægninger, skrives $\mathfrak{B}$. Punkter i en mængde eller et rum skrives med små bogstaver, som i $x \in X$. Hvad der ellers bruges af notation beskrives undervejs.

Jeg vil gerne benytte lejligheden til takke min vejleder Søren Eilers, som har været en stor hjælp. Det har været et meget spændende projekt og det er helt og holdent hans fortjeneste.

Esben Mose Hansen

1 Grundlæggende begreber

Jeg vil starte dette speciale med en gennemgang af nogle ordensrelationer på mængder. Disse vil så senere blive brugt til at give mængder en retning som det er kendt fra f.eks. net på topologiske rum.

Def 1.1: Lad A være en mængde, og lad $<$ være en relation herpå. Da siges $<$ at være en *præordensrelation* eller en *præordning af A* når følgende to betingelser er opfyldt:

$$\forall a \in A : a < a.$$
$$\forall a, b, c \in A : a < b \wedge b < c \Rightarrow a < c.$$

Er $<$ en præordensrelation på A siges A at være *præordnet.* Gælder der yderligere at

$$\forall a, b \in A \exists c \in A : a < c \wedge b < c,$$

siges $<$ at være *en opad filtrerende præordensrelation* og A at være en *præordnet, opad filtrende ordnet mængde.* Opfylder $<$

$$\exists a_0 \in A \forall a \in A : a < a_0,$$

siges $<$, A at have et *maksimalt element.* Hvis A ikke har noget maksimalt element siges A at være *ubegrænset.*

Opfylder en præordensrelation $\leqslant$ på A

$$\forall a, b \in A : a \leqslant b \vee b \leqslant a$$

siges $\leqslant$ at være en *total ordning.* Endelig, hvis enhver ikke-tom delmængde af A har et mindste element siges $\leqslant$ at være en *velordning*, og A siges at være *velordnet.* $\square$

Den næste definition omhandler et begreb der nok er læseren velkendt, nemlig brolægninger. Når jeg alligevel vil gennemgå brolægninger i forskellige afskygninger, skyldes det at meget af dette speciale enten handler om brolægninger eller anvender disse som et vigtigt redskab. Bemærk at jeg *ikke* antager at overdækninger er åbne. Dette afsnit er skrevet i en ret tæt form da jeg antager at læseren allerede er bekendt med de fleste definitioner og resultater heri.

Def 1.2: Lad X være et topologisk rum. Da er en *brolægning* på X en familie af delmængder fra X, dvs. $\mathfrak{B}$ er en brolægning netop hvis $\mathfrak{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Elementerne i brolægningen kaldes til tider *sten* i brolægningen. En brolægning $\mathfrak{B}$ siges at *forfine* en anden brolægning $\mathfrak{C}$ på samme rum netop hvis enhver sten i $\mathfrak{B}$ er en delmængde af en sten i $\mathfrak{C}$. Dette forhold noteres[1] $\mathfrak{B} < \mathfrak{C}$ og betyder altså kort at

$$\forall B \in \mathfrak{B} \exists C \in \mathfrak{C} : B \subseteq C.$$

$\mathfrak{B}$ siges også at være *subordineret* $\mathfrak{C}$.

Givet en brolægning $\mathfrak{B}$ siges denne at være *afsluttet, åben, konveks etc.* når alle sten i brolægningen er det. Videre siges $\mathfrak{B}$ at være *endelig* hvis brolægningen

[1] Der er en udbredt uenighed om hvilken vej ulighedstegnet skal vende. Denne notation er fra [Nagata].

indeholder højst endeligt mange sten. Hvis der til hvert punkt $x \in X$ findes en omegn således at omegnen kun skærer endeligt mange af stenene i $\mathfrak{B}$, siges $\mathfrak{B}$ at være *lokalt endelig*. Findes der en omegn der kun skærer én af stenene i $\mathfrak{B}$, siges $\mathfrak{B}$ at være *diskret*. Er brolægningen en tællelig forening af brolægninger med en bestemt egenskab tager brolægningen ofte navn efter denne egenskab med præfixet σ-, som i en σ-*diskret* brolægning, der er en brolægning der kan skrives som en tællelig forening af diskrete brolægninger. Et andet eksempel er en σ-*lokalt endelig brolægning*, der så er en brolægning der kan skrives som en tællelig forening af lokalt endelige brolægninger.

Endeligt siges $\mathfrak{B}$ at være en *overdækning* hvis foreningen af stenene i brolægningen indeholder X. Terminologien for brolægninger overføres direkte til overdækninger, som i en *endelig overdækning*. $\square$

For en god ordens skyld vil jeg lige nævne to vigtige klasser af topologiske rum, nemlig tychonoffrummene og de kompakte rum. Sidstnævnte nævnes her da der er en hvis uenighed i litteraturen omkring dette begreb, da en del forfattere kræver at kompakte rum tillige er hausdorffrum.

Def 1.3: Lad X være et topologisk rum. Da siges X at være et *tychonoffrum*, et *fuldstændigt regulært rum* eller et $T_{3\frac{1}{2}}$-*rum* dersom der til hver lukket delmængde $F \subseteq X$ og til hvert punkt $x \notin F$ findes en kontinuert funktion $f : X \to I = [0;1]$ således at $f(x) = 0$ og $f(F) = \{1\}$. $\square$

Def 1.4: Lad X være et topologisk rum. Da siges X at være *kompakt* dersom ethver overdækning af X kan udtyndes til en endelig overdækning af X. $\square$

Ofte betragtes et kompakt rum sammen med en kompakt delmængde heraf:

Def 1.5: Lad X være et kompakt hausdorffrum og lad $A \subseteq X$ være et delrum heraf. Da siges (X, A) at være et *kompakt par*. $\square$

Et andet topologisk begreb der vil blive anvendt er følgende:

Def 1.6: Lad X være et topologisk rum og lad $\mathcal{B}$ være mængden af baser for topologien i X. Da er der et mindste element i den velordnede mængde $\{\operatorname{card} B | B \in \mathcal{B}\}$. Dette kardinaltal kaldes *vægten* af X og en tilsvarende base kaldes en *mindste* base for X. Denne er sjældent entydig. Vægten af X skrives ofte $w(X)$. $\square$

Som et eksempel på ovenstående er det måske bekendt, at ethvert tychonoffrum med vægt $\mathfrak{m}$ er homeomorft med et underrum i tychonoffterningen $I^{\mathfrak{m}}$. Vægten af et topologisk rum kan også opfattes som en generalisering af 2. tællelighedsaxiom, idet de rum der opfylder 2. tællelighedsaxiom netop er de rum, hvis vægt er $\aleph_0$.

Som afslutning på dette kapitel vil jeg indføre nogle begreber der vil blive anvendt i næste afsnit.

Def 1.7: Lad X være et topologisk rum og lad F være en delmængde heri. Da er F *funktionelt lukket*[2] hvis der findes en kontinuert funktion $f : X \to [0;1] = I$ så $F = f^{-1}(\{0\})$. En delmængde $G \subseteq X$ siges at være *funktionelt åben* hvis der findes en funktionelt lukket mængde F så $G = \complement F$. Lad en familie

[2] Jeg vil give Engelking ret i at „nulmængde“ og „konulmængde“', som man ofte møder i litteraturen, er dårlige betegnelser, især i.h.t. målteorien.

af kontinuerte funktioner $\{f_\alpha\}_{\alpha\in A}$, hvor $\forall\alpha : f_\alpha : X \to I$, være givet. Antag at $\{f_\alpha^{-1}(]0;1])|\alpha \in A\}$ udgør en lokalt endelig overdækning (af funktionelt åbne mængder). Da siges $\{f_\alpha\}_{\alpha\in A}$ at være en *lokalt endelig deling af enheden* såfremt

$$\sum_{\alpha\in A} f_\alpha = 1.$$

En lokalt endelig deling af enheden $\{f_\alpha\}_{\alpha\in A}$ siges at være *subordineret* til en brolægning $\mathfrak{B}$ såfremt $\{f_\alpha^{-1}(]0;1])\} < \mathfrak{B}$. □

Bemærkning 1.8: Det er klart at funktionelt åbne (lukkede) delmængder er åbne (lukkede). Antag at $\{f_\alpha\}_{\alpha\in A}$ er en familie af kontinuerte funktioner fra X ind i I således at $\{f_\alpha^{-1}(]0;1]) = \{G_\alpha|\alpha \in A\}$ er en lokalt endelig overdækning bestående af funktionelt åbne mængder. Da gælder

$$(1) \qquad \left(\max_{\alpha\in B} f_\alpha\right)^{-1}(]0;1]) = \bigcup_{\alpha\in B} G_\alpha; \ \left(\min_{\alpha\in B} f_\alpha\right)^{-1}(]0;1]) = \bigcap_{\alpha\in B} G_\alpha,$$

hvor $B \subseteq A$. Maximum og minimum eksisterer da højst endeligt mange funktioner er positive i et givet punkt. Er istedet $\{f_\alpha^{-1}(\{0\}) = F_\alpha|\alpha \in A\}$ en lokalt endelig overdækning af funktionelt lukkede mængder gælder

$$(2) \qquad \left(\min_{\alpha\in B} f_\alpha\right)^{-1}(\{0\}) = \bigcap_{\alpha\in B} F_\alpha; \ \left(\max_{\alpha\in B} f_\alpha\right)^{-1}(\{0\}) = \bigcup_{\alpha\in B} F_\alpha.$$

Dette ses umiddelbart ved overgang til komplementærmængde. Specielt er vilkårlige foreninger af lokalt endelige funktionelt åbne (lukkede) mængder funktionelt åbne (lukkede). Ændres max til sup i første lighed i (1) og min til inf i første lighed i (2) ses, at disse to ligheder gælder for vilk. familier af hhv. funktionelt åbne og funktionelt lukkede mængder. □

Dette nævnes her p.g.a. en ækvivalens der er nævnt i [EDM2], som jeg ikke har kunnet finde noget bevis for (se lemma 2.12). Til gengæld falder (halvdelen) af resultatet let ud fra en anden sætning (sætning 2.10) jeg brugte uden at vise den i et fagprojekt. I øvrigt finder jeg at begge sætninger belyser egenskaber ved normale overdækninger og som sådan er interessante i sig selv.

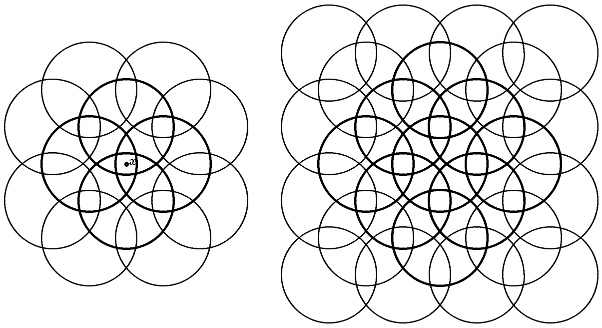
2 Normale overdækninger

I dette afsnit vil jeg indføre et mindre velkendt begreb, en normal overdækning. Begrebet er interessant i forbindelse med Lebesgues dimensionsbegreb (se evt. afsnit 4) og i forbindelse med approksimative systemer, se afsnit 9.

Først introduceres en måde at skaffe en større brolægning ud fra en given brolægning, hvorefter dette anvendes til at definere en relation på mængden af brolægninger på en mængde. Disse begreber er helt centrale for meget af stoffet i dette speciale.

Def 2.1: Lad $\mathfrak{B}$ og $\mathfrak{C}$ være brolægninger på et topologisk rum X, og lad $A \subseteq X$ være en delmængde heri. Da kaldes foreningen af sten fra $\mathfrak{B}$ der snitter A *stjernen af A m.h.t. $\mathfrak{B}$* (se figur 1), betegnet

$$\mathrm{St}(A, \mathfrak{B}) = \bigcup\{B \in \mathfrak{B}|B \cap A \neq \emptyset\} \subseteq X.$$



Figur 1: Cirklerne i figureren repræsenterer stenene i en brolægningerne $\mathfrak{B}_1$ (t.v.) og $\mathfrak{B}_2$ (t.h.). De cirkler der er trukket op ligger i $\mathrm{St}(x, \mathfrak{B}_1)$ (t.v.) eller i $\mathrm{St}(B, \mathfrak{B}_2)$ (t.h.), hvor $B \in \mathfrak{B}$ er cirklen i midten t.h.

Der skelnes ikke skarpt mellem $x \in X$ og $\{x\} \subseteq X$ således at $\mathrm{St}(x, \mathfrak{B}) = \mathrm{St}(\{x\}, \mathfrak{B})$. Nu siges $\mathfrak{B}$ at være en *stjerneforfining* af $\mathfrak{C}$ hvis $\{St(B, \mathfrak{B})|B \in \mathfrak{B}\} < \mathfrak{C}$. Endvidere siges $\mathfrak{B}$ at være en *barycentrisk* forfining af $\mathfrak{C}$ dersom

$$\{St(x, \mathfrak{B})|x \in X\} < \mathfrak{C}.$$

Kort skrives

$$\mathfrak{B}^* = \{St(B, \mathfrak{B})|B \in \mathfrak{B}\}, \mathfrak{B}^\Delta = \{St(x, \mathfrak{B}|x \in X)\}.$$

Notationen her er dels fra [Engelking] og dels fra [EDM2]. I anden litteratur ses til tider $\mathrm{St}\,\mathfrak{B}$ istedet for $\mathfrak{B}^*$. □

Et simpelt eksempel ville måske være på sin plads her:

Eksempel 2.2: Betragt $\mathbb{R}$ med den sædvanlige topologi og lad

$$\mathfrak{B} = \{]x; x+6[|x \in \mathbb{R}\} \qquad \mathfrak{C} = \{]x; x+3[|x \in \mathbb{R}\}$$

$$\mathfrak{D} = \{]x; x+2[|x \in \mathbb{R}\}$$

Da er $\mathfrak{C}^\Delta < \mathfrak{B}$ og $\mathfrak{D}^* < \mathfrak{B}$ — faktisk er $\mathfrak{C}^\Delta = \mathfrak{B}$ og $\mathfrak{D}^* = \mathfrak{B}$. Specielt er $\mathfrak{C}^* \not< \mathfrak{B}$. □

Bemærkning 2.3: Det er umiddelbart klart at det for to brolægninger $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ gælder

$$\mathfrak{B}^* < \mathfrak{C} \Rightarrow \mathfrak{B}^\Delta < \mathfrak{C} \Rightarrow \mathfrak{B} < \mathfrak{C}.$$

Som vist i eksempel 2.2 gælder det ikke i almindelighed at en barycentrisk forfining også er en stjerneforfining. □

Selv om en barycentrisk forfining ikke er en stjerneforfining, er en barycentrisk forfining af en barycentrisk forfining en stjerneforfining:

Sætning 2.4: Lad X være en mængde og lad $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ være overdækninger heraf således at

$$\mathfrak{A}^\Delta < \mathfrak{B} < \mathfrak{B}^\Delta < \mathfrak{C}.$$

Da er $\mathfrak{A}^* < \mathfrak{C}$, dvs. $\mathfrak{A}$ er en stjerne-forfining af $\mathfrak{C}$.

Bevis: Lad et $A \in \mathfrak{A}$ og et $x \in A$ være givet. Da findes et $B_x \in \mathfrak{B}$ så $\mathrm{St}(x, \mathfrak{A}) \subseteq B_x$. Følgeligt haves at

$$\mathrm{St}(A, \mathfrak{A}) = \bigcup_{x \in A} \mathrm{St}(x, \mathfrak{A}) \subseteq \bigcup_{x \in A} B_x.$$

Betragt nu et $y \in A$. Da $\mathrm{St}(x, \mathfrak{A}) \subseteq B_x$ for hvert $x \in A$ vil $B_x \supseteq A$ for hvert $x \in A$. Specielt må $y \in B_x$ for hvert $x \in A$ hvoraf

$$\bigcup_{x \in A} B_x \subseteq \mathrm{St}(y, \mathfrak{B}).$$

Da $\mathfrak{B}^\Delta < \mathfrak{C}$ findes der nu et $C \in \mathfrak{C}$ så

$$C \supseteq \mathrm{St}(y, \mathfrak{B}) \supseteq \bigcup_{x \in A} B_x \supseteq \mathrm{St}(A, \mathfrak{A})$$

hvoraf $\mathrm{St}(A, \mathfrak{A}) \subseteq C$. Da $A \in \mathfrak{A}$ er givet vilkårligt haves at $\mathfrak{A}^* < \mathfrak{C}$. $\square$

Hermed er grunden lagt til at indføre de normale overdækninger:

Def 2.5: Lad $(\mathfrak{B}_i)_{i \in \mathbb{N}}$ være en følge af åbne overdækninger. Da siges $(\mathfrak{B}_i)$ at være en *normal følge* hvis

$$\forall i \in \mathbb{N} : \mathfrak{B}_{i+1}^\Delta < \mathfrak{B}_i.$$

Lad nu $\mathfrak{B}$ være en åben overdækning af et topologisk rum X. Da siges $\mathfrak{B}$ at være en *normal overdækning* dersom der findes en normal følge $(\mathfrak{B}_i)_{i \in \mathbb{N}}$, således at $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_1$. Mængden af normale overdækning på et topologisk rum kaldes $Cov(X)$ der så altid vil indeholde mindst én overdækning, $\{X\}$. $\square$

Bemærkning 2.6: I [Morita 75] og hos andre er en normal følge en følge af åbne overdækninger der hver stjerneforfiner sin forgænger. I lyset af sætning 2.4 ses dog let at der for en overdækning $\mathfrak{B}$ eksisterer en sådan følge $(\mathfrak{B}_i)_{i \in \mathbb{N}}$:

$$\mathfrak{B} > \mathfrak{B}_0^* > \mathfrak{B}_0 > {\mathfrak{B}_1}^* > \cdots,$$

netop når $\mathfrak{B}$ er normal. På den anden side er en normal følge ikke helt det samme i def. 2.5 og [Morita 75]: Mens en „normal følge“ i Moritas forstand også er det i def. 2.5 er det omvendte ikke i almindelighed tilfældet; dog gælder at hvis $(\mathfrak{B}_i)_{i \in \mathbb{N}}$ er en normal følge fra def. 2.5 er $(\mathfrak{B}_{2i})_{i \in \mathbb{N}}$ det i [Morita 75]. Jeg vil efterværende udelukkende holde mig til def. 2.5 og *ikke* [Morita 75]. Det har dog meget sjældent nogen betydning. $\square$

Følgende lille lemma er ofte nyttigt i bevisgangen:

Lemma 2.7: Lad X, Y være topologiske rum og lad $f : X \to Y$ være en afbildning. Antag at $\mathfrak{B}$ og $\mathfrak{B}'$ er brolægninger i Y så $\mathfrak{B}^\Delta < \mathfrak{B}'$. Sættes

$$f^{-1}(\mathfrak{B}) = \{f^{-1}(B) | B \in \mathfrak{B}\},$$

er $(f^{-1}(\mathfrak{B}))^\Delta < f^{-1}(\mathfrak{B}')$. Tilsvarende er $(f^{-1}(\mathfrak{B}))^* < f^{-1}(\mathfrak{B}')$ hvis $\mathfrak{B}^* < \mathfrak{B}'$. Er f kontinuert og $(\mathfrak{B}_i)_{i \in \mathbb{N}}$ en normal følge i Y er $(f^{-1}(\mathfrak{B}_i))_{i \in \mathbb{N}}$ en normal følge i X.

Bevis: Da det for $A \subseteq Y$ og $x \in X$ gælder, at $x \in f^{-1}(A)$ netop når $f(x) \in A$, kan første påstand vises som

$$\begin{aligned}\mathrm{St}(x, f^{-1}(\mathfrak{B})) &= \bigcup\{B \in f^{-1}(\mathfrak{B}) | x \in B\} \\ &= \bigcup\{f^{-1}(B) | f(x) \in B \in \mathfrak{B}\} = f^{-1}\left(\bigcup\{B \in \mathfrak{B} | f(x) \in B\}\right) \\ &\subseteq f^{-1}(B' \in \mathfrak{B}'),\end{aligned}$$

hvor eksistensen af B' haves af $\mathfrak{B}^\Delta < \mathfrak{B}'$. Stjerneforfiningstilfældet forløber analogt hvorefter de sidste påstande er trivielle. □

I [Morita 75] p. 34 laver Morita en konstruktion jeg vil tage op her. Det er en måde at konstruere et metrisk rum ud fra en normal overdækning i et vilkårligt topologisk rum. Som et biresultat viser det sig, at en overdækning er normal netop når der findes en forfining til en lokalt endelig overdækning af funktionelt åbne mængder, således som det angives af f.eks. [EDM2].

Inden selve sætningen vises et teknisk lemma:

Lemma 2.8: Lad X være et topologisk rum og lad $\mathfrak{B}$ være en overdækning heraf. Hvis nu $\mathfrak{B}$ er normal har $\mathfrak{B}$ en σ-lokalt endelig forfining.

Bevis: Lad $\mathfrak{B} = \{U\}_{s \in S}$ være givet som i lemmaet og lad $(\mathfrak{B}_i)_{i \in \mathbb{N}}$ være en følge af åbne overdækninger så

$$(3) \qquad \mathfrak{B} > \mathfrak{B}_0^* > \mathfrak{B}_0 > \mathfrak{B}_1^* > \cdots.$$

Eksistens af denne følge følger af sætning 2.4, se evt. bemærkning 2.6.

Dan til hvert $s \in S$ og $i \in \mathbb{N}$ den åbne mængde

$$U_{s,i} = \{x \in X | \exists V \text{ omegn om x} : \mathrm{St}(V, \mathfrak{B}_i) \subseteq U_s\}.$$

Da er $\{U_{s,i}\}_{s \in S}$ en åben forfining af $\mathfrak{B}$ for hvert $i \in \mathbb{N}$. Nu, for givet $i \in \mathbb{N}$ og $B \in \mathfrak{B}_{i+1}$ findes der et $B' \in \mathfrak{B}_i$ så $\mathrm{St}(B, \mathfrak{B}_{i+1}) \subseteq B'$. Er nu $x \in B \cap U_{s,i}$ er $B' \subseteq \mathrm{St}(x, \mathfrak{B}_i) \subseteq U_s$ af definitionen på $U_{s,i}$. Heraf er $\mathrm{St}(B, \mathfrak{B}_{i+1}) \subseteq U_s$ hvoraf $B \subseteq U_{s,i+1}$. Alt i alt gælder

$$(4) \qquad \forall U_{s,i} \forall x \in U_{s,i} \forall y \notin U_{s,i+1} \forall B \in \mathfrak{B}_{i+1} : x \notin B \vee y \notin B.$$

Lad nu $<$ være en velordning af S (jvf. [Engelking, Zermelos sætning]) og lad

$$V_{s,i} = U_{s,i} \setminus \overline{\bigcup_{s < s_0} U_{s,i+1}}.$$

Da $<$ er en velorning haves for hver $s_1 \neq s_2$ i S enten $s_1 < s_2$ eller $s_2 < s_1$. Heraf haves af definitionen af $V_{s,i}$ enten

$$V_{s_2,i} \subseteq X \setminus U_{s_1,i+1} \text{ eller } V_{s_1,i} \subseteq X \setminus U_{s_2,i+1}.$$

For givne $i \in \mathbb{N}$, $s_1 \neq s_2$, $x \in V_{s_1,i}$ og $y \in V_{s_2,i}$ haves af (4) at intet $B \in \mathfrak{B}_{i+1}$ indeholder såvel x som y. Heraf er $(V_{s,i})_{s \in S}$ diskret (jvf. def. 1.2) for alle $i = 0, 1, 2, \ldots$. Specielt er $\mathfrak{V} = \{V_{s,i} | s \in S \wedge i \in \mathbb{N}\}$ σ-lokalt endelig.

Nu skal det blot vises at $\mathfrak{V}$ er en overdækning. Lad derfor $x \in X$ være givet. Bemærk at $(U_{s,i})_{s \in S}$ er en overdækning for hvert $i \in \mathbb{N}$ da for hvert i og

$B \in \mathfrak{B}_i$ $\mathrm{St}(B, \mathfrak{B}_i) \subseteq U \in \mathfrak{B}$ jvf. (3), hvoraf $\{U_{s,i}\}_{s\in S}$ er en overdækning da $\mathfrak{B}$ er det. Følgelig findes et mindste $s(x) \in S$ så $x \in U_{s(x),i}$ for passende i, da S er velordnet. Da så $\forall s < s(x){:}x \notin U_{s,i+2}$ haves det af (4) at hvis $y \in U_{s,i+1}$ og $B \in \mathfrak{B}_{i+2}$ må

$$x \notin B \vee y \notin B.$$

Følgelig kan intet $y \in U_{s,i+1}$ med $s > s(x)$ opfylde $y \in \mathrm{St}(x, \mathfrak{B}_{i+2})$. Heraf haves

$$\mathrm{St}(x, \mathfrak{B}_{i+2}) \cap \bigcup_{s<s(x)} U_{s,i+1} = \emptyset.$$

Med andre ord er der en åben omegn omkring x, $\mathrm{St}(x, \mathfrak{B}_{i+2})$, der er disjunkt med $\bigcup_{s<s(x)} U_{s,i+1}$. Heraf er $x \notin \overline{\bigcup_{s<s(x)} U_{s,i+1}}$ hvoraf, da $x \in U_{s(x),i}$, $x \in V_{s(x),i}$ som ønsket. □

Jeg fraviger nu Moritas fremgang en lille smule med følgende begrundelse:

Bemærkning 2.9: I [Morita 75, §2, øverst] begår Morita tilsyneladende en fejl idet han antager, at en given normal følge $(\mathfrak{B}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ inducerer en omegnsbasis

(5) $\{\mathrm{St}(x, \mathfrak{B}_i) | i \in \mathbb{N}\}_{x\in X}$.

Men dette er ikke i almindelighed tilfældet — betragt $X = \{1, 2, 3\}$ med den diskrete topologi og

$$\mathfrak{B}_0 = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}\};\ \mathfrak{B}_i = \{\{1\}, \{2, 3\}\} \text{ for } i = 1, 2, \ldots .$$

Her er $\{1, 2\} = \mathrm{St}(1, \mathfrak{B}_0)$ og $\{2, 3\}$ med i den inducerede topologi, men $\{2\} = \{1, 2\} \cap \{2, 3\}$ er det ikke. [Morita 75] henviser til beviset i en artikel [Morita 70], hvori han antager at de betragtede normalfølger inducerer en topologi, hvorfor jeg har valgt at gøre det samme. Alternativet ville være at afslutte den inducerede familie (5) overfor endelig fællesmængdedannelse. □

Så er vi nået til den første store sætning. Denne sætning er central i forståelsen af hvorfor normale overdækninger er interessante — det er de fordi en normal følge giver mulighed for at sige noget om, hvilke punkter der er „tætte" på hinanden og hvilke der ligger langt fra hinanden.

Sætning 2.10: Lad X være et topologisk rum, og lad $\mathcal{B}$ være en normal følge heri, således at $\mathcal{B} = (\mathfrak{B}_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Antag at

$$\Phi = (\{\mathrm{St}(x, \mathfrak{B}_i | i \in \mathbb{N}\})_{x\in X},$$

inducerer en omegnsbasis (se [Engelking, P.1.2.1]) og lad $(X, \mathcal{B})$ være dette topologisk rum. Da er følgende en ækvivalensrelation:

$$x \sim y \Leftrightarrow \forall i \in \mathbb{N} : y \in \mathrm{St}(x, \mathfrak{B}_i).$$

Kvotientrummet $X/\!\sim$ betegnes som det til $\mathcal{B}$ *associerede rum* $X/\mathcal{B}$. Nu findes der en kontinuert, kanonisk afbildning $\varphi : X \to X/\mathcal{B}$ så $x \mapsto [x]$. Endvidere er $X/\mathcal{B}$ metrisérbart og hvis $\mathrm{card}(\mathfrak{B}_i) \leqslant \mathfrak{m}$, hvor $\mathfrak{m}$ er et uendeligt kardinaltal, vil $w(X/\mathcal{B}) \leqslant \mathfrak{m}$. Videre, hvis for hvert i $\mathrm{ord}\mathfrak{B}_i \leqslant n + 1 \in \mathbb{N}$ er $\dim X/\mathcal{B} \leqslant n$.

Bevis: Første påstand er at $\sim$ er en ækvivalensrelation. Da alle $\mathfrak{B}_i$ er overdækninger følger det at $\forall i \in \mathbb{N} \forall x \in X : x \in \mathrm{St}(x, \mathfrak{B}_i)$, hvoraf $\sim$ er refleksiv. Videre er $\sim$ symmetrisk, thi hvis $x \sim y$ følger det af definitionen at

$$\forall i \in \mathbb{N} \exists B \in \mathfrak{B}_i : x, y \in B,$$

hvilket er en klar symmetrisk egenskab. Lad nu $x, y, z \in X$ være givet så $x \sim y$ og $y \sim z$. Antag at $x \not\sim z$, hvoraf der findes et i så intet $B \in \mathfrak{B}_i$ indeholder både x og z. Men da kan $\mathrm{St}(y, \mathfrak{B}_{i+1}) \subseteq B_i \subseteq \mathfrak{B}_i$ ikke indeholde både x og z. Dette er i modstrid med at $y \sim x$ og $y \sim z$. Følgelig må $x \sim z$ hvorfor $\sim$ er en ækvivalensrelation.

Heraf er $X/\mathcal{B}$ et topologisk kvotientrum hvoraf $x \mapsto [x]$ er en kontinuert afbildning af $(X, \mathcal{B}) \mapsto X/\mathcal{B}$. Identitetsafbildningen $x \mapsto x$, der afbilder $X \mapsto (X, \mathcal{B})$, er kontinuert da $(X, \mathcal{B})$ har en omegnsbase bestående af (i X) åbne mængder. Følgelig er sammensætningen $\varphi : X \to X/\mathcal{B}$ kontinuert.

Er nu $A \subseteq X$ sættes

$$\mathrm{Int}(A; \mathcal{B}) = \{x \in X | \exists i \in \mathbb{N} : \mathrm{St}(x, \mathfrak{B}_i) \subseteq A\}.$$

Dette svarer nøjagtigt til $\overset{\circ}{A}$ i $(X, \mathcal{B})$, idet $\mathrm{Int}(A; \mathcal{B})$ er den største mængde indeholdt i A, så ethvert punkt har en omegn indeholdt i A. Følgelig er $\mathrm{Int}(A; \mathcal{B})$ åben i $(X, \mathcal{B})$. Nu er

$$(6) \qquad \varphi^{-1}\left(\varphi(\mathrm{Int}(A; \mathcal{B}))\right) = \mathrm{Int}(A; \mathcal{B}).$$

„$\supseteq$“ er klar da φ er surjektiv. For at vise „$\subseteq$“ antages det modsatte. Da må der findes et $x \in \mathrm{Int}(A, \mathcal{B})$ og et $y \notin \mathrm{Int}(A, \mathcal{B})$ så $[x] = [y]$, dvs. $x \sim y$. Men da der findes et $i \in \mathbb{N}$ så $\mathrm{St}(x, \mathfrak{B}_i) \subseteq \mathrm{Int}(A, \mathcal{B})$ er dette en modstrid. Følgelig gælder (6). Men så er $\varphi(\mathrm{Int}(A; \mathcal{B}))$ åben i $X/\mathcal{B}$, da kvotienttopologien er den fineste topologi, så φ er kontinuert, jvf. f.eks. [Engelking, p. 90]. Sæt nu for hvert $i \in \mathbb{N}$

$$\mathfrak{B}'_i = \{\mathrm{Int}(B; \mathcal{B}) | B \in \mathfrak{B}_i\}.$$

Det følgende argument er lidt vanskeligt tilgængeligt så jeg har prøvet at illustrere det i figur 2: Lad et $i \in \mathbb{N}$ og et $x \in X$ være givet. Da $(\mathfrak{B}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ er en normal følge findes et $B_i \in \mathfrak{B}_i$ så $\mathrm{St}(x, \mathfrak{B}_{i+1}) \subseteq B_i$. Lad nu $y \in \mathrm{St}(x, \mathfrak{B}'_{i+1})$ være givet. Da findes et $B_{i+1} \in \mathfrak{B}_{i+1}$ så $y \in \mathrm{Int}(B_{i+1}; \mathcal{B})$ og dette $B_{i+1} \ni x$. Da $y \in \mathrm{Int}(B_{i+1}; \mathcal{B})$ findes der et $j \in \mathbb{N}$ så $\mathrm{St}(y, \mathfrak{B}_j) \subseteq B_{i+1}$. Ialt haves

$$y \in \mathrm{St}(y, \mathfrak{B}_j) \subseteq B_{i+1} \subseteq \mathrm{St}(x, \mathfrak{B}_{i+1}) \subseteq B_i.$$

Men da $y \in \mathrm{St}(x, \mathfrak{B}'_{i+1})$ var valgt vilkårligt haves heraf at

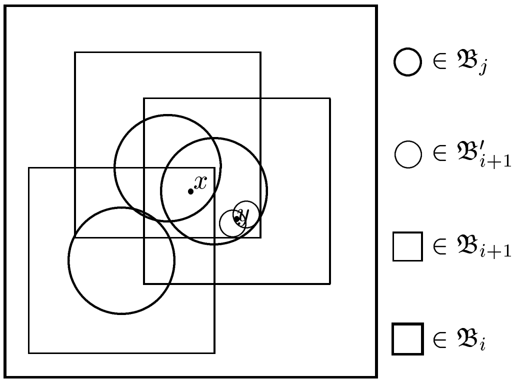
$$\mathfrak{B}'_{i+1} < \mathfrak{B}'^{\Delta}_{i+1} < \mathfrak{B}'_i.$$

Videre, da for ethvert $i \in \mathbb{N}$ og $x \in X$

$$\mathrm{St}(x, \mathfrak{B}_{i+1}) \subseteq B_i \in \mathfrak{B}_i,$$

hvor $\mathfrak{B}_i$ er en overdækning for hvert $i \in \mathbb{N}$, er $x \in \mathrm{Int}(B_i, \mathcal{B}) \in \mathfrak{B}'_i$. Men da er $\mathfrak{B}'_i$ en overdækning for hvert $i \in \mathbb{N}$ hvoraf

$$\mathcal{B}' = (\mathfrak{B}_k)_{k \in \mathcal{N}},$$



Figur 2: En skitse af beviset for at ${\mathfrak{B}'}^{\Delta}_{i+1} < \mathfrak{B}_{i+1}$. Som antydet i figuren er den skarpt optrukne firkant $B_i \in \mathfrak{B}_{i+1}$, mens de svagt optrukne firkanter er de relevante elementer i $\mathfrak{B}_{i+1}$, dvs. dem der indeholder x. De skarpt optrukne cirkler er de relevante elementer i $\mathfrak{B}'_{i+1}$. Hver af disse elementer er p.g.a. konstruktionen indeholdt i et element fra $\mathfrak{B}_{i+1}$. Bemærk at en enkelt af dem ikke indeholder x og derfor ikke er indeholdt i $\mathrm{St}(x, \mathfrak{B}'_{i+1})$. De svagt optrukne cirkler er de relevante elementer i $\mathfrak{B}_j$ der alle er krævet indeholdt i $B_{i+1} \in \mathfrak{B}_{i+1}$.

er en normalfølge i X. Nu, for givet $i \in \mathbb{N}$ og hvert $B_{i+2} \in \mathfrak{B}_{i+2}$ gælder at for et passende $B_i \in \mathfrak{B}_{\mathrm{i}}$

$$\mathrm{St}(B_{i+2}, \mathfrak{B}_{i+2}) \subseteq B_i.$$

Dette er en direkte anvendelse af sætning 2.4. Følgelig er

$$\forall i \in \mathbb{N} : \mathfrak{B}_{i+2} < \mathfrak{B}'_i;\ \forall i \in \mathbb{N} : \mathfrak{B}'_i < \mathfrak{B}_i,$$

hvoraf $X/\mathcal{B}' = X/\mathcal{B}$. Pointen med alt dette er at der nu haves en omegnsbasis for $X/\mathcal{B}$, nemlig $\Phi' = \varphi\left(\{\,\mathrm{St}(x, \mathfrak{B}'_i) | \, x \in X\}\right)$.

Nu er vi klar til at vise at $X/\mathcal{B}$ er metrisérbart. Til det formål anvendes Nagata-Smirnovs metrisationssætning, se f.eks. [Engelking, p. 282]. Ifølge denne skal der vises to ting: at $X/\mathcal{B}$ er regulær og at $X/\mathcal{B}$ har en σ-endelig basis.

For at vise regulariteten er det nok at vise, at der for givet $i \in \mathbb{N}$, $y \in X$ og $x \in \mathrm{St}(y, \mathfrak{B}_i)$ findes et $j \in \mathbb{N}$ så

$$x \in \mathrm{St}(x, \mathfrak{B}'_j) \subseteq \overline{\mathrm{St}(x, \mathfrak{B}'_j)} \subseteq \mathrm{St}(y, \mathfrak{B}'_i),$$

idet Φ' jo var en omegnsbasis for $X/\mathcal{B}$. Men dette medfører at det kan antages at $x = y$, idet der findes et basiselement fra Φ' der indeholder y og er indeholdt i $\mathrm{St}(x, \mathfrak{B}_j)$.

Da $\mathfrak{B}^{\Delta}_{j+3} < \mathfrak{B}_{j+2}$ findes et $B_{j+2} \in \mathfrak{B}_{j+2}$ så

$$G = \mathrm{St}(x, \mathfrak{B}_{j+3}) \subseteq B_{j+2}.$$

Af sætning 2.4 haves så at $\mathfrak{B}^{*}_{j+2} < \mathfrak{B}_j$, hvoraf der findes et $B_j \in \mathfrak{B}_j$ så $x \in \mathrm{St}(B_{j+2}, \mathfrak{B}_{j+2}) \subseteq B_j$, hvorfor

(7) $\quad \mathrm{St}(B_{j+2}, \mathfrak{B}_{j+2}) \subseteq \mathrm{St}(x, \mathfrak{B}_j).$

Betragt nu

$$F = \complement \left(\bigcup_{y \notin \mathrm{St}(x,\mathfrak{B}_j)} \mathrm{St}(y, \mathfrak{B}_{j+2}) \right).$$

Af (7) haves at $\complement F \cap B_{j+2} = \emptyset$ og da $\complement F$ er åben, er F afsluttet. Videre haves

$$x \in G \subseteq B_{j+2} \subseteq F \subseteq \mathrm{St}(x, B_j),$$

med G åben som ønsket. Hermed skiller topologien for $X/\mathcal{B}' = X/\mathcal{B}$ punkter og afsluttede mængder. At topologien skiller punkter er trivielt, da $[x] \neq [y]$ netop når topologien skiller $[x]$ og $[y]$, jvf. definitionen i sætning 2.10. Hermed er $X/\mathcal{B}$ regulær, og første betingelse i Nagata-Smirnovs sætning er opfyldt.

For at vise at $X/\mathcal{B}$ har en σ-lokalt endelig basis benyttes lemma 2.8, idet det udnyttes at $\varphi(\mathfrak{B}'_i)$ er en normal overdækning af $X/\mathcal{B}$ for alle $i \in \mathbb{N}$. Dette følger af (6) og lemma 2.7. Det følger så af lemma 2.8 at $\varphi(\mathfrak{B}'_i)$ har en forfining til en σ-lokalt endelig overdækning $\{V_{i,j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ for hvert i således at

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} V_{i,j} < \varphi(\mathfrak{B}'_i),$$

hvor $V_{i,j}$ er åbne overdækninger. Men da er det klart at

$$(8) \qquad \bigcup_{i,j=1}^{\infty} V_{i,j},$$

er en σ-lokalt endelig basis for $X/\mathcal{B}$, og derved er $X/\mathcal{B}$ metrisabelt som ønsket.

Endeligt haves at hvis kardinaliteten af hver $\mathfrak{B}_i$ højest er $\mathfrak{m}$ med $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$ gælder dette også for $\mathfrak{B}'_i$. Da $\bigcup_{i=1}^{\infty} \varphi(\mathfrak{B}'_i)$ er en basis, er kardinaliteten af denne højst $\mathfrak{m}$ da $\mathrm{card}\,\Phi' \leqslant \mathrm{card}\,\Phi \leqslant \mathfrak{m}$. Antages nu at $\sup_i \mathrm{ord}\mathfrak{B}_i \leqslant n+1 \in \mathbb{N}$ haves $\sup_i \mathrm{ord}\mathfrak{B}'_i \leqslant n+1$ da $\mathfrak{B}'_i < \mathfrak{B}$. Da det gælder, at hvis $x \sim y$ og $B \in \bigcup \mathfrak{B}'_i$ vil enten $x, y \in B$ eller $x, y \notin B$, haves det at $\sup_i \mathrm{ord}\varphi(\mathfrak{B}'_i) \leqslant n+1$. Men da følger af [Nagata, Korollar til sætning V.1] at $\dim X/\mathcal{B} \leqslant n$. Hermed er alle påstande vist. □

Ovenstående har et noget teknisk korollar der skal bruges i de følgende sætninger.

Korollar 2.11: Lad $\mathfrak{B}$ være en normal overdækning i et topologisk rum X. Da findes en kontinuert afbildning $f : X \to T$, hvor T er et metrisk rum og en normal åben overdækning $\mathfrak{C} = \{C_\alpha | \alpha \in A\}$ af T så $\{f^{-1}(C_\alpha) | \alpha \in A\} < \mathfrak{B}$.

Bevis: Lad $\mathfrak{B} = \{B_\alpha | \alpha \in A\}$ være en åben, normal overdækning af X. I beviset for sætning 2.10 blev det godtgjort at hvis Φ var en normalfølge i X subordineret til $\mathfrak{B}$ fandtes en anden normalfølge Φ' (som i beviset blev kaldt $\mathcal{B}'$), hvor $\varphi(\Phi')$ var en normalfølge i X/Φ; og videre var $\varphi^{-1}(\varphi(\Phi')) = \Phi'$. Dette godtgør korollaret. □

Inden ækvivalensen i [EDM2] vises vil jeg først bevise et lemma, der næsten er bevist i en lidt anden formulering i [Engelking, L.5.1.13 og R.5.1.14].

Lemma 2.12: Lad $\{f_\alpha\}_{\alpha\in A}$ være en lokalt endelig deling af enheden i et topologisk rum X og sæt $B_\alpha = \{f_\alpha^{-1}(]0;1])\}$. Er $\mathfrak{B} = \{B_\alpha|\alpha \in A\}$ har $\mathfrak{B}$ en barycentrisk forfining $\mathfrak{V}$ svarende til en lokalt endelig deling af enheden. Specielt haves ved gentagen brug af det foregående at $\mathfrak{B}$ er normal. Videre, hvis kardinaliteten af $\mathfrak{B}$ højst er $\mathfrak{m}$, hvor $\mathfrak{m}$ er et uendeligt kardinaltal, er kardinaliteten af $\mathfrak{V}$ højst $\mathfrak{m}$.

Bevis: Vælg en velordning af A og betragt det første element α_0. Bemærk at $\{B_\alpha|\alpha \in A\setminus\{\alpha_0\}\}\cup\{f_{\alpha_0}^{-1}(]\frac{1}{2};1])\}$ er en åben overdækning. Sættes derfor

$$f'_{\alpha_0}(x) = 2\max(f_{\alpha_0}(x), \tfrac{1}{2}) - 1,$$

er $f'_{\alpha_0} : X \to I$ en kontinuert funktion med

$$B'_{\alpha_0} = (f')^{-1}_{\alpha_0}(]0;1]) = f_{\alpha_0}^{-1}(]\tfrac{1}{2};1]).$$

Sættes herefter for hvert $\alpha \neq \alpha_0$

$$f'_\alpha = \left(f'_{\alpha_0} + \sum_{\beta\neq\alpha_0} f_\beta\right)^{-1} f_\alpha,$$

og

$$B'_\alpha = (f'_\alpha)^{-1}(]0;1]) = f_\alpha^{-1}(]0;1]),$$

haves en ny lokalt endelig deling af enheden $\mathfrak{B}' = \{B'_\alpha|\alpha \in A\}$. Bemærk at alle stenene bortset fra B'_{α_0} er identiske med stenene i $\mathfrak{B}$ og videre at

$$B'_{\alpha_0} \subseteq F_{\alpha_0} = f_{\alpha_0}^{-1}([\tfrac{1}{2};1]) \subseteq B_{\alpha_0}.$$

Denne proces fortsættes således at der til sidst haves en lokalt endelig deling af enheden subordineret til en lokalt endelig brolægning $\mathfrak{F} = \{F_\alpha|\alpha \in A\}$ af funktionelt lukkede mængder der igen forfiner $\mathfrak{B}$.

Betragt nu til hvert $x \in X$ den endelige mængde $A(x) = \{\alpha \in A|x \in F_\alpha\}$; endeligheden følger af at $\mathfrak{F}$ er lokalt endelig. Lad til hvert $x \in X$ V_x være mængden

$$(9) \qquad V_x = \bigcap_{\alpha\in A(x)}\left(B_\alpha \cap \left(X \setminus \bigcup_{\alpha\notin A(x)} F_\alpha\right)\right).$$

Da haves af bemærkning 1.8 at V_x er funktionel åben. Ydermere er familien $\mathfrak{V} = \{V_x|x \in X\}$ lokalt endelig. Thi er $x \in X$ findes der en omegn $O(x)$ så $A(O(x)) = \{\alpha \in A|O(x)\cap B_\alpha \neq \emptyset\}$ er endelig da $\mathfrak{B}$ er lokalt endelig. Er $y \in X$ nu et vilk. punkt vil $V_y \ni x$ kun hvis $A(y) \subseteq A(O(x))$. Men da det for to givne punkter $\xi, \eta \in X$ gælder at $V_\xi = V_\eta \Leftarrow A(\xi) = A(\eta)$ betyder dette, at $O(x)$ højst kan snitte lige så mange sten fra $\mathfrak{V}$ som der er endelige delmængder af $A(O(x))$, hvilket er endelig mange. Hermed er $\mathfrak{V}$ lokalt endelig. Endelig har $\mathfrak{V}$ højst kardinalitet $\mathfrak{m}$, da $A(x)$ bestemmer $V(x)$ og da $A(x)$ er endelig og kardinaliteten af mængden af endelige delmængder fra en mængde med kardinalitet $\mathfrak{m}$ højst er $\mathfrak{m}$ hvis $\mathfrak{m}$ er et uendeligt kardinaltal.

Lad nu $x_0 \in X$ og $\alpha_0 \in A(x_0)$ være givet. Antages det for givet $x \in X$ at $x_0 \in V_x$ haves det af (9) at $\alpha_0 \in A(x)$, hvoraf $V_x \subseteq B_{\alpha_0}$. Følgeligt må $\mathrm{St}(x_0, \mathfrak{V}) \subseteq$

B_{α_0} hvorfor $\mathfrak{V}^{\Delta} < \mathfrak{B}$ som ønsket. Da $\mathfrak{V}$ er en lokalt endelig overdækning af funktionelt åbne mængder haves en familie af funktioner $\{g_x\}_{x\in X}$ så $\forall x \in X$: $V_x = g_x^{-1}(]0;1])$ hvoraf funktioner af formen

$$h_x = \frac{g_x}{\sum_{x\in X} h_x},$$

der er veldefineret da $\mathfrak{V}$ er en lokalt endelig overdækning, udgør en lokalt endelig deling af enheden. □

Nu til et af dette afsnits hovedresultater. Da jeg startede med at undersøge normale overdækninger fandt jeg at disse var definerede på to meget distinkte måder. [EDM2] antydede at disse var ækvivalente og nedenstående godtgør at dette er tilfældet.

Sætning: 2.13: Lad X være et topologisk rum og lad $\mathfrak{B}$ være en overdækning heraf. Da er $\mathfrak{B}$ normal netop når $\mathfrak{B}$ kan forfines til en lokalt endelig deling af enheden.

Bevis: Antag at $\mathfrak{B}$ er normal. Vælg en normalfølge $\mathcal{B}$ subordineret til $\mathfrak{B}$. Da findes ifølge sætning 2.10 en metrik d på $X/\mathcal{B}$, så $\{\varphi(\mathrm{Int}(B,\mathcal{B}))|B \in \mathfrak{B}\}$ er en åben overdækning, hvor φ er den kanoniske afbildning fra sætning 2.10. Heraf findes ifølge Stones sætning ([Engelking, p. 280]) en lokalt endelig forfining $\mathfrak{C}$ af $\mathfrak{B}$. Betragt nu et vilkårligt $C \in \mathfrak{C}$. Da C er åben findes der til hvert $x \in C$ et $\epsilon > 0$ så $K(x,\epsilon) \subseteq C$. Følgeligt gælder det at $\forall y \notin C : d(x,y) \geqslant \epsilon$, hvoraf $f_C : X \to [0;1]$ defineret ved

$$f_C(x) = \max\left(\inf_{y\notin C} d(x,y), 1\right),$$

opfylder $f_C(x) = 0 \Leftrightarrow x \notin C$. Heraf er C funktionelt åben. Men da er $\varphi^{-1}(C)$ åben idet $f_C \circ \varphi(x) = 0 \Leftrightarrow x \notin \varphi^{-1}(C)$. Videre, da $\mathfrak{B}$ ikke skiller punkter fra samme ækvivalensklasse er det klart at $\varphi^{-1}(\mathfrak{C}) < \mathfrak{B}$. Endeligt er det indlysende at $\varphi^{-1}(\mathfrak{C})$ er lokalt endeligt da $\mathfrak{C}$ er det; følgelig er $\varphi^{-1}(\mathfrak{C})$ en lokalt endeligt overdækning af funktionelt åbne mængder, der er subordineret til $\mathfrak{B}$. For at lave en lokalt endelig deling af enheden bemærkes at $\sum_{C\in\mathfrak{C}} f_C(x) < \infty$ da $\mathfrak{C}$ er lokalt endelig. Følgeligt definerer

$$\left(\frac{f_C}{\sum_{C\in\mathfrak{C}} f_C(x)}\right)_{C\in\mathfrak{C}},$$

en lokalt endelig deling af enheden subordineret til $\mathfrak{B}$.

Lad nu $\mathfrak{B}$ være en åben overdækning og $\{f_\alpha\}_{\alpha\in A}$ være en lokalt endelig deling af enheden subordineret til $\mathfrak{B}$. Da er $\{f_\alpha^{-1}(]0;1])\}$ normal ifølge lemma 2.12, hvoraf $\mathfrak{B}$ er normal. □

Som et sidste resultat i dette afsnit gives følgende nyttige, lille sætning:

Sætning: 2.14: I et givet normalt rum X er enhver endelig åben overdækning normal.

Bevis: Lad $\mathfrak{G} = \{G_1, \ldots, G_n\}$ være en endelig åben overdækning af X. Da er $F_1 = \complement \bigcup_{i=2}^{n} G$ en afsluttet mængde, så $\{F_1, G_2, \ldots, G_n\}$ er en overdækning. Videre er $F_1 \subseteq G_1$ hvoraf der findes en kontinuert funktion $f_1 : X \to I$

så $f(F_1) = \{1\}$ og $f(\complement G) = \{0\}$ da X er normal. Sættes $G_1' = f_1^{-1}(]0;1])$ er da $F_1 \subseteq G_1' \subseteq G_1$. Heraf er $\{G_1', G_2, \dots, G_n\}$ en overdækning og G_1' funktionelt åben. Ved at gentage denne proces n gange haves nu en endelig overdækning af funktionelt åbne mængder. Ved at foretage en passende normering af $\{f_1, \dots, f_n\}$ haves en (lokalt) endelig deling af enheden, hvoraf $\mathfrak{G}$ er normal ifølge sætning 2.13. □

3 Om Tychonofffunktoren

Oprindeligt blev lebesguedimensionen defineret via åbne overdækninger istedet for normale åbne ditto. I den forbindelse finder man at tychonoffrum er den naturlige ramme at behandle lebesguedimensionen i. Derfor er det interessant at diskutere en funktor der afbilder generelle topologiske rum i tychonoffrum. Til dette formål er lidt abstrakt teori om ikke nødvendigt så opklarende. Også meget af dette kapitel er sætninger som jeg brugte uden bevis i mit fagprojekt.

Den første forhindring er at der ikke er nogen mængde der indeholder alle topologiske rum, eller for den sags skyld nogen væsentlig del af dem. For at komme uden om det problem indfører næste definition en såkaldt kategori. Mængdeteoretisk kan man bringe sig på sikker grund ved at sige at kategorier er en måde at samle resultater der gælder for vilkårlige mængder af matematiske objekter, her topologiske rum.

Def 3.1: Ved en *kategori* forstås følgende: Lad $\mathfrak{M}$ være en familie af matematiske objekter, hvori der til hvert par af objekter (X, Y) er knyttet en mængde $\mathrm{Hom}(X, Y)$. Findes der nu en komposition $\circ$ således at $X, Y, Z \in \mathfrak{M}$, $f \in \mathrm{Hom}(X, Y)$ og $g \in \mathrm{Hom}(Y, Z)$ bestemmer et element $f \circ g \in \mathrm{Hom}(X, Z)$ og således at denne komposition $\circ$ opfylder følgende aksiomer kaldes hele systemet for en *kategori*. Aksiomerne er:

1. $\circ$ er associativ.

2. Til hvert $X \in \mathfrak{M}$ findes et $1_X \in \mathrm{Hom}(X, X)$ så det for hvert $Y, Z \in \mathfrak{M}$, hvor $f \in \mathrm{Hom}(X, Y)$ og $g \in \mathrm{Hom}(Y, X)$, gælder at $1_X \circ f = f$ og $g \circ 1_X = g$.

3. Er $X, X', Y, Y' \in \mathfrak{M}$ er $\mathrm{Hom}(X, Y)$, $\mathrm{Hom}(X', Y')$ disjunkte medmindre $X = X'$ og $Y = Y'$.

Elementerne i mængderne $\mathrm{Hom}(\cdot, \cdot)$ kaldes *morfier* og elementerne i $\mathfrak{M}$ kaldes *objekter* i kategorien. Bemærk at sidste aksiom udelukker de sædvanlige identifikationer. At dette er nødvendigt skyldes at $\mathfrak{M}$ sædvanligvis *ikke* er en mængde, hvorfor man skal være forsigtig med at anvende vanlige mængderesultater. □

Anvendes ovenstående på de topologiske rum haves følgende eksempel:

Eksempel 3.2: Lad $\mathfrak{M}$ være de topologiske rum og lad for to topologiske rum X, Y $\mathrm{Hom}(X, Y) = C(X, Y)$, dvs. de kontinuerte funktioner er morfierne. Vælges kompositionen som den sædvanlige komposition af kontinuerte funktioner er aksiomerne oplagt opfyldt; thi er X, Y og Z topologiske rum og $f \in C(X, Y)$, $g \in C(Y, Z)$ er $f \circ g \in C(X, Z)$. Da er de topologiske rum med de kontinuerte afbildninger en kategori kaldet *kategorien af de topologiske rum*. Bemærk at $\mathfrak{M}$ ikke er nogen mængde.

Tilsvarende haves kategorien af tychonoffrum. □

Så langt så godt. Men nu ønsker vi at knytte et tychonoffrum til ethvert topologisk rum, dvs. en slags afbildning imellem kategorier. Igen er vi på gyngende grund mængdeteoretisk da en afbildning jo er en delmængde af en produkt*mængde*. Igen klares problemet ved at kalde det noget anden og så iøvrigt at bemærke, at i en given *mængde* af objekter er der ingen problemer.

Def 3.3: Lad $\mathcal{C}$ og $\mathcal{C}'$ være kategorier. Ved en *kovariant* funktor F fra $\mathcal{C}$ til $\mathcal{C}'$ forstås en regel F der opfylder følgende:

1. Til hvert objekt $X \in \mathcal{C}$ knytter F et objekt $F(X) \in \mathcal{C}'$.
2. Er $X, Y \in \mathcal{C}$ knytter F til hver morfi $f \in \mathrm{Hom}(X,Y) \in \mathcal{C}$ en morfi $F(f) \in \mathrm{Hom}(F(X), F(Y))$.
3. Er $X, Y, Z \in \mathcal{C}$ objekter og er $f \in \mathrm{Hom}(X,Y), g \in \mathrm{Hom}(Y,Z)$ morfier er $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$.
4. Er $X \in \mathcal{C}$ et objekt herpå er $F(1_X) = 1_{F(X)}$ (se def. 3.1, axiom 2).

En *kontravariant* funktor er en regel der opfylder følgende aksiomer:

1'. Til hvert objekt $X \in \mathcal{C}$ knytter F et objekt $F(X) \in \mathcal{C}'$.

2'. Er $X, Y \in \mathcal{C}$ knytter F til hver morfi $f \in \mathrm{Hom}(X,Y) \in \mathcal{C}$ en morfi $F(f) \in \mathrm{Hom}(F(Y), F(X))$.

3'. Er $X, Y, Z \in \mathcal{C}$ objekter og er $f \in \mathrm{Hom}(X,Y), g \in \mathrm{Hom}(Y,Z)$ morfier er $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$.

4'. Er $X \in \mathcal{C}$ et objekt herpå er $F(1_X) = 1_{F(X)}$ (se def. 3.1, axiom 2).

Fra det generelle bevæger vi os nu mod det specifikke, nemlig den lovede funktor: □

Def 3.4: Lad X, Y være topologiske rum og $I = [0;1]$. Konstruér

$$P(X) = \prod \{I_\varphi | \varphi \in C(X,I)\},$$

hvor $I_\varphi = I$ for alle φ. Betragt så afbildningen

$$\Phi'_X : X \to P(X);\ \Phi'_X(x) = (\varphi(x))_{\varphi \in C(X,I)},$$

og videre for en kontinuert funktion $f : X \to Y$ og $t \in \Phi'_X(X)$ afbildningen

$$\begin{aligned} &P(f) : P(X) \to P(Y), \\ &P(f)(t) = P(f)\left((\varphi(x))_{\varphi \in C(X,I)}\right) = (\psi \circ f(x))_{\psi \in C[Y,I]}. \end{aligned}$$

Herefter defineres *tychonofffunktoren* τ som følger. Bemærk at vi stadig mangler at vise, at τ er en funktor.

$$\begin{aligned} &\tau(X) = \Phi'_X(X) \text{ for hvert topologisk rum } X, \\ &\tau(f) = P(f)|_{\tau(X)} : \tau(X) \to \tau(Y) \text{ for hver morfi } f, \\ &\Phi_X = \Phi'_X|_{\Phi'_X(X)}. \end{aligned}$$

□

Nu er vi klar til at formulere dette afsnits hovedresultat:

Sætning 3.5: Tychonofffunktoren som beskrevet i def. 3.4 er en kovariant funktor fra kategorien af topologiske rum $\mathcal{S}$ til (sub)kategorien af tychonoffrum $\mathcal{T}$. Videre er $\{\Phi_X\}$ en *naturlig transformation* fra identitetsfunktoren på de topologiske rum til tychonofffunktoren, dvs. at $\{\Phi_X\}$ opfylder[3]:

$$\forall X, Y \in \mathcal{S} \forall f \in \mathrm{Hom}(X,Y) : \Phi_Y \circ f = \tau(f) \circ \Phi_X.$$

Ialt haves altså følgende diagram, som i kraft af sidste lighed er kommunikativt:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ {\scriptstyle \Phi_X}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \Phi_Y} \\ \tau(X) & \xrightarrow{\tau(f)} & \tau(Y) \end{array} \tag{10}$$

Endelig gælder, at hvis X er et tychonoffrum er Φ_X en homeomorfi.

Bevis: Bemærk først at for et givet topologisk rum X er Φ_X kontinuert, da alle koordinatfunktionerne er kontinuerte ([Engelking], T.2.3.6).

Lad X være et topologisk rum. Da skal det vises at $\tau(X) \subseteq P(X)$ er et tychonoffrum. Men I er som bekendt et tychonoffrum og videre er et vilk. (kartesisk) produkt af tychonoffrum et tychonoffrum, hvoraf $P(X)$ er et tychonoffrum ([Engelking], T.2.3.11). Da $\tau(X)$ er et delrum af $P(X)$ er $\tau(X)$ et tychonoffrum, jvf. [Engelking], T2.1.6. Nu haves at τ knytter et tychonoffrum til ethvert topologisk rum.

Lad nu $X, Y \in \mathcal{S}$ og et $f \in \mathrm{Hom}(X,Y)$ være givet. Da skal det vises at $\tau(f) \in \mathrm{Hom}(\tau(X), \tau(Y))$, hvoraf det savnes bevist at $\tau(f)$ er kontinuert, da resten er trivielt. Men det følger som før, idet hver koordinatfunktion er kontinuert i hver koordinat da de er sammensætningen af kontinuerte funktioner.

Det er nu ligetil at se at diagrammet (10) er kommunikativt, da definitionen af $\tau(f)$ giver

$$\forall x \in X : \tau(f)\left((\varphi(x))_{\varphi \in C(X,I)}\right) = ((f \circ \psi)(x))_{\psi \in C(Y,I)}.$$

Vi mangler stadigvæk at vise at τ opfylder axiomerne for en kovariant funktor. Lad derfor $X, Y, Z \in \mathcal{S}$, $f \in \mathrm{Hom}(X,Y)$ og $g \in \mathrm{Hom}(Y,Z)$ være givet. Betragt diagrammet

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z \\ {\scriptstyle \Phi_X}\downarrow & & {\scriptstyle \Phi_Y}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \Phi_Z} \\ \tau(X) & \xrightarrow{\tau(f)} & \tau(Y) & \xrightarrow{\tau(g)} & \tau(Z) \end{array}$$

Da diagrammet er kommunikativt ses let, at for et vilk. $x \in X$ er

$$\tau(g)\left[\tau(f)\left(\Phi_X(x)\right)\right] = \tau(g)\left[\Phi_Y(f(x))\right] = \Phi_Z(g(f(x))) = \tau(g \circ f)(\Phi_X),$$

[3]For en mere generel definition af en naturlig transformation se f.eks. [EDM2] p. 206.

hvor sidste lighed følger af at $g \circ f \in \mathrm{Hom}(X, Z)$, hvoraf

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{g\circ f} & Z \\ {\scriptstyle \Phi_X}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \Phi_Z} \\ \tau(X) & \xrightarrow{\tau(g\circ f)} & \tau(Z) \end{array}$$

er kommunikativt.

Da det er klart fra definitionen at det for et vilk. topologisk rum X gælder, at $\tau(1_X) = 1_{\tau(X)}$ er τ en kovariant funktor.

Til slut skal det vises, at Φ_X er en homeomorfi hvis X er et tychonoffrum. Til det formål anvendes *diagonalsætningen*, der står bevist i f.eks. [Engelking, P.2.3.20], idet det bemærkes at Φ_X netop er diagonalafbildningen af familien af kontinuerte funktioner fra X til I. Heraf er det nok at vise at de kontinuerte funktioner skiller punkter i X; men dette er jo netop den karakteriserende egenskab ved et tychonoffrum. $\square$

Bemærk at tychonofffunktoren er en måde at skaffe et tychonoffrum ud fra et vilkårligt topologisk rum, således at tychonoffrum afbildes homeomorft og derved essentielt uændret. Videre haves at da Φ_X er kontinuert kan topologiske resultater trækkes tilbage til det oprindelige rum.

Der gælder nu følgende lemma:

Lemma 3.6: Lad X være et vilkårligt rum, R være et tychonoffrum og $f : X \to R$ en kontinuert afbildning. Da findes en entydigt bestemt funktion $g : \tau(X) \to R$ således at $f = g \circ \Phi_X$.

Bevis: I diagrammet

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & R \\ {\scriptstyle \Phi_X}\downarrow & & {\scriptstyle \Phi_R}\downarrow \\ \tau(X) & \xrightarrow{\tau(f)} & \tau(R) \end{array}$$

er Φ_R en homeomorfi ifølge sætning 3.5, hvorfor

$$f = \Phi_Y^{-1} \circ \tau(f) \circ \Phi_X.$$

Heraf vil $g = \Phi_Y^{-1} \circ \tau(f)$ opfylder kravet fra leammet. g er entydigt bestemt da diagrammet er kommunikativt og Φ_X er bijektiv, igen ifølge sætning 3.5. $\square$

4 Lebesgues dimensionsbegreb

Der findes tre forskellige dimensionsbegreber for generelle topologiske rum. Disse tre stemmer ikke i almindelighed overens, omend de faktisk kan vises at gøre det på separable metriske rum. Den ene, *svagt induktiv dimension* eller *Urysohn-Menger-dimension* vil jeg vende tilbage til senere da dette begreb er centralt i et modeksempel.

En anden induktiv definition af dimension er *stærk induktiv dimension* eller *çechdimension*. Mens dette begreb ikke er uvigtig vil jeg ikke beskæftige mig med det her i dette speciale. *Overdækningsdimension* eller *lebesguedimension*, er som det eneste dimensionsgreb ikke induktivt defineret. En grundig gennemgang af forholdene for og imellem disse dimensionsbegreber er at finde i [Nagata], som også indeholder en omfattende bibliografi.

Grundlaget for Lebesgues dimensionsbegreb er følgende begreb der er rent mængdeteoretisk af natur:

Def 4.1: Lad X være et topologisk rum, $\mathfrak{B}$ være en brolægning herpå og p et punkt i X. Da defineres *ordenen* af $\mathfrak{B}$ i p som antallet af sten i $\mathfrak{B}$ der indeholder p, idet ordenen af p tildeles værdien $+\infty$ hvis p er indeholdt i uendelig mange sten fra $\mathfrak{B}$. Ordenen af p m.h.t. $\mathfrak{B}$ betegnes $\mathrm{ord}_p\mathfrak{B}$. Af større vigtighed defineres ordenen af $\mathfrak{B}$ som

$$\mathrm{ord}\mathfrak{B} = \sup_{p\in X} \mathrm{ord}_p\mathfrak{B},$$

hvor så $\mathrm{ord}\mathfrak{B} \in \{0, 1, 2, \ldots, +\infty\}$. □

Med dette i hånden kan lebesguedimensionen af et givet topologisk rum bestemmes som følger:

Def 4.2: Lad $(X, \mathfrak{T})$ være et topologisk rum. Da siges *lebesguedimensionen* $\dim X$ af X at være det mindste tal $n \in \{-1, 0, \ldots, +\infty\}$, således at enhver given endelig, normal åben overdækning kan forfines til en endelig normal overdækning af orden højst $n + 1$. □

For at illustrere lebesguedimensionen, og fordi jeg kan bruge sætningen engang senere, vil jeg nu vise en såkaldt *sumsætning*, i en svagere udgave en den normalt anvendte. Før den har jeg dog et lille nyttigt lemma:

Lemma 4.3: Lad X være et topologisk rum med $\dim X \leqslant n$, hvor $n \in \mathbb{N}$ og lad $(G_i)_{i=1,\ldots,m}; m \in \mathbb{N}$ være en endelig, åben overdækning af X. Da findes der et $(G'_i)_{i=1,\ldots,m}$ så $G'_i \subseteq G_i$ og $\mathrm{ord}(G'_i) \leqslant n + 1$.

Bevis: Da $\dim X \leqslant n$ findes en åben overdæknig $(H_j)_{j=1,\ldots,l}; l \in \mathbb{N}$ så $(H_j) < (G_i)$ og så $\mathrm{ord}(H_j) \leqslant n + 1$. Betragt nu

$$G'_1 = \bigcup \{H_j | H_j \subseteq G_1\}$$

og videre

$$G'_2 = \bigcup \{H_j | H_j \subseteq G_2 \wedge H_j \not\subseteq G_1\}$$

$$G'_i = \bigcup \left\{ H_j | H_j \subseteq G_i \wedge H_j \not\subseteq \bigcup_{\nu=1}^{i-1} G_\nu \right\}$$

Det er umiddelbart klart, at $G'_i \subseteq G_i$ for alle i og da $(H_j) < (G_i)$ vil alle H_j'erne være brugt til konstruktionen af netop ét G'_i. Er nu $x \in X$ givet er $x \in H_j$ for højst $n + 1$ j'er, hvoraf $x \in G'_i$ for højst $n + 1$ i'er, altså er $\mathrm{ord}_x(G'_i) \leqslant n + 1$. Da x var valgt vilkårligt følger at $\mathrm{ord}(G'_i) \leqslant n + 1$, som ønsket. □

Sætning 4.4: Lad X være et topologisk rum og lad $S_1, S_2, \ldots, S_n$ være en afsluttet overdækning af X. Da er $\dim X \leqslant n \Leftrightarrow \forall i \in \{1, \ldots, n\} : \dim S_i \leqslant n$.

Bevis: Bemærk allerførst at sætningen er triviel sand i det fald $X = \emptyset$ og $\forall i : S_i = \emptyset$. Jeg vil derfor i det følgende antage, at $X \neq \emptyset$.

Antag først at $\dim X \leqslant n$ og lad (G_j) være en endelig, åben overdækning af S_i for et givet $i \in \{1, \dots, n\}$. Da er $(G_j^*) \cup (X \setminus S_i)$ en endelig, åben overdækning af X hvor G_j^* er en åben mængde i X så $G_j^* \cap S_i = G_j$. Da $\dim X \leqslant n$ findes der nu (H_k) der forfiner $(G_j^*) \cup (X \setminus S_i)$ så $\operatorname{ord}(H_k) \leqslant n + 1$. Men da er $(H_k \cap S_i)$ en endelig åben overdækning af S_i så $\operatorname{ord}(H_k \cap S_i) \leqslant \operatorname{ord}(H_k) \leqslant n$.

Omvendt antages nu, at $\dim S_i \leqslant n, i = 1, \dots, n$ og at $(G_j)_{j=1,\dots,m}$ er en endelig, åben overdækning af X. Da er (G_j) en endelig, åben overdækning af S_1 hvorfor der findes ifølge lemma 4.3 en endelig åben overdækning $(H_j^1) \in \mathcal{T}(S_i)$ for $j = 1, \dots, m$, så $\forall j : H_j^1 \subseteq G_j$ og så $\operatorname{ord}_x(H_k^1) \leqslant n + 1$ når $x \in S_1$. Sæt nu til hvert $j = 1, \dots, m$

$$G_j^1 = H_j^1 \cup G_j \setminus S_1$$

Da (H_j^1) er en overdækning af S_1 og da (G_j) er en overdækning af X er (G_j^1) en åben overdækning af X. Videre haves det direkte, at $\operatorname{ord}_x(G_j^1) \leqslant n + 1$ for $x \in S_1$. Nu fortsættes processen ved at bemærke, at da (G_j^1) specielt overdækker S_2 findes der til hvert $j = 1, \dots, m$ et $H_j^2 \subseteq G_j^1$ så $\operatorname{ord}_x(H_j^2) \leqslant n+1$ når $x \in S_2$. Herefter sættes til hvert j

$$G_j^2 = H_j^2 \cup G_j^1 \setminus S_2$$

Da $G_j^2 \subseteq G_j^1$ følger det, at $\operatorname{ord}_x(G_j^2) \leqslant n + 1$ hvis $x \in S_1 \cup S_2$ og ligesom før indses, at (G_j^2) er en åben overdækning af X. Denne proces fortsættes indtil der findes en åben overdækning G_j^n så

$$\forall j : G_j^n \subseteq G_j^{n-1} \subseteq \cdots \subseteq G_j^1 \subseteq G_j$$

og så $\operatorname{ord}_x G^n \leqslant n+1$ for $x \in S_1 \cup \S_2 \cup \cdots \cup S_n = X$. Men hermed er det ønskede vist.

Der gælder iøvrigt noget mere end hvad ovenstående viser: man kan vise at det er nok at den afsluttede overdækning er lokalt endelig, se [Nagata, Theorem VII.1.]. Beviset for dette er noget mere teknisk og benytter velordningssætningen, men bygger ellers på samme idé som dette bevis. □

Af sætning 4.5 følger en vigtig sætning der godtgør, at sålænge de rum vi arbejder i er normale er det unødvendigt at tænke på, om en given overdækning er normal. Dette gælder så specielt kompakte hausdorffrum.

Sætning 4.5: Lad X være et normalt rum. Da er $\dim X = \dim' X$, hvor dim' er lebesguedimensionen i den traditionelle forstand som angivet i f.eks. [Nagata, pp. 8–9].

Bevis: Dette er en direkte følge af sætning 4.5. □

Som videre illustration af dette vigtige begreb vil jeg her vise, at lebesguedimensionen af enhedsintervallet som forventet er 1. Bemærk at jeg i lyset af sætning 4.5 ikke bekymrer mig om hvorvidt en overdækning er normal eller ej.

Eksempel 4.6: Betragt til hvert $n \in \mathbb{N}$ med $n \geqslant 2$ følgende endelige åbne overdækning:

$$\mathfrak{B}_n = \left\{ \left] \tfrac{i}{2^n}; \tfrac{i+2}{2^n} \right[\,\middle|\, i = 0, 1, \dots, 2^n - 2 \right\}$$

Da er $\mathfrak{B} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathfrak{B}_n$ oplagt en basis for topologien på I, og videre kan ethvert element i $\mathfrak{B}_n$ skrives som en endelig forening af elementer i $\mathfrak{B}_m$ hvor $m \geqslant n$. Endeligt er det let at se, at $\forall n \in \mathbb{N} : \mathrm{ord}\mathfrak{B}_n = 2$.

Lad nu $(G_i)_{i=1,\dots,n}$, $n \in \mathbb{N}$ være en endelig, åben overdækning af I. Da $\mathfrak{B}$ er en basis kan hvert G_i skrives som en forening af basiselementer fra $\mathfrak{B}$. Lad altså $G_i = \bigcup\{\mathfrak{C}^i\}$ for hvert i, hvor $\mathfrak{C}^i \subseteq \mathfrak{B}$. Da er $\mathfrak{C} = \bigcup_{i=1}^{n} \mathfrak{C}^i$ en overdækning af I, hvorfor der findes en endelig delmængde $\mathfrak{C}' \subseteq \mathfrak{C}$ der overdækker I, da I er kompakt. Hvert element i $\mathfrak{C}'$ er element i netop ét $\mathfrak{B}_i$ hvorfor der findes et største i_0 så intet element i $\mathfrak{C}'$ ligger i et $\mathfrak{B}_i$ hvor $i > i_0$. Dan nu $\mathfrak{C}''$ ved at erstatte hvert element i $\mathfrak{C}'$ med elementer i $\mathfrak{B}_{i_0}$. Men da er $\mathfrak{C}''$ en forfining af (G_i) med $\mathrm{ord}\mathfrak{C}'' \leqslant 2$. Hermed er det bevist, at $\dim I \leqslant 1$. På den anden side kan det let indses, at f.eks. overdækningen $\mathfrak{B}_2$ ikke kan forfines til en overdækning af I med orden højst 1, hvorfor $\dim I = 1$ som ønsket. □

Nu vil jeg vise to resultater der godtgør, at så vidt lebesguedimensionen angår er det tilstrækkeligt at arbejde med tychonoffrum. Da den traditionelle definition af lebesguedimensionen kun opfører sig ikke-patologisk på tychonoffrum er dette et meget centralt resultat.

Lemma 4.7: Lad X være et topologisk rum og $n \in \mathbb{N}'$. Da er $\dim X \leqslant n$ netop når $\dim \tau(X) \leqslant n$.

Bevis: Antag at $\dim(X) \leqslant n$ og antag at $\mathfrak{G}$ er en normal overdækning af $\tau(X)$. Betragt $\Phi_X^{-1}(\mathfrak{G})$, der så vil være en normal overdækning ifølge lemma 2.7. Følgelig findes en normal overdækning af X med orden højst $n+1$. Videre findes ifølge korollar 2.11 $T, f, \mathfrak{C}$ og g som i korollar 2.11. Men da er $g^{-1}(\mathfrak{C})$ en åben normal overdækning som da $f = g \circ \Phi_X$ må være subordineret $\mathfrak{G}$. Videre er det let at se at denne overdækning har orden højst $n + 1$. Tilsvarende den anden vej. □

I [Morita 73] er følgende bevist for specialtilfældet hvor X er et tychonoffrum. Dette bevis er meget teknisk og det vil føre alt for vidt at vise dette resultat her, hvorfor interesserede henvises til Moritas artikel. Her vil sætningen blot blive bevist ud fra specialtilfældet. Bemærk at der *ikke* er tale om endelige overdækninger.

Sætning: 4.8: Lad X være et topologisk rum. Da er $\dim X \leqslant n \in \mathbb{N}'$ netop når enhver åben normal overdækning kan forfines til en åben normal overdækning med orden $\leqslant n+1$. Videre, hvis $\dim X \leqslant n$ og $\mathfrak{B}$ er en åben, normal overdækning findes en åben normal overdækning $\mathfrak{B}'$ så $\mathrm{ord}\mathfrak{B}' \leqslant n + 1$ og $\mathrm{card}\, \mathfrak{B}' \leqslant \mathrm{card}\, \mathfrak{B}$.

Bevis: En direkte følge af specialtilfældet og lemma 4.7. □

5 Invers limes af topologiske rum

Når der er indført en topologisk invariant som f.eks. lebesguedimensionen er det naturligt at spørge om denne bevares ved grænseovergang. Inden jeg forsøger at besvare dette spørgsmål vil jeg gennemgå det mest almindelige grænsebegreb for topologiske rum, invers limes.

Def 5.1: Lad $\{X_\sigma | \sigma \in \Sigma\}$, hvor Σ være en præordnet, opad filtrerende mængde efter relationen $\leqslant$, og lad X_σ være et topologisk rum for hvert $\sigma \in \Sigma$. Antag videre at der til hvert par (σ,ρ), hvor $\sigma \leqslant \rho$, findes en kontinuert afbildning $\pi_\sigma^\rho : X_\rho \to X_\sigma$ således at

1. $\forall \sigma \in \Sigma : \pi_\sigma^\sigma = id_{X_\sigma}$,

2. $\forall \sigma, \rho, \tau \in \Sigma : \sigma \leqslant \rho \leqslant \tau \Rightarrow \pi_\sigma^\rho \pi_\rho^\tau = \pi_\sigma^\tau$.

Da kaldes systemet $S = \{X_\sigma, \pi_\sigma^\rho, \Sigma\}$ et *inverst system af topologiske rum* X_σ. Afbildningerne π_σ^ρ kaldes *bindingsafbildninger* i det inverse system S. Tilsvarende, hvis $A_\sigma \subseteq X_\sigma$ til hvert $\sigma \in \Sigma$, hvis $\pi_\sigma^\rho|_{A_\sigma} A_\rho \subseteq A_\sigma$ for $\rho \leqslant \sigma$ og hvis X_σ, A_σ for hvert $\sigma \in \Sigma$ er kompakte kaldes systemet $\{(X_\sigma, A_\sigma), \pi_\rho^\sigma, \Sigma\}$ et *inverst system af kompakte par*. Der vil blive vendt tilbage til sådanne systemer i sætning 7.5.

Hvis i nedenstående diagram pilene i øverste linje angiver retningen i Σ, kan ovenstående måske anskueliggøres således, idet læseren ikke bør få den opfattelse, at Σ i almindelighed er lineart ordnet:

$$\begin{array}{ccccccccc} \cdots & \longrightarrow & \sigma & \longrightarrow & \rho & \longrightarrow & \tau & \longrightarrow & \cdots \\ \cdots & \longleftarrow & X_\sigma & \underset{\pi_\rho^\sigma}{\longleftarrow} & X_\rho & \underset{\pi_\tau^\rho}{\longleftarrow} & X_\tau & \longleftarrow & \cdots \end{array}$$

Lad nu $S = \{X_\sigma, \pi_\sigma^\rho, \Sigma\}$ være et inverst system og lad $(x_\sigma)_{\sigma\in\Sigma} \in \prod_{\sigma\in\Sigma} X_\sigma$. Da siges (x_σ) at være en *tråd* dersom

$$\forall \sigma \leqslant \rho \in \Sigma : \pi_\sigma^\rho(x_\rho) = x_\sigma.$$

Delrummet bestående af samtlige tråde kaldes *grænserummet af det inverse spektrum* S eller *den inverse limes af* S, skrevet $\underleftarrow{\lim}\{X_\sigma, \pi_\rho^\sigma, \Sigma\} = \underleftarrow{\lim}\, S$. Fuldstændigt tilsvarende defineres den inverse limes af kompakte par, dvs. at hvis $S = \{(X_\sigma, A_\sigma), \pi_\sigma^\rho, \Sigma\}$ er et inverst system af kompakte par er grænsen af $\underleftarrow{\lim}\, S$

$$\left(\left\{(x_\alpha) \in \prod X_\alpha \,\middle|\, (x_\alpha) \text{ tråd}\right\}, \left\{(x_\alpha) \in \prod A_\alpha \,\middle|\, (x_\alpha) \text{ tråd}\right\}\right).$$

□

Umiddelbart haves følgende:

Sætning 5.2: Lad S være et inverst system af enten tychonoffrum, regulære rum eller hausdorffrum. Da er $\underleftarrow{\lim}\, S$ respektivt et tychonoffrum, et regulært rum eller et hausdorffrum.

Bevis: Sætningen følger af at de nævnte egenskaber bevares under delrumsdannelse og produktrumsdannelse, jvf. [Engelking, T.2.3.11 og T.2.1.6]. □

Da $\underleftarrow{\lim}\, S$ af et inverst system S er en delmængde af produktrum kan man på naturlig vis definere projektionsafbildninger fra $\underleftarrow{\lim}\, S$ ud til hvert topologisk rum i systemet.

Def 5.3: Lad $S = \{X_\sigma, \pi_\rho^\sigma, \Sigma\}$ være et inverst system af topologiske rum og lad $X = \underleftarrow{\lim}\, S$. Betragt projektionen $p_\sigma : \prod_{\sigma\in\Sigma} X_\sigma$ og lad $\pi_\sigma = p_\sigma|_X$. Da siges π_σ

at være *projektionen af grænsen af S på X_σ*. Fuldstændigt tilsvarende defineres projektionerne af grænsen af kompakte par. □

Bemærkning 5.4: Det ses straks at π_σ er kontinuert for alle $\sigma \in \Sigma$ og yderligere ses at for hvert $\sigma \leqslant \rho$ er $\pi_\sigma = \pi_\sigma^\rho \pi_\rho$. □

Projektionsafbildningerne inducerer en basis for $\varprojlim S$ som følger:

Sætning 5.5: Med betegnelser som ovenfor og Σ' en koendelig delmængde i Σ er

$$\mathfrak{B} = \left\{ \pi_\sigma^{-1}(U_\sigma) | \sigma \in \Sigma' \wedge U_\sigma \in \mathfrak{T}(X_\sigma) \right\}$$

en basis for topologien på $X = \varprojlim S$. Ydermere, er $\mathfrak{B}_\sigma$ en basis for X_σ for hvert $\sigma \in \Sigma'$ er

$$\mathfrak{B}' = \{ \pi_\sigma^1(U_\sigma) | \sigma \in \Sigma' \wedge U_\sigma \in \mathfrak{B}_\sigma \}$$

ligeledes en basis for X. Tilsvarende resultater gælder for inverse systemer af kompakte par, idet nedenstående bevis kan overføres med meget små ændringer.

Bevis: Da π_σ er kontinuert for hvert $\sigma \in \Sigma$ er elementerne i $\mathfrak{B}$ åbne i X. Lad nu $U \neq \emptyset$ være en åben mængde i X og lad $x = (x_\sigma) \in X$ være givet. Da X er et delrum af $\prod_{\sigma \in \Sigma} X_\sigma$ findes der en åben mængde $V \subseteq \prod_{\sigma \in \Sigma} X_\sigma$ så $U = X \cap V$. Videre, da $\prod_{\sigma \in \Sigma} X_\sigma$ er udstyret med produktrumstopologien findes der $\sigma_1, \ldots, \sigma_k \in \Sigma$, hvor $k \in \mathbb{N}$, og $U_i \in X_{\sigma_i}, i = 1, \ldots, k$ så

$$x \in p_{\sigma_1}^{-1}(U_1) \cap \cdots \cap p_{\sigma_k}^{-1}(U_k) \subseteq V$$

Da nu ordenen på Σ er opad filtrerende og da Σ' er koendelig i Σ findes der et $\sigma \in \Sigma'$ således at $\sigma_i \leqslant \sigma$ for alle $i = 1, \ldots, k$. Sættes nu for hvert $\sigma \in \Sigma$

$$U_\sigma = \bigcap_{i=1}^{k} \left(\pi_{\sigma_i}^{\sigma} \right)^{-1} (U_i),$$

er U_σ en åben mængde i X_σ for hvert $\sigma \in \Sigma$, og da $\pi_{\sigma_i}^\sigma x_\sigma = x_{\sigma_i}$ for alle $i = 1, \ldots, k$ er $x_\sigma \in U_\sigma$. Videre er

$$\pi_\sigma^{-1}(\pi_{\sigma_i}^\sigma)^{-1}(U_i) = \pi_{\sigma_i}^{-1}(U_i) = X \cap p_{\sigma_i}^{-1}(U_i)$$

hvoraf

$$\begin{aligned} x \in \pi_\sigma^{-1}(U_\sigma) = \pi_\sigma^{-1} \left(\bigcap_{i=1}^{k} (\pi_{\sigma_i}^\sigma)^{-1}(U_i) \right) &= \bigcap_{i=1}^{k} \pi_\sigma^{-1}(\pi_{\sigma_i}^\sigma)^{-1}(U_i) \\ &= X \cap \bigcup_{i=1}^{k} p_{\sigma_i}^{-1}(U_i) \subseteq X \cap V = U \end{aligned}$$

Hermed er $x \in \pi_\sigma^{-1}(U_\sigma) \subseteq U$ hvormed det er bevist, at $\mathfrak{B}$ er en basis for X. At $\mathfrak{B}'$ ligeledes er en basis for X følger af egenskaber ved baser, se f.eks. [Engelking]. □

I forbindelse med systemer af kompakte par er det interessant at spørge om grænsen er et kompakt par. For at svare på det spørgsmål vises to sætninger:

Sætning 5.6: Lad $S = \{X_\sigma, \pi_\rho^\sigma, \Sigma\}$ være et inverst system af hausdorffrum. Da er $\varprojlim S \subseteq \prod_{\sigma\in\Sigma} X_\sigma$ en afsluttet delmængde.

Bevis: Sæt til hvert $\sigma \leqslant \rho \in \Sigma$

$$U_\sigma^\rho = \left\{ \{x_\tau\} \in \prod_{\tau\in\Sigma} X_\tau \,\middle|\, \pi_\sigma^\rho(x_\rho) = x_\sigma \right\}$$

Da er U_σ^ρ en afsluttet delmængde af $\prod X_\sigma$ for hvert $\sigma \leqslant \rho \in \Sigma$, jvf. [Engelking, T.1.5.4]. Det er nu klart at

$$\varprojlim S = \cap_{\sigma\leqslant\rho} U_\sigma^\rho$$

følger det at $\varprojlim S$ er afsluttet i $\prod_{\sigma\in\Sigma} X_\sigma$. $\square$

Da en vilkårlig produktmængde af kompakte mængder er kompakte og da en afsluttet delmængde af en kompakt mængde er kompakt er $\varprojlim S$ kompakt hvis S er et inverst system af kompakte mængder, jvf. [Engelking, T.3.1.2. og T.3.2.4][4]. Der gælder videre:

Sætning 5.7: Lad $S = \{X_\sigma, \pi_\sigma^\rho, \Sigma\}$ være et inverst system og lad $X = \varprojlim S$. Er nu $A \subseteq X$ og sættes $A_\sigma = \pi_\sigma(A)$ og $\tilde{\pi}_\rho^\sigma = \pi_\rho^\sigma|_{\overline{A}_\rho}$ er

$$S_A = \{\overline{A}_\sigma, \tilde{\pi}_\rho^\sigma, \Sigma\}$$

et inverst system med $\varprojlim S_A = \overline{A} \subseteq X$.

Bevis: Bemærk først at sætningen er triviel sand hvis $A = \emptyset$. I resten af beviset antages at dette ikke at være tilfældet.

Nu skal vi vise, at S_A er et inverst system. Er $x \in A$ og $\sigma \leqslant \rho \in \Sigma$ haves

$$\tilde{\pi}_\sigma^\rho(\overline{A}_\rho) = \tilde{\pi}_\sigma^\rho(\pi_\rho(\overline{A})) \subseteq \overline{\tilde{\pi}_\sigma^\rho \pi_\rho(A_\rho))} = \overline{\pi_\sigma(A) = \overline{A}_\sigma},$$

da $\pi_\sigma(x) = \tilde{\pi}_\sigma^\rho \pi_\rho(x)$. Hermed er S_A et inverst system da $\tilde{\pi}_\sigma^\rho : \overline{A}_\rho \to \overline{A}_\sigma$.

Det er oplagt at $\varprojlim S_A \subseteq X$ da enhver tråd i $\prod \overline{A}_\sigma$ oplagt er en tråd i $\prod X_\sigma$. Det ønskes nu vist at $\varprojlim S_A$ er et afsluttet underrum af X[5]. Lad derfor et $x = (x_\sigma) \in X \setminus \varprojlim S_A$ være givet. Da findes der et $\sigma_0 \in \Sigma$ så $x_{\sigma_0} \in X \setminus \overline{A}_{\sigma_0}$, thi ellers ville $x \in \varprojlim S_A$. Følgeligt er $\pi_{\sigma_0}^{-1}(X_{\sigma_0} \setminus \overline{A})$ en omegn omkring x, der så er disjunkt fra $\varprojlim S_A$. Følgeligt er $\varprojlim S_A$ afsluttet i X.

Fra definitionen er det nu oplagt at $A \subseteq \varprojlim S_A$ hvorfor $\overline{A} \subseteq \varprojlim S_A$. Tilbage står det at vise den modsatte inklusion. Lad derfor $x = (x_\sigma) \in X$ være givet. Af sætning 5.5 haves at

$$\mathfrak{B} = \{\pi_\sigma^{-1}(U_\sigma) | \sigma \in \Sigma \wedge x \in U_\sigma \in \mathcal{T}(X_\sigma)\}$$

[4]Det er nødvendigt at kikke på beviserne til sætningerne i [Engelking], da Engelking har defineret kompakte rum til også at være hausdorffrum.

[5]Dette følger ikke af sætning 5.6 da X_σ'erne ikke nødvendigvis er hausdorffrum.

er en omegnsbasis til x. Følgeligt må ethvert element $\pi_\sigma^{-1}(U_\sigma) \in \mathfrak{B}$ opfylde $U_\sigma \cap \overline{A}_\sigma \ni x_\sigma$. Heraf må $A_\sigma \cap U_\sigma \neq \emptyset$ dvs. at $A \cap \pi_\sigma^{-1}(U_\sigma) \neq \emptyset$. Følgeligt er $x \in \overline{A}$, som ønsket. $\square$

Nu vender vi blikket mod afbildninger mellem inverse systemer.

Def 5.8: Lad $S = \{X_\sigma, \pi_\sigma^\rho, \Sigma\}$ og $S' = \{Y_{\sigma'}, \pi_{\sigma'}^{\rho'}, \Sigma'\}$ være inverse systemer af topologiske rum. En *afbildning af S ind i S'* er en familie $\{\varphi, f_{\sigma'}\}$ bestående af en ikke-aftagende funktion $\varphi : \Sigma' \to \Sigma$ således at $\varphi(\Sigma')$ er koendelig i Σ, og af kontinuerte afbildninger $f_{\sigma'} : X_{\varphi(\sigma')} \to Y_{\sigma'}$ for hvert $\sigma' \in \Sigma'$ således at for $\rho' > \sigma'$

$$\pi_{\sigma'}^{\rho'} f_{\rho'} = f_{\sigma'} \pi_{\sigma'}^{\rho'}.$$

Ovenstående kan udtrykkes ved at følgende diagram kommuterer for hvert $\sigma' \leqslant \rho'$, hvor $\sigma', \rho' \in \Sigma'$:

$$(11) \qquad \begin{array}{ccc} X_{\varphi(\rho')} & \xrightarrow{f_{\rho'}} & Y_{\rho'} \\ \Big\downarrow \pi_{\varphi(\sigma')}^{\varphi(\rho')} & & \Big\downarrow \pi_{\sigma'}^{\rho'} \\ X_{\varphi(\sigma')} & \xrightarrow[f_{\sigma'}]{} & Y_{\sigma'} \end{array}$$

Lad nu $X = \varprojlim S$ og $Y = \varprojlim S'$. Betragt en given tråd $x = (x_\sigma) \in S$ og lad $\sigma' \in \Sigma'$. Sæt

$$y_{\sigma'} = f_{\sigma'}(x_{\varphi(\sigma')}).$$

Da kaldes $f_\infty = \varprojlim\{\varphi, f_{\sigma'}\} : X \to Y$ givet ved $f_\infty(x) = \{y_{\sigma'}\}$ for *grænseafbildningen induceret af* $\{\varphi, f_{\sigma'}\}$. $\square$

Bemærkning 5.9: Med ovenstående betegnelser er grænseafbildningen f_∞ af $\{\varphi, f_{\sigma'}\}$ en kontinuert afbildning af X ind i Y:

Først vises at $(y_{\sigma'}) = (f_{\sigma'}(x_{\varphi(\sigma')}))$ er en tråd i S' for givet $x = (x_\sigma) \in X$. Lad $\sigma', \rho' \in \Sigma'$ være givne så $\sigma' \leqslant \rho'$. Da haves af (11) at

$$\pi_{\sigma'}^{\rho'}(y_{\rho'}) = \pi_{\sigma'}^{\rho'} f_{\rho'}(x_{\varphi(\rho')}) = f_{\sigma'} \pi_{\varphi(\sigma')}^{\varphi(\rho')}(x_{\varphi(\rho')}) = f_{\sigma'}(x_{\varphi(\sigma')}) = y_{\sigma'},$$

hvor næstsidste lighedtegn følger af, at (x_σ) er en tråd.

For at vise at f_∞ er kontinuert er det ifølge sætning 5.5 nok at vise, at urbilledet under f_∞ af mængder af typen $\pi_{\sigma'}^{-1}(U_{\sigma'})$, hvor $U_{\sigma'}$ er en åben delmængde af $X_{\sigma'}$, er åben i X. Er igen $x = (x_\sigma) \in X$ er

$$\pi_{\sigma'} f_\infty(x) = f_{\sigma'}(x_{\varphi(\sigma')}) = f_{\sigma'} \pi_{\varphi(\sigma')}(x),$$

hvoraf

$$f_\infty^{-1} \pi_{\sigma'}^{-1}(U_{\sigma'}) = \pi_{\varphi(\sigma')}^{-1} f_{\sigma'}^{-1}(U_{\sigma'}),$$

er åben da $f_{\sigma'}$ og $\pi_{\varphi(\sigma')}$ er kontinuerte. Følgeligt er $f_\infty : X \to Y$ kontinuert. $\square$

Ofte anvendes ovenstående hvor S' blot består af ét eneste rum eller par:

Eksempel 5.10: Lad (X, A) være et kompakt par og lad (X_σ, A_σ) være kompakte delrum for hvert $\sigma \in \Sigma$, hvor Σ er en passende præordnet, opad filtrerende mængde. Antag at $(X_\sigma, A_\sigma) \subseteq (X_\rho, A_\rho)$ netop hvis $\sigma \leqslant \rho$. Lad p_ρ^σ betegne projektionen af X_ρ på X_σ når $\sigma \leqslant \rho$. Da er $S' = \{(X_\sigma, A_\sigma), p_\rho^\sigma, \Sigma\}$ et inverst system af kompakte par. Betragt ligeledes $S = \{(X, A), id_X, \{0\}\}$ der også er et inverst system af kompakte par. Sættes $\varphi : \Sigma \to \{0\}$ til $\forall \sigma \in \Sigma : \varphi(\sigma) = 0$ og sættes $f_\sigma : (X, A) \to (X_\sigma, A_\sigma)$ haves en afbildning mellem inverse systemer af kompakte par. Følgeligt haves en grænseafbildning $f_\infty : (X, A) \to (X_\infty, A_\infty)$ hvor $(X_\infty, A_\infty) = \lim\limits_{\leftarrow} S$. $\square$

6 Simplekser og komplekser

I dette afsnit vil jeg beskæftige mig lidt med simplekser, komplekser og dimension. Når det er interessant skyldes det ønsket om at approksimere generelle rum, f.eks. ved et inverst system, med pæne rum og triangulering er vigtig i denne forbindelse. Vi starter helt fra bunden med definition af simplekser og (endelige) komplekser. Der er ikke noget pincipielt i vejen for at definere uendelige komplekser, men jeg får ikke brug for det her.

Def 6.1: Lad A være en mængde med $n+1$ elementer, hvis elementer jeg vil kalde *hjørner*. Betragt mængden

$$\mathcal{A} = \left\{ \alpha : A \to I \,\middle|\, \sum_{a \in A} \alpha(a) \leqslant 1 \right\}.$$

Da kaldes A sammen med $\mathcal{A}$ et *n-simpleks* eller blot et *simpleks* $S = \{A, \mathcal{A}\}$. Til tider træder $\mathcal{A}$ i baggrunden, da A inducerer $\mathcal{A}$. Således skrives $S = \{A\}$, se også def. 6.3. Funktionerne i $\mathcal{A}$ kaldes *punkter* i A. Ethvert punkt α er fuldstændigt beskrevet ved dets værdier på A; disse kaldes for de *barycentriske koordinater*; dette begreb stammer fra simplekser i euklidiske rum.

Er α, β punkter i S kaldes

$$\rho(\alpha, \beta) = \sqrt{\sum_{a \in A} (\alpha(a) - \beta(a))^2}$$

for *afstanden* eller *distancen* mellem α og β. Mængden af punkter sammen med denne afstand kaldes *rummet* af S, eller den *geometriske realisation* af S, skrevet $|S| = \{\mathcal{A}, \rho\}$. De punkter $\alpha \in |S|$ hvor $\alpha(a) = 1$ for et hjørne $a \in A$ kaldes *hjørner* i $|S|$.

Er $B \subsetneq A$ en ægte delmængde af A med $m+1 < n+1$ elementer kaldes B sammen med de punkter α i B, som opfylder $\forall a \in A \setminus B : \alpha(a) = 0$, for *en m-side i S*. Antag at $T = (B, \mathcal{B})$ er en m-side i S. Når m ikke er nærmere specificeret skrives ofte blot, at T er en side i S. Bemærk at der ikke skelnes mellem en side T og et simpleks T.

Er $<$ en total ordning på A kaldes $S = \{A, \alpha, <\}$ et *ordnet simpleks.* Ofte skrives dette som $A = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$ hvor det underforstås, at $a_0 < a_1 < \cdots < a_n$. Sættes $f : A \to \mathbb{R}^{n+1}$ til

$$f(\alpha) = (\alpha(a_0), \alpha(a_1), \ldots, \alpha(a_n))$$

kaldes f den *kanoniske indlejring* af S i $\mathbb{R}^{n+1}$. Billedet af f kaldes *enhedssimplekset* i $\mathbb{R}^{n+1}$, skrevet Δ^n.

Nu er *randen* af $|\partial S|$ det delrum af S, hvor hvert punkt α opfylder $\alpha(a) = 0$ for mindst ét $a \in A$. Det *indre* af $|S|$, også kaldet det *åbne simpleks* $|\mathring{S}|$ er delrummet $|S| \setminus |\partial S|$ af $|S|$. □

Der hører en lille sætning til ovenstående definition der godtgør de navne, der er valgt:

Sætning 6.2: Rummet af et givet n-simpleks S er et metrisk rum og f er en isometrisk indlejring. $|S| = \{A, \mathcal{A}, \rho\}$ er kompakt og ligeså er Δ^n.

Bevis: At ρ er en metrik er let at vise og det overlades til læseren. Bemærk $f(S)$ er en lukket mængde; dette kan indses ved at betragte $f(S)$ som et snit mellem enhedskuglen i 1-normen $||\cdot||_1$ og de punkter i $\mathbb{R}^{n+1}$ hvis koordinater er positive. Da $f(S)$ er indeholdt i omtalte enhedskugle må $f(S) = \Delta^n$ da være kompakt.

Lad nu $\alpha, \beta \in |S|$ være givet. Da er

$$\begin{aligned} \|f(\alpha) - f(\beta)\| &= \|(\alpha(a_0) - \beta(a_0), \dots, \alpha(a_n) - \beta(a_n))\| \\ &= \sum_{a \in A} \sqrt{(\alpha(a) - \beta(a))^2} = \rho(\alpha, \beta), \end{aligned}$$

hvoraf f er isometrisk er dermed en indlejring. Specielt er $|S|$ kompakt. □

Ovenstående bemærkning godtgør i virkeligheden at det op til homeomorfi er tilstrækkeligt at betragte euklidiske simplekser. Nu til de endelige komplekser:

Def 6.3: Lad A være en endelig mængde og lad $K \subseteq \mathcal{P}(A)$ være en delmængde heraf. Da siges K at være et *endeligt kompleks over* A, eller blot et *endeligt kompleks* hvis $\forall B \in K \forall C \subseteq B : C \in K$. Som ved simplekser er *punkterne* i K funktioner $\alpha : A \to I$ som opfylder følgende betingelser:

1. $\sum_{a \in A} \alpha(a) = 1$,
2. $\{a \in A | \alpha(a) > 0\} \subseteq K$.

Bemærk at ethvert simpleks også er et kompleks. Er $B \in K$ siges $\{B\}$ at være et *simpleks i* K. Ved et vist misbrug af notation skrives ofte $S \in K$, hvor S et simpleks, istedet for $S = \{B\}, B \in K$.

Mængden af punkter i K sammen med førnævnte metrik ρ betegnes $|K|$, eller *realiseringen* af K. Som ved simplekser kaldes de punkter $\alpha : A \to I$ hvor $\alpha(a) = 1$ for et passsende $a \in A \in K$ for *hjørner* i $|K|$. Er nu L et andet endeligt kompleks hvor $K \subseteq L$ siges K at være et *delkompleks* eller et *subkompleks* af L hvis L er et kompleks. Bemærk at punkterne i L på naturlig vis kan udvides til punkter i K og at punkter i L, der forsvinder udenfor K kan restringeres til K.

Endeligt siges K at være et *endeligt* n*-kompleks* hvis ingen mængde i K indeholder mere end $n + 1$ elementer. □

Ethvert endeligt kompleks er et underkompleks til et simpleks:

Lemma 6.4: Ethvert endeligt kompleks K er et underkompleks til et mindste simpleks $S = \{A\}$.

Bevis: Sæt $A = \bigcup_{B \in K} B$. $\square$

Lemma 6.5: Lad K være et kompleks og lad $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$ være punkter i K. Antag at $\omega_0, \ldots, \omega_1 \in I$ er tal så $\sum_{i=1}^n \omega_i = 1$. Da er $\alpha = \sum_{i=0}^n \omega_i \alpha_i \in |K|$ hvis og kun hvis $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$ er punkter i (samme) simpleks i K. Specielt, hvis K er et simpleks er $\alpha \in |K|$.

Bevis: Antag at $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$ alle tilhører et simpleks $S \in K$, dvs. at $\forall i \forall a \notin S$: $\alpha_i(a) = 0$. Følgelig opfylder α 1. betingelse fra def. 6.3. Betegner $\{a_0, \ldots, a_m\}$ nu mængden af hjørner i K, hvor $m \in \mathbb{N}$ vil

$$\sum_{j=0}^{m} \alpha(a_j) = \sum_{j=0}^{m} \sum_{i=0}^{n} \omega_i \alpha_i(a_j) = \sum_{i=0}^{n} \omega_i \sum_{j=0}^{m} \alpha_i(a_j) = \sum_{i=0}^{n} \omega_i = 1.$$

hvoraf $\alpha \in |K|$, som ønsket.

Antag nu at $\alpha \in |K|$. Da vil der findes et S så $\alpha \in |S|$. Men da $\alpha = \sum_{i=0}^n \omega_i \alpha_i$ hvor $\omega_i \in I$ for alle i må $\alpha_i \in |S|$ for alle $i = 0, \ldots, n$. $\square$

Som så mange andre konstruktioner i dette speciale defineres der specielle afbildninger mellem komplekser, der fungerer som f.eks. lineare afbildninger mellem vektorrum:

Def 6.6: Lad K, L være endelige komplekser og lad $f : |K| \to |L|$ være en afbildning der opfylder følgende: Lad for givet $n \in \mathbb{N}$ $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$ være givne punkter i $|K|$ og $\omega_0, \ldots, \omega_n \in I$ med $\sum_{i=0}^n \omega_i =_1$ være givet. Sæt

$$\alpha = \sum_{i=0}^{n} \omega_i \alpha_i \in |K|$$

Da siges f at være *linear* hvis

$$f(\alpha) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i f(a_i)$$

for givne $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_i \in |K|$ og $\omega_i \in I$ som ovenfor. Desuden siges f at være *simpleks* hvis f afbilder hjørner fra $|K|$ til hjørner i $|L|$.

Er nu L et underkompleks af K og L' et underkompleks af K' skrives, at $f : (K, L) \to (K', L')$ er en simpleks [linear] afbildning, når $f : (|K|, |L|) \to (|K|', |L|')$ en en afbildning som inducerer en simpleks [linear] afbildning af $|K|$ til $|K'|$. $\square$

Der knytter sig en vigtig sætning til ovenstående definition af lineare og simplekse afbildninger:

Sætning 6.7: Lad L, L' være underkomplekser af respektivt K, K'. En linear afbildning $f : (K, L) \to (K', L')$ er entydigt bestemt ved værdierne på hjørnerne i $|K|$. En afbildning φ af hjørnerne i $|K| \to |K'|$ kan udvides til en afbildning $f : (K, L) \to (K', L')$ netop hvis

1. φ afbilder hjørnerne fra $|S|$ ind i $|S'|$, hvor $S \in K$ og $S' \in K'$ er simplekser,

2. φ afbilder ethvert simpleks i L ind i et simpleks i L'.

Endeligt, hvis φ afbilder hjørner i hjørner er f simpleks.

Bevis: Antag at $\alpha \in |K|$ og at $S = \{a_0, \dots, a_n\}$ er et simpleks i K, hvis realisering indeholder α. Sæt til hvert $i = 0, \dots, n$

$$A_i(a) = \begin{cases} 1 & \text{for } a = a_i, \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}.$$

Bemærk at A_i'erne er hjørner i $|K|$. Da $\alpha(a) = 0$ når $a \notin S$ følger det at α kan skrives som

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} \alpha(a_i) A_i,$$

hvorefter, da f er linear, det haves at

$$f(\alpha) = \sum_{i=1}^{n} \alpha(a_i) f(A_i).$$

Således er det tilstrækkeligt at kende værdierne af f på hjørnerne i $|K|$ for at kunne bestemme værdien af f på et vilkårligt punkt i $|K|$. Ydermere, hvis $\{f(A_i) | i = 0, \dots, n\} \subseteq |S'|$ for et passende simpleks i $|K'|$ vil $f(\alpha)$ ligge i $|K'|$ ifølge lemma 6.5 da $\sum_{i=1}^{n} \alpha(a_i) = 1$. Tilsvarende, hvis α ligger i et simpleks fra L vil f's billede ligge i $|L'|$, hvorved „kun hvis"-delen af udvidelsen af φ er vist. For at vise „hvis"-delen antages, at φ opfylder betingelserne og at α er givet som en sum

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} \alpha(a_i) A_i$$

hvor $S = \{a_0, \dots, a_n\}$ er et passende simpleks i K og A_i'erne er givne som før. Nu defineres

$$f(\alpha) = \sum_{i=1}^{n} \alpha(a_i) \varphi(A_i)$$

Dette definerer oplagt en linear afbildning $f : (K, L) \to (K', L')$. Den sidste bemærkning i sætningen er triviel. $\square$

En vigtig anvendelse af simplekser er indeholdt i følgende definition, der relaterer (kompakte) par til et simpleks:

Def 6.8: Givet et par (X, A) hvor X er et topologisk rum og A en delmængde heraf, er en *triangulering* $T = \{t, (K, L)\}$ af (X, A) et simplekst par (K, L) og en homeomorf afbildning

$$t : (|K|, |L|) \to (X, A).$$

Parret (X, A) med trianguleringen T kaldes et *triangulerbart par*. Omvendt, hvis der findes en triangulering til et givet par (X, A) af topologiske rum siges (X, A) at være *triangulerbart*.

Da t er en homeomorfi kan begreber fra $|K|$ direkte overføres til (X, A); f.eks. giver den efterfølgende def. 6.9 et nyt kompleks $\operatorname{Sd} K$ ud fra et gammelt hvis hjørner er punkter i $|K|$. Følgeligt kan $\operatorname{Sd} K$ opfattes som en punktmængde i X, hvoraf det giver mening at skrive $\operatorname{Sd} T$. $\square$

Når ovenstående tilknytning er etableret kan simplekset, der betragtes, „forfines" ved barycentrisk deling. Dette begreb er ikke relateret til barycentrisk forfining af en brolægning i et topologisk rum, som i def. 2.1.

Def 6.9: Lad K være et endeligt kompleks, og lad $\{A\}$ være et simpleks i K med $A = \{a_0, \dots, a_n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Betragt punktet $b_S \in \mathcal{A}$ givet ved

$$b_S = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n+1} A_i,$$

hvor A_i er givet som i beviset for sætning 6.7. Nu danner vi et andet kompleks $\operatorname{Sd} K$ ud fra K[6]: Sæt

$$B = \{b_S | S \text{ er simpleks i } K\},$$

og vælg $\operatorname{Sd} K \subseteq \mathcal{P}(B)$ som følger: $C \in \operatorname{Sd} S$ netop hvis der findes en følge $S_0, S_1, \dots, S_m$ af simplekser fra K således at

1. $\forall i = 0, \dots, m-1 : S_i$ er en side i S_{i+1},
2. $C = \{B_{S_0}, B_{S_1}, \dots, B_{S_m}\}$.

$\square$

Lemma 6.10: Antag, at K er et n-kompleks. Da er $\operatorname{Sd} K$ et n-kompleks.

Bevis: Dette følger direkte af konstruktionen i def. 6.9, da følgen $S_0, \dots, S_m$ fra definitionen ikke kan have m større end n, hvor S_m er et n-simpleks. $\square$

Def 6.11: Lad $T = (t, K)$ være en triangulering af et metrisk rum X. Da er $\operatorname{mesh} T$ givet som

$$\operatorname{mesh} T = \max\{\operatorname{diam} t(|S|) | S \in K \text{ er et simpleks}\}$$

$\square$

Def 6.12: Lad $T = (t, K)$ være en triangulering af et rum X. For et givet $n \in \mathbb{N}$ er en homeomorfi $f : X \to U \subseteq \mathbb{R}^n$ en *linear indlejring af X i $\mathbb{R}^n$ (relativt til T)* hvis $f \circ t$ er linear i følgende forstand: Lad $\alpha \in |K|$ være givet og skriv $\alpha = \sum_{i=0}^{m} \alpha(a_i) A_i$ som i beviset for sætning 6.7. Da er $f \circ t$ linear hvis $f \circ t(\alpha) = \sum_{i=0}^{m} \alpha(a_i) f \circ t(A_i)$.

Hvis f er en linear indlejring kaldes afstandsfunktionen ρ givet ved

$$\rho(\underline{x}, \underline{y}) = \|f(\underline{x}) - f(\underline{y})\|$$

en linear metrik. Bemærk at dette faktisk er en metrik på $f \circ t(|K|)$. $\square$

Lemma 6.13: Ethvert rum X med en triangulering $T = \{t, K\}$ har en linear indlejring. Specielt har X en linear metrik.

[6] „Sd" står for „subdivision".

Bevis: Ifølge lemma 6.4 er K et underkompleks af et q-simpleks S. Lad $l : |S| \to \mathbb{R}^{q+1}$ være den kanoniske indlejring fra def. 6.1. Da er $f = l \circ t^{-1}$ en linear indlejring, da $f \circ t = l$ da t er en homoemorfi. Følgeligt har X en linear metrik. □

De næste tre lemmaer skal bruges til at vise en sætning der er essentiel i beviset for sætning 7.5.

Lemma 6.14: Lad $q, n \in \mathbb{N}$ og lad $\underline{q}_0, \dots, \underline{q}_n \in \mathbb{R}^q$ være givet. Betragt mængden

$$C = C(\underline{q}_0, \dots, \underline{q}_n) = \left\{ \sum_{i=0}^{n} \omega_i \underline{q}_i \,\middle|\, \omega_0, \dots, \omega_n > 0 \wedge \sum_{i=0}^{n} \omega_i = 1 \right\}$$

Da er $\operatorname{diam} C = \operatorname{diam}\{q_0, \dots, q_n\}$.

Bevis: Lad $\underline{x}, \underline{y} \in C$. Da er for passende $\omega_0, \dots, \omega_n > 0$ med $\sum_{i=1}^{n} \omega_i = 1$

$$\begin{aligned}(12) \quad \|\underline{y} - \underline{x}\| &= \left\| \underline{y} \sum_{i=0}^{n} \omega_i - \sum_{i=0}^{n} \omega_i \underline{q}_i \right\| = \left\| \sum_{i=0}^{n} \omega_i \left(\underline{y} - \underline{q}_i \right) \right\| \\ &\leqslant \sum_{i=0}^{n} \omega_i \left\| \underline{y} - \underline{q}_i \right\| \leqslant \left(\max_i \|\underline{y} - \underline{q}_i\| \right) \sum_{i=0}^{n} \omega_i = \max_i \|\underline{y} - \underline{q}_i\|,\end{aligned}$$

hvoraf der findes et $i, j \in \{0, \dots, n\}$ så

$$\|\underline{x} - \underline{y}\| \leqslant \|\underline{q}_i - \underline{y}\| \leqslant \|\underline{q}_i - \underline{q}_j\|$$

hvoraf lemmaet følger. □

Lemma 6.15: Lad $n, q \in \mathbb{N}$ og $\underline{p}_0, \dots, \underline{p}_n \in \mathbb{R}^q$ være givet. Sæt for givet $j \leqslant n$

$$\underline{b} = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} \underline{p}_i \text{ og } \underline{b}' = \frac{1}{j+1} \sum_{i=0}^{j} \underline{p}_i.$$

Da er

$$\|\underline{b} - \underline{b}'\| \leqslant \frac{n}{n+1} \operatorname{diam}\{\underline{p}_0, \dots, \underline{p}_n\}$$

Bevis: Af (12) i beviset for lemma 6.14 haves $\|\underline{b} - \underline{b}'\| \leqslant \|\underline{b} - \underline{p}_j\|$ for passende j, da $b_j \in C$ idet $(j+1) \cdot \frac{1}{j+1} = 1$. Følgeligt haves

$$\begin{aligned}(13) \quad \|\underline{b} - \underline{b}'\| \leqslant \|\underline{b} - \underline{p}_j\| &= \left\| \left(\frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} \underline{p}_i \right) - \underline{p}_j \right\| = \frac{1}{n+1} \left\| \sum_{i=0}^{n} (\underline{p}_i - \underline{p}_j) \right\| \\ &\leqslant \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} \|\underline{p}_i - \underline{p}_j\| \leqslant \frac{n}{n+1} \operatorname{diam}\{\underline{p}_0, \dots, \underline{p}_n\},\end{aligned}$$

som ønsket. □

Lemma 6.16: Lad X være et rum med en metrik der er linear med hensyn til en triangulering $T = \{t, K\}$, hvor K er et n-kompleks. Da er

$$(14) \quad \operatorname{mesh} \operatorname{Sd} T \leqslant \frac{n}{n+1} \operatorname{mesh} T,$$

se evt. def. 6.11.

Bevis: Lad $S \in K$ være et simpleks i K, og antag at $S = \{a_0, \dots, a_m\}$ for et passende $m \in \mathbb{N}$. Sæt som før A_i til at være indikatorfunktionen på a_i, hvorefter $t(|S|)$ kan skrives som

$$t(|S|) = \left\{ t\left(\sum_{i=0}^{m} \omega_i A_i\right) \middle| \forall i : \omega_i \in I \wedge \sum_{i=0}^{m} \omega_i = 1 \right\}.$$

Da metrikken på X er givet som $\rho(x,y) = \|f(x) - f(y)\|$, hvor $f : X \to \mathbb{R}^q$ er funktionen fra def. 6.6, haves hvis $A \subseteq X$, at

$$\begin{aligned}\operatorname{diam} A = \sup_{x,y \in A} \rho(x,y) = \sup_{x,y \in A} \|f(x) - f(y)\| \\ = \sup_{f(x),f(y) \in f(A)} \|f(x) - f(y)\| = \operatorname{diam} f(A).\end{aligned}$$

Til hvert $i = 0, \dots, m$ sættes nu $\underline{p}_i = ft(A_i)$, hvorefter

$$f(t(|S|)) = \left\{ \sum_{i=0}^{m} \omega_i ft(A_i) \middle| \forall i : \omega_i \in I \wedge \sum_{i=0}^{m} \omega_i = 1 \right\} = C(\underline{p}_0, \dots, \underline{p}_m),$$

idet lineariteten af ft er udnyttet og $C(\underline{p}_0, \dots, \underline{p}_m)$ er defineret i lemma 6.14. Nu giver lemma 6.14 at $\operatorname{diam} t(|S|) = \operatorname{diam}\{\underline{p}_0, \dots, \underline{p}_m\}$.

Betragtes nu $\operatorname{Sd} T = \{\operatorname{Sd} K, t\}$ finder man på samme vis, at

$$\begin{aligned}\operatorname{diam} t(\operatorname{Sd} K) &= \operatorname{diam}\left\{ \frac{1}{1+0} \sum_{i=0}^{m} ft(A_i), \dots, \frac{1}{1+m} \sum_{i=0}^{m} ft(A_i) \right\} \\ &= \operatorname{diam}\left\{ \frac{1}{1+0} \sum_{i=0}^{m} \underline{p}_i, \dots, \frac{1}{1+m} \sum_{i=0}^{m} \underline{p}_i \right\},\end{aligned}$$

og videre finder man via lemma 6.15, at

$$\begin{aligned}\operatorname{diam} t(\operatorname{Sd} K) &\leqslant \frac{m}{m+1} \operatorname{diam}(\underline{p}_0, \dots, \underline{p}_n) \\ &= \frac{m}{m+1} \operatorname{diam} t(|K|),\end{aligned}$$

Da S var valgt vilkårligt følger lemmaet, idet det bemærkes, at da K var et n-kompleks er $m \leqslant n$ for hvert $S \in K$. $\square$

Sætning 6.17: Lad (K,t) være en triangulering af et metrisk rum X. Sættes

$$^{i}T = \underbrace{\operatorname{Sd} \operatorname{Sd} \cdots \operatorname{Sd} T}_{i \text{ gange}},$$

haves

$$\lim_{i \to \infty} \operatorname{mesh} {}^{i}T = 0$$

Bevis: Bemærk at da $|K|$ er homeomorft med en afsluttet delmængde af et Δ^q for et passende $q \in \mathbb{N}$ og da Δ^q er en begrænset delmængde af $\mathbb{R}^q$

er $|K|$ kompakt. Følgelig er X kompakt, hvorfor ovenstående grænseværdi er uafhængig af valg af metrik, forudsat at grænsen virkeligt er 0. Da X har en linear metrik ifølge lemma 6.13 giver lemma 6.16 at grænseværdien er 0 i denne metrik og dermed følger lemmaet. $\square$

7 Approksimation af kompakte par

Et interessant specialtilfælde af det generelle tilfælde er approximation af såkaldt *kompakte par*: Inden vi skrider til selve approksimationen er der en del teknik der først skal bringes på plads. I første række skal der skaffes en passende klasse af rum der kan bruges til approximationen. Dertil betragtes følgende, hvorefter der vises et lemma:

Def 7.1: Lad A være en vilkårlig mængde og betragt $I^A = [0;1]^A$. Da er I^A *tychonoffterningen indekseret ved* A. Ofte træder A i baggrunden således at der blot tales om en terning $Q = I^A$. Bemærk at elementerne i Q er funktioner $f : A \to I$, som ofte skrives på formen $\{x_a\}_{a \in A}$, hvad der er normalt ved produktrum. Som det ligeledes er almindeligt vil der ikke blive skelnet imellem I^n som defineret ovenfor og $I^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n | \max(x_1, \dots, x_n) \leqslant 1\}$.

Er nu $B \subseteq A$ dannes en *delterning* I^B ved at udvide elementerne $f : B \to I$ til $\tilde{f} : A \to I$ ved

$$\tilde{f}(a) = \begin{cases} f(a) \text{ hvis } a \in B, \\ 0 \text{ ellers.} \end{cases}$$

Tilsvarende, er $\{x_a\} = f : A \to I$ et element i I^A kaldes $f|_B$ *projektionen af* $\{x_a\}$ *på* I^B. Er A endelig siges I^A at være en *endelig terning.* $\square$

Tychonofffunktoren anvendt på et tychonoffrum X giver som vist i sætning 3.5 en homeomorfi af X ind i en delmængde af en tychonoffterning. Men der gælder en lille smule mere, nemlig følgende:

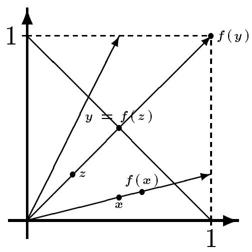
Sætning 7.2: Lad X være et tychonoffrum og lad $F \subseteq X$ være et afsluttet delrum heraf. Da findes der et afsluttet delterning $G \subseteq P(X)$ så $\tau : X \to P(X)$ og så $F = \tau(X) \cap G$.

Bevis: Betragt de funktioner $A \subseteq C(X, I)$, der ikke er identisk lig 0 på F. Da er $G = \Pi\{I_f | f \in A\}$ med $\forall f : I_f = I$ en delterning af $P(X)$. Er $x \in F$ er $f(x) = 0$ hvis $f \notin A$ hvoraf $\tau(F) \subseteq G$. Omvendt, er $y \notin F$ findes der en funktion f så $f(y) = 1$ og $f(F) = \{0\}$, da X er et tychonoffrum. Følgeligt er $\tau(y) \notin G$. Da $\tau : X \to P(X)$ er en homeomorfi ifølge sætning 3.5, er sætningen bevist. $\square$

Der følger nu to lemmaer der skal bruges til at vise dette afsnits hovedresultat, sætning 7.5. Det første lemma må siges at være intuitivt oplagt, omend beviset kræver lidt teknik:

Lemma 7.3: Lad Q være en endelig terning, og lad R være en delterning. Da er (Q, R) et triangulerbart par.

Bevis: Det kan antages uden indskrænkning at tegningen Q er I^n og R delterningen I^m hvor $n, m \in \mathbb{N}$ og $n \geqslant m$. Betragt nu en mængde $K = \{a_0, \dots, a_n\}$ og en anden mængde $L = \{a_0, \dots, a_m\}$. Det er ikke så vigtigt hvad a'erne er;



Figur 3: En homeomorf afbildning af et simpleks ind i en terning. Afbildningen virker ved at strække hyperplanet $\sum x_i = 1$ ud til terningens kant.

man kan, om man vil, forestille sig at $K = n+1$. Betragt $|K|$ og $|L|$. Vi ønsker nu en homeomorfi $t : (|K|, |L|) \to (I^n, I^m)$. Denne homeomorfi opnås ved at danne en homeomorfi mellem Δ^n og I^n som følger, idet jeg har prøvet at skitsere hvad det er der sker i figur 3. Betragt først mængden af linjer, der skærer origo. Bemærk at et givet punkt $x_0 \in \mathbb{R}^n$ skæres af netop én sådan linje l_{x_0}; dette gælder specielt hvis $x_0 \in \Delta^n$. Antag at $x_0 \in \Delta^n$ og betragt afstanden fra x_0 til origo $d_1 = \|x_0\|$. Da vil l_{x_0} skære hyperplanet $L = \{(x_1, \dots, x_n \,|\sum_{i=1}^n x_i = 1)\}$ i et punkt y_{x_0} idet $x_0 \in \Delta^n$. Sæt $d_2 = \|y_{x_0}\|$. Nu skærer l_{x_0} ∂I^n i et punkt $z_{x_0} \neq 0$, hvis afstand til origo benævnes $d_3 = \|z_{x_0}\|$. Endeligt sættes $f(x_0)$ til det punkt i $I^n \in l_{x_0}$ hvis afstand til origo er $\frac{d_1 d_3}{d_2}$.

Ovenstående definerer en afbildning $f : \Delta^n$. Det følger af entydigheden af linjen igennem et givet punkt og origo, at denne afbildning er veldefineret og injektiv. Det skulle også være klart at afbildningen er kontinuert og surjektiv, hvoraf det følger af [Engelking], at f er en homeomorfi. Det er ligeledes let at overbevise sig om, at f afbilder Δ^m på I^m, hvorfor f inducerer en triangulering af (I^n, I^m) via den kanoniske indlejring fra def. 6.1. $\square$

Det næste lemma er af noget mere teknisk karakter:

Lemma 7.4: Lad Q være en endelig terning, og lad R være en delterning heraf. Betragt en afsluttet delmængde F, og lad U være en åben delmængde så $F \subseteq U \subseteq Q$. Da findes der en delmængde Y så $F \subseteq \overset{\circ}{Y} \subseteq Y \subseteq U$ og så $(Y, Y \cap R)$ er triangulerbar.

Bevis: Lad T være en triangulering af (Q, R), idet en sådan findes ifølge lemma 7.3 og lad ${}^iT$ betegne den i'te barycentriske deling som i sætning 6.17. Da Q er normal kan der vælges en afsluttet delmængde $X \subseteq Q$ så $F \subseteq \overset{\circ}{X} \subseteq X \subseteq U$. Nu er $Q \setminus U$ og X afsluttede mængder hvoraf afstanden mellem disse er positiv, dvs. $d(Q \setminus U, X) = \inf\{d(x-y) | x \in Q \setminus U \wedge y \in X\} > 0$ hvor d betegner den sædvanlige metrik[7]. Da kan man ifølge sætning 6.17 vælge et $i \in \mathbb{N}$ så den i'te barycentriske underinddeling ${}^iT$ opfylder, at ethvert afsluttet simpleks i ${}^iT$ der skærer X, er indeholdt i U. Lad nu Y være foreningen af (billederne) af de afsluttede simplekser der skærer X. Da er Y og $Y \cap R$ oplagt triangulerbare med en triangulering, der (bl.a.) er et subkompleks til ${}^iT$. Nu er $X \subseteq Y$ hvoraf $F \subseteq Y$ da $F \subseteq \overset{\circ}{X}$. Dette viser lemmaet. $\square$

Her kommer så det lovede resultat. Denne sætning er selve fundamentet for

[7]Det er her essentielt at Q er kompakt.

anvendeligheden af inverse limes til beskrivelse af kompakt hausdorffrum.

Sætning 7.5: Ethvert kompakt par er homeomorft med en invers limes af et inverst system af triangulerbare kompakte par.

Bevis: Lad (X, A) være et kompakt par. Ifølge sætning 7.2 kan det antages at $X \subseteq I^\xi$, hvor ξ er en passende indeksmængde, og at $A = X \cap R$ hvor $R = I^\alpha$ er en delterning af I^ξ og $\alpha \subseteq \xi$. Lad nu til $p_a : I^\xi \to I^a$ være projektionen for hvert $a \subseteq \xi$. Betragt så mængden M der består af par $[a, N]$ der opfylder følgende krav:

(15) $a \subseteq \xi$ er endelig.

(16) $N \subseteq I^a$.

(17) $p_a X \subseteq \overset{\circ}{N}$ relativt til I^a.

(18) Parret $(N, N \cap R)$ er triangulerbart.

Betragt nu to givne elementer $m_1, m_2 \in M$ med $m_1 = [a_1, N_1]$ og $m_2 = [a_2, N_2]$. Da sættes $m_1 \leqslant m_2$ netop hvis betingelserne (19),(20) er opfyldt:

(19) $a_1 \subseteq a_2$.

(20) $p_{a_1} N_2 \subseteq N_1$.

Dette definerer en præordning på mængden M. Lad nu m_1, m_2 være givne som ovenfor og sæt

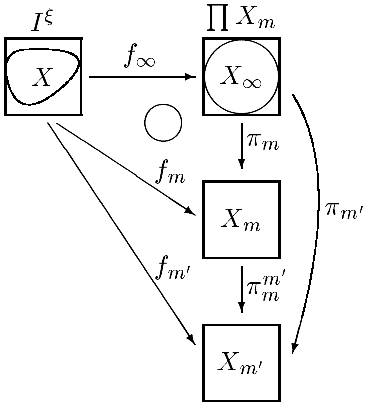
$$a = a_1 \cup a_2 \text{ og } B = I^a \cap p_{a_1}^{-1}(N_1) \cap p_{a_2}^{-1}(N_2).$$

Da haves af (17) at $p_a X \subseteq \overset{\circ}{B} \subseteq I^a$. Nu ønsker jeg at bruge lemma 7.4 til at finde et $N \subseteq I^a$ så $[a, N] \in M$. Bemærk at $p_a X$ er afsluttet, hvilket f.eks. følger af [Engelking, C.2.3.5] og af (15) der giver, at I^a er en endelig terning. Vælges $I^{a \cap \alpha}$ som delterningen i lemma 7.4 haves en endelig delterning af I^a. Lemma 7.4 giver nu en mængde N der umiddelbart opfylder (16) og (17). Ved at bemærke, at $N \subseteq I^a$ haves da videre at $N \cap R = N \cap I^{a \cap \alpha}$ hvoraf (18) også er opfyldt. Følgeligt haves til hvert par $m_1, m_2 \in M$ et $m \in M$ så $m_1, m_2 \leqslant m$, dvs. at præordenen på M er opad filtrerende. Hermed kan M bruges som indeksmængde i det inverse system $\{(X_m, A_m), \pi_{m_1}^{m_2}, M\}$ som nu skal konstrueres: Til hvert $m = [a, N] \in M$ sættes $(X_m, A_m) = (N, N \cap R)$, og til hvert $m_1 = [a_1, N_1] \in M$, $m_2 = [a_2, N_2] \in M$ med $m_1 \leqslant m_2$ sættes $\pi_{m_1}^{m_2}$ til afbildningen induceret af projektionen $p_{a_2} : I^\xi \to I^{a_1}$. Hermed haves et inverst system af kompakte par $\{(X_m, A_m), \pi_{m_1}^{m_2}, M\}$, se evt. def. 5.1. Lad nu

$$(X_\infty, A_\infty) = \varprojlim \{(X_m, A_m), \pi_{m_1}^{m_2}, M\}$$

og betragt til hvert $m \in M$ projektionen $f_m : (X, A) \to (X_m, A_m)$. Nu haves en grænseafbildning $f_\infty : (X, A) \to \varprojlim \{(X_m, A_m), \pi_{m_1}^{m_2}, M\}$, jvf. def. 5.8; se evt. figur 4. Det ønskes nu vist at f_∞ er en homeomorfi. Lad derfor $a \subseteq \xi$ være en endelig delmængde. Da $(I^a, I^{a \cap \alpha})$ er triangulerbar ifølge lemma 7.3 opfylder $[a, I^a]$ kravene (15)–(18) og er derfor et element i M[8]. For givet $x \in X_\infty$ og for

[8] I parentes bemærket godtgør dette også at M er tom netop når X er tom. I dette tilfælde er grænserummet også tomt hvorfor sætningen også gælder når $X = M = \emptyset$.



Figur 4: Det konstruerede inverse system (t.h.) og det oprindelige rum (t.v.) samt de afbildninger, der giver homeomorfien f_∞.

givet $a \subseteq \xi$ endelig sættes $x(a) = \pi_m(x)$. Jeg vil nu vise følgende fire egenskaber om $x(a)$:

(21) $x(a) \in p_a X$.

(22) $x \in A_\infty \Rightarrow x(a) \in R$.

(23) $a_1 \subseteq a_2 \Rightarrow p_{a_1} x(a_2) = x(a_1)$.

(24) $m' = [a, N] \Rightarrow \pi_{m'}(x) = x(a)$

ad (21): Antag $x(a) \notin p_a X$. Da $p_a X$ er afsluttet og da I^a er normal findes der en afsluttet omegn $\complement U$ omkring $x(a)$ så $\complement U \cap p_a X = \emptyset$. Følgeligt er $p_a X \subseteq U \subseteq I^a$, hvor U er åben, og der haves nu af lemma 7.4 et element $m' = [a, N]$ så $x(a) \notin N$. Følgende er måske lettere at se hvis nedenstående sammenholdes med figur 5. Nu er $m \leqslant m'$, og da $\pi_m^{m'}$ er identitetsafbildningen, følger det at $x(a) = \pi_m(x) = \pi_m^{m'} \pi_{m'}(x) = \pi_{m'}(x)$, hvor $\pi_{m'}(x) \in N$ ifølge (17). Dette er en modstrid.

ad (22): Dette er oplagt. Hvis $x \in A_\infty$ er x en tråd i $\{A_m, \pi_{m_1}^{m_2}, M\}$ hvorfor $x(a) \in A_m$, hvoraf $x(a) \in R$ da $A = X \cap R$.

ad (23): Dette kan vises ved at bemærke at

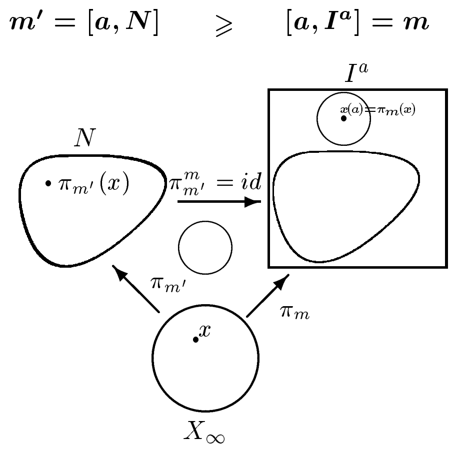
$$p_{a_1}(x(a)) = \pi_{m_1}^{m_2} \pi_{m_2}(x) = \pi_{m_1}(x) = x(a_1),$$

hvor $m_i = [a_i, I^{a_i}], i = 1, 2$, idet $\pi_{m_2}^{m_1} = p_{a_2}|_{I^{a_1}}$.

ad (24): Da $\pi_{m'}^{m} = id_{I^a}|_N$ og da $m \leqslant m'$ må $x(a) = \pi_m(x) = \pi_{m'}^{m} \pi_{m'}(x) = \pi_{m'}(x)$.

Betragt nu et givet $x \in X_\infty$ og lad $x' \in I^\xi$ være det element, der opfylder $f_{\{\gamma\}}(x') = x(\{\gamma\}) = \pi_{\{\gamma\}}(x)$. Med andre ord er x' det element i I^ξ hvis γ'te koordinat netop er $\pi_{\{\gamma\}}(x)$'s eneste element.

Med ovenstående betegnelser ønskes det nu vist, at $f_\infty(x') = x$ og at f_∞ er en homeomorfi, da dette viser at X er homeomorft med et grænserum af et inverst system.



Figur 5: En tegning af modstridsbeviset for (21). Jeg starter med at antage placeringen af $x(a)$ og når frem til placeringen af $\pi_{m'}(x)$, der afbildes via. identitetsafbildningen ind i I^a. Dette er en modstrid.

Det følger af (23) at $p_a(x') = x(a)$ for hver endelig delmængde $a \subseteq \xi$. Thi er $\gamma \in a$ er $p_{\{\gamma\}}x(a) = x(\{\gamma\})$ ifølge (23). For at vise at $x' \in X$ antages det modsatte, dvs. at $x' \notin X$. Nu er $p_a(x') = x(a)$ for hvert $a \subseteq \xi$ endelig, hvorfor der findes et $x^a \in X$ for hvert a så $p_a(x') = p_a(x^a)$. Thi er $p_a(x') \notin p_a(X)$ findes der en åben mængden $U \subseteq I^a$ så $p_a(x') \notin U \supseteq p_a(X)$, hvor sidstnævnte er en afsluttet mængde. Følgeligt giver lemma 7.4 et $Y \subseteq I^a$ så $p_a(x') \notin Y \supseteq \mathring{Y} \supseteq p_a(X)$ og så $[a, Y] \in M$. Men dette er en modstrid med at $p_a(x) = x(a)$ og at x er en tråd i X_∞. Vælg nu et sådant x^a til hver endelige delmængde $a \subseteq \xi$. Da haves et net $(x^a) \subseteq X$ hvis konvergenspunkt netop er x'. Dette er en modstrid da dette nets konvergenspunkt må ligge i X da X er afsluttet.

Nu er $f_\infty(x') = \{f_m(x') = p_a(x') = x(a) | m = [a, N] \in M\}$ hvoraf $f_\infty(x') = x$. Denne afbildning er så surjektiv af ovenstående og kontinuert ifølge bemærkning 5.9. Tilbage står at vise at f_∞ er injektiv, da f_∞ så er en homeomorfi af kompakthedsteoriens 2. hovedsætning. Lad derfor $x_1, x_2 \in X$ være givet. Da må $p_a(x_1) \neq p_a(x_2)$ for en passende, endelig delmængde $a \subseteq \xi$. Men da er

$$\pi_m(x_1) = p_a(x_1) \neq p_a(x_2) = \pi_m(x_2),$$

hvor $m = [a, I^a]$. Følgeligt er $f_\infty(x_1) \neq f_\infty(x_2)$ hvoraf f_∞ er injektiv. □

8 Urysohn-Mengers dimensionsbegreb

Dette afsnit er viet til et dimensionsbegreb, der i dette speciale bruges til påvise en svaghed ved at approksimere kompakte hausdorffrum med kompakte delrum af $\mathbb{R}^n$ via et inverst system. Dette gøres i eksempel 8.21 og lemma 8.6. Men først til selve dimensionsbegrebet:

Def 8.1: Lad $(X, \mathfrak{T})$ være et topologisk rum. Da defineres *Urysohn-Menger-dimensionen* eller *den svagt induktive dimension,* ind X, induktivt som følger:

1. Hvis $X = \emptyset$ er $\operatorname{ind} X = -1$.

2. Hvis der for hver omegn $O_p \ni p$ af ethvert punkt $p \in X$ findes en omegn V så $p \in V \subseteq O_p$ og $\operatorname{ind} \partial V \leqslant n-1$ siges $\operatorname{ind} X \leqslant n$, hvor der med $\operatorname{ind} \partial V$ menes Urysohn-Menger dimensionen af mængden ∂V udstyret med delrumstopologien. Som kvantorer er betingelsen altså at

$$\begin{aligned}&\operatorname{ind} X \leqslant n\\ \Leftrightarrow &\forall p \in X \forall O_p \text{omegn om p} \exists V \in \mathcal{T} : p \in V \subseteq O_p \wedge \operatorname{ind} \partial V \leqslant n-1.\end{aligned}$$

Gælder nu at $\operatorname{ind} X \leqslant n$ men $\operatorname{ind} X \nleqslant n-1$ for et givet $n = -1, 0, 1, \ldots$ siges $\operatorname{ind} X = n$. Er $\operatorname{ind} X \nleqslant n$ for ethvert $n = -1, 0, 1, \ldots$ siges $\operatorname{ind} X = \infty$. □

Urysohn-Menger-dimensionen er identisk med lebesguedimensionen i separable, metriske rum, men ikke i generelle metriske rum (se [Nagata]) og ikke i kompakte hausdorffrum som nedenstående eksempel beviser. Eksemplet er taget fra [Pears]. Jeg vil dog inden dette give et simpelt eksempel på hvordan man kan finde Urysohn-Mengerdimensionen af et rum:

Eksempel 8.2: Betragt et diskret rum X, altså et rum hvor alle punkter er en åben omegn om sig selv: $\forall x \in X : x \in \mathcal{T}(X)$. Da er en vilkårlig mængde både åben og afsluttet, hvoraf $\forall U \in \mathcal{T}(X) : \partial U = \emptyset$. Lad nu $x \in X$ og en omegn $O_x \in \mathcal{T}(X)$ om x være givet. Da er $x \in \{x\} \subseteq O_x$ og $\operatorname{ind} \partial\{x\} = \operatorname{ind} \emptyset = -1$. Altså er $\operatorname{ind} X \leqslant 0$. Antages at X er ikke-tom haves fra def. 8.1 at $\operatorname{ind} X \neq -1$ hvoraf $\operatorname{ind} X = 0$ hvis X er et ikke-tomt, diskret rum.

Betragt nu intervallet $I = [0;1]$ udstyret med den sædvanlige topologi. Lad $x \in I$ og lad O_x være en åben omegn om x. Da x er et indre punkt i O_x er der nu tre tilfælde: $x = 0$, $x = 1$ og $x \neq 0, 1$. I første tilfælde findes der et y så $[0;y[\subseteq O_x$ da x er et indre punkt i O_p. Nu er $\operatorname{ind} \partial[0;y[= \operatorname{ind}\{y\} = 0$ da $\{y\}$ udstyret med delrumstopologien er en diskret mængde.

Tilsvarende, er $x = 1$ findes et y så $]y;1] \subseteq O_x$ og som ovenfor haves at $\operatorname{ind} \partial]y;1] = 0$. Endelig, er $0 < x < 1$ findes y_1, y_2 så $x \in]y_1; y_2[\subseteq O_x$ hvorefter $\operatorname{ind} \partial]y_1;y_2[= \operatorname{ind}\{y_1, y_2\} = 0$ da også $\{y_1, y_2\}$ er et diskret rum.

Alt dette fortæller os at $\operatorname{ind} I \leqslant 1$. Betragt nu $x = \frac{1}{2}$ og $O_p = \left]\frac{1}{4}; \frac{3}{4}\right[$. Lad $V \in \mathcal{T}(X)$ være givet, så $x \in V \subseteq O_p$. Da er det elementært at vise, at $\{\inf V, \sup V\} \subseteq \partial V \neq \emptyset$ hvoraf $\operatorname{ind} I > 0$. Nu haves så det meget tilfredsstillende resultat at $\operatorname{ind} I = 1$. Bemærk at vi egentligt undervejs har vist at

$$\operatorname{ind}]0;1[= \operatorname{ind}]0;1] = \operatorname{ind}[0;1] = 1.$$

□

En nyttig lille bemærkning er følgende:

Bemærkning 8.3: Da $\operatorname{ind} X$ er en topologisk egenskab, følger det at hvis X og Y er homeomorfe rum, så er $\operatorname{ind} X = \operatorname{ind} Y$. Følgelig er det nok at vise at X er homeomorft med I, $]0;1[$ eller $[0;1[$ for at vise, at $\operatorname{ind} X = 0$, jvf. eksempel 8.2. Dette er endog meget nyttigt i praksis. □

Endelig er følgende sætning nyttig for rum X med $\dim X = 0$.

Sætning 8.4: Lad X være et normalt rum og antag $\dim X \leqslant 0$. Da er $\operatorname{ind} X \leqslant 0$.

Bevis: Lad $x \in X$ og $U \subseteq X$ være givet, så U er en åben mængde med $x \in U$. Da X er hausdorff er $U' = \complement\{x\}$ åben, hvoraf $\{U, U'\}$ er en endelig, åben overdækning. Følgelig findes der ifølge sætning 4.8 og lemma 4.3 en åben overdækning $\{V, V'\}$ så $V \subseteq U$ og $V' \subseteq U'$ og $V \cap V' = \emptyset$. Men da er $V = X \setminus V'$ både åben og afsluttet hvoraf $\partial V = \emptyset$. Følgeligt er $\operatorname{ind} X \leqslant 0$. □

Målet med dette afsnit er at vise at der findes et kompakt hausdorffrum S med lebesguedimension 1, der ikke kan skrives som en invers limes af et system af pæne rum. Ved pæne rum mener vi her rum der kan indlejres i I, hvorom der gælder følgende lille sætning jeg ikke vil vise her.

Sætning 8.5: Lad X være et topologisk rum der kan indlejres i I. Lad $F \subseteq X$ være en afsluttet mængde og $U \subseteq F$ en åben mængde. Da er $\dim \partial F \leqslant 0$. □

Nu til det lovede lemma:

Lemma 8.6: Lad $S = \{X_\sigma, \pi_\sigma^\rho, \Sigma\}$ være et inverst system af kompakte rum, der alle kan indlejres i I. Da er $\operatorname{ind} X \leqslant 1$ hvor $X = \lim_{\leftarrow} S$.

Bevis: Lad $x \in X$ være givet og lad $U \subseteq X$ være en åben delmængde med $x \in U$. Af sætning 5.5 findes der nu et $\sigma \in \Sigma$ og en åben delmængde $V_\sigma \subseteq X_\sigma$ så $x \in \pi_\sigma^{-1}(V_\sigma) \subseteq U$. Lad nu $V_\rho = (\pi_\sigma^\rho)^{-1}(V_\sigma)$ og $F_\rho = X_\rho \setminus V_\rho$ for hvert $\rho \geqslant \sigma$. Er nu $\tau \geqslant \sigma$ er

$$\pi_\rho^\tau(V_\tau) = \pi_\rho^\tau \circ (\pi_\sigma^\tau)^{-1}(V_\sigma) = \pi_\rho^\tau \circ (\pi_\rho^\tau)^{-1} \circ (\pi_\sigma^\rho)^{-1}(V_\sigma) = V_\rho.$$

Tilsvarende finder vi ved udnyttelse af kontinuiteten af π'erne at

$$\pi_\rho^\tau(\overline{V}_\tau) \subseteq \overline{V}_\rho; \qquad \pi_\rho^\tau(F_\tau) \subseteq F_\rho.$$

Sættes $F = X \setminus V$ er videre

$$\pi_\rho(V) \subseteq V_\rho; \qquad \pi_\rho(\overline{V}) \subseteq \overline{V}_\rho; \qquad \pi_\rho(F) \subseteq F_\rho.$$

Dette ses på lignende vis, f.eks. haves

$$\pi_\rho(F) \subseteq (\pi_\sigma^\rho)^{-1} \circ \pi_\sigma^\rho \circ \pi_\rho(F) = (\pi_\sigma^\rho)^{-1} \circ \pi_\sigma(F) = (\pi_\sigma^\rho)^{-1}(F_\sigma) \subseteq F_\rho.$$

Da nu $\overline{V}_\rho \cap F_\rho = \overline{V}_\rho \setminus V_\rho = \partial V_\rho$ følger det af ovenstående at $S' = \{\partial V_\rho, \tilde{\pi}_\rho^\tau, \Sigma\}$ er et inverst system når $\tilde{\pi}$'erne er passende restriktioner af π'erne.

Nu er $\partial V = \overline{V} \cap F$ hvoraf det haves, at

$$\pi_\rho(\partial V) = \pi_\rho(\overline{V} \cap F) \subseteq \overline{V_\rho} \cap F_\rho,$$

for hvert $\rho > \sigma$. Følgeligt haves ifølge sætning 5.7

$$\partial V = \lim S_{\partial V} \subseteq \lim_{\leftarrow} S'.$$

Nu haves af sætning 4.4 og sætning 8.5 at

$$\dim \partial V \leqslant \dim \lim_{\leftarrow} S' \leqslant 0.$$

Af sætning 8.4 følger det at $\operatorname{ind} \partial V = 0$ hvorfor $\operatorname{ind} X \leqslant 1$. □

Dette lyder måske meget uskyldigt, men dette lemma har vigtige konsekvenser:

Bemærkning 8.7: Betragt et givet kompakt hausdorffrum X der har $\dim X \leqslant n$ for et passende $n \in \mathbb{N}$. Betragt inverse systemer af kompakte rum X_σ der alle kan indlejres i I^m for et passende $m \in \mathbb{N}$, og som har $\dim X_\sigma \leqslant n$. Man kan da spørge, om der altid findes et inverst system hvis inverse limes er homeomorft med X? Da giver lemma 8.6 at hvis der findes et rum med $\dim X = 1$ og $\operatorname{ind} X > 1$ ville eksistensen af et sådant inverst system lede til modstrid. Resten af dette kapitel er viet til konstruere et sådant rum, altså et kompakt hausdorffrum S med $\dim S = 1$ og $\operatorname{ind} S > 1$. $\square$

Nu til konstruktionen af S. Eksemplet her er i store træk lånt fra [Pears, pp. 162–166], hvor jeg dog er gået noget mere i detaljer og renset eksemplet for brug af den stærkt induktive dimension.

For at konstruere S skal jeg bruge to specielle mængder. Den første, der måske er velkendt, er cantormængden der er defineret nedenfor. I definitionen og det efterfølgende anvendes følgende klasse af tal:

Def 8.8: For hvert $n = 0, 1, \ldots$ kaldes tallene $\frac{p}{2^n}$, hvor $p = 0, 1, \ldots, 2^n$, for *de n-dyadiske tal* $\mathbb{D}_n$ (i enhedsintervallet). Foreningen over n af alle n-dyadiske tal kaldes *de dyadiske tal* $\mathbb{D}$. Algebraikere og andre ville skrive de dyadiske tal som $\{0,1\}\left[\frac{1}{2}\right]$. Bemærk at dette er en delmængde af alle de dyadiske tal $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{2}\right]$. Jeg vil i dette speciale næsten altid tænke på $\{0,1\}\left[\frac{1}{2}\right]$; men enkelte gange vil jeg få brug for en anden delmængde. Er $A \subseteq \mathbb{R}$ vil jeg efterfølgende skrive $\mathbb{D}_A$ for $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{2}\right] \cap A$. $\square$

De dyadiske tal har mange interessante egenskaber. En af dem er

Bemærkning 8.9: For hvert $n \in \mathbb{N}$ kan det bemærkes, at $\mathbb{D}_{n+1} \setminus \mathbb{D}_n$ netop er de $n+1$-dyadiske tal, der kan skrives på formen $\frac{m}{2^{n+1}}$, hvor m er ulige. Heraf følger det at $\mathbb{D}_{n+1} \setminus \mathbb{D}_n$ indeholder 2^n elementer. $\square$

Den første mængde der skal bruges til definition af vores søgte rum S er cantormængden:

Def 8.10: Følgende delmængde af $I = [0;1]$ betegnes *Cantormængden* C:

$$\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} t_n 3^{-n} \,\middle|\, t_n \in \{0,2\} \text{ for alle } n = 1, 2, \ldots \right\}.$$

I bemærkning 8.11 godtgøres det at en følge $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ fra $\{0,2\}$ på entydig vis svarer til et element fra C. Således svarer mængden af følger, der enten er 0 f.v.t. eller 2 f.v.t. til en tællelig delmængde af C. Denne mængde betegnes D. $\square$

Cantormængden besidder en række interessante egenskaber, hvoraf jeg vil angive nogle enkelte her.

Bemærkning 8.11: For det første er den trinære fremstilling antydet i def. 8.10 entydig. Thi er (t_n) og (t'_n) følger fra $\{0,2\}$ så $(t_n) \neq (t'_n)$ findes et første $n \in \mathbb{N}$ så $t_n \neq t'_n$. Antag f.eks. at $t_n = 2$ og $t'_n = 0$. Da er

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=1}^{\infty} t_i 3^{-i} - \sum_{i=1}^{\infty} t'_i 3^{-i} \right| &= \left| 3^{-n}(t_n - t'_n) + \sum_{i=n+1}^{\infty} (t_i - t'_i) 3^{-i} \right|, \\ &\geqslant \left| 2 \cdot 3^{-n} - 2 \cdot \tfrac{1}{2} \cdot 3^{-n} \right| = 3^{-n} > 0. \end{aligned}$$

Der er således en entydig korrespondance mellem punkter i C og følgerne fra $\{0,2\}$. Bemærk at ovenstående også godtgør, at hvis $t, t' \in C$ og $|t - t'| < 3^{-n}$ for et givet $n \in \mathbb{N}$ er de til t og t' svarende følger identiske til og med det n'te element.

Betragt nu afbildningen $\varphi : C \to I$ givet ved

$$\varphi(t) = \varphi\left(\sum_{n=1}^{\infty} t_n 3^{-n}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} t_n 2^{-(n+1)}.$$

Er $t, t' \in C$ givet så $|t - t'| < 3^{-n}$ for et givet n er de tilsvarende følger $(t_n), (t'_n)$ som nævnt identiske til og med det n'te element. Følgelig er

$$|\varphi(t) - \varphi(t')| = \left| \sum_{i=n+1}^{\infty} 2^{-(i+1)}(t_i - t'_i) \right| < 2^n,$$

hvoraf φ er kontinuert. φ er ydermere klart surjektiv hvoraf kardinaliteten af C og $\mathbb{R}$ er ens. Videre gælder

$$t > t' \Rightarrow \varphi(t) \geqslant \varphi(t'),$$

hvor der gælder lighedstegn netop når de tilsvarende følger er identiske indtil et vist trin, hvorfra de har følgende „hale“:

$$(t_n) = (\dots, 0, 2, 2, 2, \dots)$$
$$(t'_n) = (\dots, 2, 0, 0, 0, \dots)$$

Da der kun findes tælleligt mange par der opfylder dette, gælder der skarpt ulighedstegn for alle $t, t' \in C$ bortset fra en tællelig delmængde. Disse par er alle indeholdt i D og det er klart at hvert element $t \in D$ har netop én sådan makker $t \in D$. φ opfylder $\varphi(s) = \varphi(t)$ netop hvis $s, t \in C$ er et af de omtalte par i D.

C kan konstrueres på en mere intuitiv måde ved at fjerne intervaller fra enhedsintervallet I: Lad til enhver endelig, binær følge $b = (b_i)_{n=1,2,\dots,n}$ en åben mængde G_b være givet som

$$G_b = \left]\textstyle\sum_{i=1}^{n} \frac{2b_i}{3} + \frac{1}{3}; \sum_{i=1}^{n} \frac{2b_i}{3} + \frac{2}{3}\right[.$$

Hvis b er den tomme følge $\varphi : \emptyset \to \{0,1\}$ er

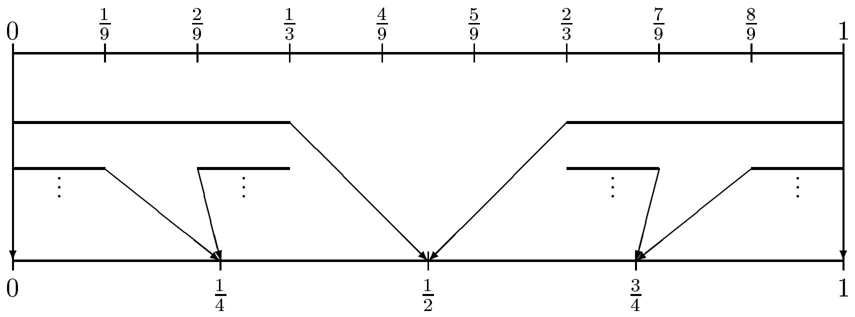
$$G_b =]\tfrac{1}{3}; \tfrac{2}{3}[.$$

Nu påstås det at

$$(25) \quad C = I \setminus \bigcup_{\substack{b \text{ endelig,} \\ \text{binær} \\ \text{følge}}} G_b$$

(25) er let indse ved følgende bemærkning: Hvis $b = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ indeholder G_b netop de tal t, hvor alle trinære udviklinger $t = \sum_{i=1}^{\infty} t_i$ har $t_i = 2b_i$ for alle $i < n$ og $t_n = 1$. Dette er let at se ud fra definitionen af G_b hvorfor detaljerne overlades til læseren. Men C er jo netop de tal der har en trinær udvikling der er fri for ettaller, hvoraf (25) følger. Se evt. figur 6. I dette billede har $\varphi : C \to I$

Figur 6: Konstruktion af C. For hvert trin fra oven fjernes alle tal t der ikke har nogen ettalsfri trinær udvikling.



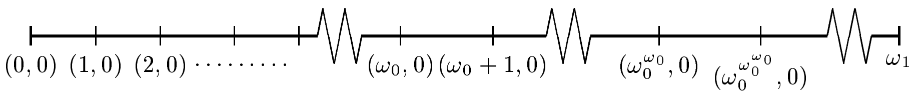
Figur 7: Afbildningen $\varphi : C \to I$ afbilder de afskårnes intervallers endepunkter ind i de dyadiske tal, jvf. def. 8.8.

også en mere intuitiv form, i alt fald på D. Det er klart at D er tæt i C og ydermere ses det let at $\varphi(s) = \varphi(t)$ for $s, t \in D$ netop når s,t tilhører randen af et bortskåret interval G_φ, se figur 7. Det er også let at se, evt. på figuren, at originalmængder af åbne intervaller i I er åbne intervaller i C. Således er kvotienttopologien på I induceret af φ identisk med den naturlige topologi på I.

Af (25) følger direkte at C er afsluttet i I og dermed i $\mathbb{R}$. Da C trivielt er begrænset i $\mathbb{R}$ er C kompakt. Da C er et topologisk delrum af et hausdorffrum I er C ligeledes et hausdorffrum, hvoraf C er et kompakt hausdorffrum.

Betragt nu den klassedeling der består af et-punkts mængder $\{x\}$ når $x \in C \setminus D$ og af de omtalte par i D. Da er φ en kvotientafbildning (se f.eks. [Engelking, pp. 90–92]) da φ som nævnt er en kontinuert surjektion, der ydermere er afsluttet da C er kompakt og I er et hausdorffrum. Det sidste følger af at enhver afsluttet delmængde $F \subseteq C$ er kompakt, hvoraf $\varphi(F)$ er kompakt, hvoraf $\varphi(F)$ er afsluttet da I er et hausdorffrum, eller af f.eks. [Engelking, 3.1.11], idet det bemærkes at Engelking skriver „*compact*“ når jeg her skriver „*kompakt og hausdorff*“. Med andre ord er det kvotientrummet af C der findes ved at identificere disse par i $D \subseteq C$ homeomorft med I.

Den sidste egenskab ved C der skal bruges her er at $\operatorname{ind} C = 0$. Af definitionen haves $\operatorname{ind} C > -1$ da $C \neq \emptyset$. Er O_p en åben omegn om et punkt p findes et interval $]u, v[= \{t \in C | u < t < v\}$ så $p \in]u, v[\subseteq O_p$. Videre findes to intervaller G_b og $G_{b'}$ i I så $u < G_b < p < G_{b'} < v$, hvor der med f.eks. $u < G_b$ menes $\forall t \in G_b : u < t$. At sådanne intervaller findes er oplagt ud fra definitionen af G_b. Vælg nu $u' \in G_b$ og $v' \in G_{b'}$. Da er $[u', v'] = \{t \in C | u' \leqslant t \leqslant v'\} =]u', v'[$



Figur 8: „Den lange linje“ L. Bemærk at venstreafsnittet af L ved $(\omega_0, 0)$ er netop er $\mathbb{R}_{+0}$.

hvoraf $\partial]u', v'[= \emptyset$. Hermed er det bevist, at $\operatorname{ind} C = 0$. $\square$

Udover de i bemærkningen nævnte egenskaber ved C findes der mange andre interessante egenskaber, bl.a. har C lebesguemål 0, men er dog stadig overtællelig.

Den anden mængde er af en lidt anden natur. Det er essentielt set en udvidet reel talakse der ofte i engelsksproget litteratur benævnes „the long line“, hvorfor jeg vil kalde mængden „den lange linje“, skrevet L. For dem der allerede er bekendt med denne linje skal det bemærkes, at jeg her taler om den (et-punkts) kompakte udgave af denne linje:

Def 8.12: Lad ω_1 være det første overtællelige ordinaltal, dvs. ifølge kontinuitetshypotesen er $\omega_1 = \operatorname{card} \mathbb{R}$. Betragt nu

$$L = \{(t, \alpha) | 0 \leqslant t < 1 \wedge \alpha < \omega_1\} \cup \{\omega_1\}.$$

L forsynes med den leksikale ordning, dvs.: $(t, \alpha) < \omega_1$ for alle $0 \leqslant t < 1$, $\alpha < \omega_1$ og $(t, \alpha) < (s, \beta)$ hvis $\alpha < \beta$ eller $\alpha = \beta \wedge t < s$. Dette er klart en lineær ordning. Jeg har prøvet at illustrere dette i figur 8.

Udstyr nu L med intervaltopologien, dvs. topologien på L har en basis bestående af mængder af følgende typer:

$$G_{l_1}^{l_2} = \{l \in L | l_1 < l < l_2\}. G_{l_1} = \{l \in L | l < l_1\} G^{l_2} = \{l \in L | l > l_2\}$$

Da kaldes L for *den lange linje.* $\square$

Også til denne mængde knytter sig en række bemærkninger:

Bemærkning 8.13: Jeg vil ikke gå i detaljer med dette, men det er let at se at L lokalt er homeomorft med et linjestykke. Specielt er L et hausdorffrum. Mere overraskende er det måske at L er kompakt, som følgende bevisskitse godtgør: Lad $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ være et net fra L. Betragt mængden

$$B = \{\beta < \omega_1 | \{x_\alpha | x_\alpha < (\beta, 0)\} \text{ koendelig i } L\}.$$

Er $B = \emptyset$ må $\forall l < \omega_1 \in L : x_\alpha > l$ f.v.t. hvorfor $\lim x_\alpha = \omega_1$. Er dette ikke tilfældet har B et mindste element β_0, da B er en mængde af ordinaltal og dermed velordnet. Men heraf er $(\beta_0 - 1, 0) \leqslant x_\alpha < (\beta_0, 0)$ ofte, hvoraf der findes et delnet der konvergerer mod et element l_0, hvor $(\beta_0 - 1, 0) \leqslant l \leqslant (\beta_0, 0)$. Her anvendte jeg, at $\{l | (\beta - 1, 0) \leqslant l_0 \leqslant (\beta, 0)\}$ på oplagt vis er homeomorft med $I = [0; 1]$. Ialt haves at (x_α) har et konvergent delnet, som ønsket. $\square$

Ud fra cantormængden og den lange linje fra def. 8.10 og def. 8.12 konstrueres nu en ny mængde R:

Def 8.14: Lad $R \subseteq L \times I$ være givet ved:

$$R = \{(l, t) \in L \times I | l = \omega_1 \vee t \in C\}.$$

For hvert $l_0 \in L \setminus \{\omega_1\}$ og hvert par $u, v \in I$ så $u \leqslant v$ defineres videre

$$C_v^u(l_0) = \{(l_0, t) | u \leqslant t \leqslant v\}.$$

Betragt nu $f : L \times C \to R$ givet som

$$f(l,t) = \begin{cases} (l,t) & \text{for } l < \omega_1, \\ (\omega_1, \varphi(t)) & \text{for } l = \omega_1. \end{cases}$$

Jvf. bemærkning 8.15 er f en kvotientafbildning, og R udstyres derfor med kvotienttopologien, jvf. [Engelking, p. 90]. □

Bemærkning 8.15: Bemærk først at f er kontinuert da f er en identisk afbildning i første variabel og en kontraktion i anden. f er klart surjektiv, hvoraf det som før følger det at f er afsluttet. Men da er f en kvotientafbildning. Ydermere er R et hausdorffrum, hvilket er let at se ved at betragte koordinaterne til r, s og herefter danne disjunkte kasser omkring r, s. Originalmængderne af disse åbne kasser vil da være åbne kasser i $L \times C$, medmindre én af kasserne i R indeholdt ω_1. I så fald skal disse kasser modificeres på passende vis; at dette kan lade sig gøre er intuitivt let at se på figur 7. Herfra vil interesserede læsere let kunne udfylde hullerne.

Da L, C er kompakte hausdorffrum følger at $L \times C$ er et kompakt hausdorffrum og dermed er $R = f(L \times C)$ et kompakt hausdorffrum, se evt. [Engelking, 3.1.10]. Bemærk at delrumstopologien på $\{\omega_1\} \times I$ er den sædvanlige topologi for I. □

Er da R det rum vi søger? Nej, det er det ikke:

Lemma 8.16: Hvis R er det topologiske rum defineret i def. 8.14 er

$$\dim R = \operatorname{ind} R = 1.$$

Bevis: Betragt delmængder af R af formen

$$V = \{(l,t) \in R | l_1 < l < l_2 \wedge u < t < v\},$$

hvor $l_1 < l_2 < \omega_1$, $u, v \notin C$ og $u < v$. Dette er så oplagt åbne mængder (i kvotienttoploogien, se def. 8.14). Ydermere er det klart, at enhver omegn O_p omkring et punkt $p \in R \setminus (\{\omega_1\} \times I)$ har en omegn af type V så $p \in V \subseteq O_p$, jvf. def. 8.1. Men

$$\partial V = C_v^u(l_1) \cup C_v^u(l_2).$$

Fra bemærkning 8.11 haves $\operatorname{ind} C = 0$ hvoraf det er klart, at $\operatorname{ind} \partial V = 0$.

Antag nu at $x = (\omega_1, t_1)$ hvor $0 < t_0 < 1$. Er G en åben omegn findes $s, u \in I$ så $\{\omega_1\} \times]s, u[\subseteq G$. Følgeligt findes der dyadiske tal d, e så $0 < s < d < t_0 < e < u < 1$ hvoraf $\{\omega_1\} \times [d, e] \subseteq G$. Nu findes $u, u' \in C$ så

$$\varphi(u) = \varphi(u') = d,$$

og $u \neq u'$, jvf. bemærkning 8.11. Tilsvarende findes $v, v' \in C$ så $v \neq v'$ og så

$$\varphi(v) = \varphi(v') = e.$$

Nu findes $l_0 \in L \setminus \{\omega_1\}$ så

$$V_0 = \{(l,t) | l_0 < l < \omega_1 \wedge u \leqslant t \leqslant v\} \subseteq G,$$

da G er åben i kvotienttopologien. Videere er

$$V = V_0 \cup (\{\omega_1\} \times]d;e[) \subseteq G,$$

med $x \in V$. Betragt nu

$$\partial V = C_v^u(l_0) \cup \{(\omega_1,d),(\omega_1,e)\}.$$

Det følger heraf, at $\operatorname{ind} \partial V = 0$ hvorfor vi kun mangler at vise, at enhver omegn til $(\omega_1, 0)$ og til $(\omega_1, 1)$ har en mindre omegn, hvis rand har Urysohn-Menger-dimension lig 0. Dette argument følger samme princip som det lige gennemgåede, og overlades til læseren. Hermed er det godtgjort, at $\operatorname{ind} R = 1$.

For at vise at $\dim R = 1$ betragtes til hvert n alle tal i enhedsintervallet, hvis trinære udvikling er 0 efter $n+1$'te decimal og hvis n'te og $n+1$'te decimal er 1. Det ses straks af def. 8.10 at sådanne tal ikke kan ligge i Cantormængden. Sæt A^n til at være mængden af sådanne tal til hvert $n \in \mathbb{N}$ samt 0 og 1 . F.eks. er $A^1 = \{0, \frac{4}{9}, 1\}$ og $A^2 = \{0, \frac{4}{27}, \frac{11}{27}, \frac{22}{27}\}$. Betragt nu til hvert $n \in \mathbb{N}$ mængden af de lukkede intervaller $\mathfrak{C}^n$ hvis endepunkter er to på hinanden følgende elementer i A^n. Da $A^n \cap C = \emptyset$ er disse intervallers fællesmængder med C åbne i C. Benævn disse intervaller med $\mathfrak{C}^n$, således at f.eks.

$$\mathfrak{C}^1 = \left\{\left]0; \tfrac{4}{9}\right[, \left]\tfrac{4}{9}; 1\right[\right\}.$$

Bemærk at

1. $\operatorname{ord} \mathfrak{C}^n = 1$ for alle $n \in \mathbb{N}$
2. $\mathfrak{C}^n$ er en overdækning af C
3. $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathfrak{C}^n$ er en basis for C.
4. Ethvert interval $A \in \mathfrak{C}^n$ for et givet n kan skrives som en forening af intervaller fra $\mathfrak{C}^m$, hvor $m \geqslant n$ er givet vilkårligt.

Tilsvarende ønskes en følge af åbne overdækninger $(\mathfrak{L}^n)_{n \in \mathbb{N}}$ af L så

1. $\operatorname{ord} \mathfrak{L}^n = 2$ for alle $n \in \mathbb{N}$
2. $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathfrak{L}^n$ er en basis for L
3. Ethvert interval $A \in \mathfrak{L}^n$ for et givet n kan skrives som en forening af intervaller fra $\mathfrak{L}^m$, hvor $m \geqslant n$ er givet vilkårligt.

Mens dette måske er vanskeligt at skrive på en pæn måde er det så oplagt at en sådan overdækning findes, at jeg vil overlade det til læseren at finde en sådan overdækning, f.eks. ved at tage udgangspunkt i de dyadiske tal. Bemærk at hvert $\mathfrak{L}^n$ nødvendigvis må være endelig, da L er kompakt.

Betragt nu til hvert n kasserne $f(A \times B)$, hvor $A \in \mathfrak{L}^n$ og $B \in \mathfrak{C}^n$ og $f : L \times C \to R$ er funktionenen fra def. 8.14. Benævn til hvert $n \in \mathbb{N}$ disse mængden af kasser $\mathfrak{B}_n$ og bemærk at

1. $\mathfrak{B}_n$ er en åben overdækning for alle $n \in \mathbb{N}$.

2. $\operatorname{ord}\mathfrak{B}_n = 2$ for alle $n \in \mathbb{N}$.

3. $\mathfrak{B} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathfrak{B}_n$ er en basis for topologien på R.

4. Enhver kasse fra $\mathfrak{B}_n$, hvor n er givet vilkårligt, kan skrives som en forening af kasser fra $\mathfrak{B}_m$, hvor $m \geqslant n$ er givet vilkårligt.

Er nu $\{G_i\}_{i=1,2,\dots,m}$ en endelig overdækning af R findes elementer fra $\mathfrak{B}$ så $G_1 = \bigcup_{\alpha \in A^1} B_\alpha^1$ hvor $B_\alpha^1 \in \mathfrak{B}$ for $\alpha \in A^1$ og hvor A^1 er en indeksmængde. Tilsvarende kan G_i skrives som $G_i = \bigcup_{\alpha \in A^i}$ for alle $i = 1, \dots, m$. Men da er $\bigcup_{i=1}^m \bigcup_{\alpha \in A^i} B_\alpha^i$ en overdækning af R,. hvoraf der findes en endelig deloverdækning $B^* = \{B_1, \dots, B_k\}$. Bemærk at $B^* < G_i$. Da B^* består af endeligt mange elementer må $B^* \subseteq \mathfrak{B}_1 \cup \mathfrak{B}_2 \cup \cdots \mathfrak{B}_l$, hvor $l \in \mathbb{N}$. Nu kan hvert element i B^* skrives som en forening af elementer fra $\mathfrak{B}_l$. Udnyttes dette haves en delmængde B^{**} af $\mathfrak{B}_l$ så $B^{**} < B^* < G_i$. Faktisk, da B^{**} er en overdækning må $B^{**} = \mathfrak{B}^l$ hvoraf $\operatorname{ord}B^{**} = 2$, og B^{**} er en endelig overdækning. Men da er $\dim R \leqslant 1$.

Endelig giver sætning 4.4 at $\dim R \geqslant 1$ da R indeholder et afsluttet delrum $\{\omega_1\} \times I$ der er homeomorft med I. Dermed indeholder R et afsluttet underrum med lebesguedimension 1, jvf. eksempel 4.6. Følgeligt kan $\dim R \nleqslant 0$ ifølge sætning 4.4. $\square$

Mens R ikke er vores søgte rum er det dog den ene halvdel af S: S konstrueres ved at tage to homeomorfe kopier af R og „lime“ disse sammen i $\{\omega_1\} \times I$. Men inden dette et teknisk, men dog spændende lemma:

Lemma 8.17: Lad M være en tællelig tæt delmængde af $\mathring{I} =]0;1[$. Da findes der en ordenstro homeomorfi $h : I \to I$ så $h(\mathbb{D}_{\mathring{I}}) = M$, hvor $\mathbb{D}_{\mathring{I}}$ er de dyadiske tal i det åbne enhedsinterval, se def. 8.8.

Bevis: Da M er tællelig og tæt kan elementerne i M opskrives i en følge $(m_i)_{i \in \mathbb{N}}$ der opfylder

(26) $\forall i \neq j : m_i \neq m_j$.

Der gælder følgende to bemærkninger om M:

1. For ethvert $i \in \mathbb{N}$ gælder at $M_i = \{m_j\}_{j>i}$ er tæt i I. Thi ellers ville der findes et $x \in I$ og et $\epsilon > 0$ så $K(x, \epsilon) \cap M_i = \emptyset$. Da $M \setminus M_i$ indeholder endelig mange elementer er $0 < d = \min\{d(m_j, m_k) | j, k \leqslant i \wedge j \neq k\}$. Men i så fald indeholder $K(x, \min(d, \epsilon))$ højst ét element fra M hvoraf der findes et $y \in I$ så $K\left(y, \frac{1}{2}\min(\epsilon, d)\right) \cap M = \emptyset$. Faktisk kan man indse at en af $y = x \pm \frac{1}{2}\min(\epsilon, d)$ opfylder dette.

2. For hvert $i, j, k \in \mathbb{N}$ findes et $l \in \mathbb{N}$ så $m_l \in]m_i; m_k[$, og så $l > k$ når $m_i < m_j$. Dette følger af at M_k er tæt ifølge 1. idet tætheden giver
$$K\left(\frac{m_i + m_j}{2}, \frac{m_j - m_i}{2}\right) \cap M_k \neq \emptyset.$$

Med dette i hånden følger lemmaet forholdsvis let. Først defineres h på de n-dyadiske tal, således at h er defineret på $\mathbb{D}$ i tælleligt mange skridt:

0. Sæt h(0)=0, h(1)=1.

1. Sæt $h\left(\frac{1}{2}\right) = m_1$.

2. Sæt $h\left(\frac{1}{4}\right)$ til det første tal x i $(m_i)_{i>1}$ hvor $x \in]0; m_1[$. Tilsvarende sættes $h\left(\frac{3}{4}\right)$ til det første tal x' i $(m_i)_{i>1}$ hvor $x' \in]m_1; 1[$. Dette er muligt ifølge bemærkning 2. Bemærk at $x' \neq x$ og at $x = m_2 \vee x' = m_2$.

$\vdots$

n For hvert n-dyadisk tal x der ikke er et $n-1$-dyadisk tal sættes $h(x)$ tal det første tal i (m_i) som ikke er billedet af noget $n-1$-dyadisk tal og som ligger i intervallet mellem de to $n-1$-dydiske tal $x \pm \frac{1}{2^n}$. At dette er muligt ses ved at benytte 2. med k som det største tal der opfylder, at der findes et $n-1$-dyadisk tal y så $h(y) = m_k$. Dette element er selvfølgeligt det største, der allerede ér „brugt“.

$\vdots$

$\vdots$

Det ses umiddelbart, at ovenstående definerer en afbildning $h : \mathbb{D} \to M$, der af konstruktionen ses at være ordensbevarende. Bemærk at h er kontinuert, da $h^{-1}(]m_i; m_j[) \subseteq]h^{-1}(m_i); h^{-1}(m_j)[$, hvor $m_i > m_j$ er elementer i (m_i). h er surjektiv da m_n senest bliver ramt i det $n'te$ trin, da ethvert m_n må ligger i netop ét af intervallerne beskrevet i processen. Det haves også umiddelbart af processen og (26) at h er injektiv. Nu giver [Engelking, P.2.1.8] at h kan udvides til en afbildning $h : I \to I$. En sådan udvidelse må være surjektiv: Thi er $y \in I$ haves, da $M \subseteq h(I)$, at der findes $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ så $h(x) = \lim_{n\to\infty} h(x_n)$. Da I er kompakt findes en delfølge (x_{n_m}) så $\lim_{m\to\infty} x_{n_m} \to x \in I$. Men da haves at $h(x) = \lim_{m\to\infty} h(x_{n_m})$ da h er kontinuert.

Ligeledes må h være ordensbevarende. Thi antag at der eksisterer $x, y \in I$ så $x < y$ men $h(x) > h(y)$. Da h er kontinuert findes der disjunkte kugler K_1, K_2 om hhv. x og y så

$$\forall \xi \in K_1 \forall \eta \in K_2 : h(\xi) > h(\eta).$$

Men da M er tæt findes der elementer af M i begge disse kugler, hvilket er i modstrid med, at $h : \mathbb{D} \to M$ er ordenstro. Af dette følger også, at h må være injektiv, thi er $h(x) = h(y)$ for lad os sige $x < y$ findes der et ξ så $x < \xi < y$. Ifølge det ovenstående må $h(\xi) = h(x) = h(y)$, thi ellers ville der gælde enten $h(x) > h(\xi)$ eller $h(x) = h(y) < h(\xi)$ i modstrid med ovenstående. Men det betyder specielt, at alle $m \in M$ imellem x og y har $h(m) = h(x)$. Da der altid kan findes 2 elementer fra M mellem x og y giver dette en modstrid med injektiviteten af $h : D \to M$. Alt dette giver så at $h : I \to I$ er ordenstro og injektiv. I ovenstående har der været et vist misbrug af bogstavet h, men det burde ikke give anledning til forvirring.

Endeligt udnyttes at I er et kompakt hausdorffrum til at vise at h er en homeomorfi, se [Engelking, P.3.1.13]. Hermed er lemmaet bevist. $\square$

Herefter betragtes følgende konstruktion:

Def 8.18: Lad M være en tællelig tæt delmængde, $h : I \to I$ være en homeomorfi fra lemma 8.17 og $\varphi : C \to I$ være kvotientafbildningen fra bemærkning 8.11. Sættes $\psi : C \to I$ til $\psi = h \circ \varphi$ haves en kontinuert surjektion af C på I. Denne opfylder, at hvis $s < t$ er $\psi(s) \leqslant \psi(t)$ hvor der gælder lighed netop når s, t er relaterede punkter i D, idet der mindes om relationen fra bemærkning 8.11. Ydermere gælder det oplagt, at $\psi(D) = M$. Nu definerer jeg en ny topologi på mængden R, og opnår dermed et topologisk rum R_M, der er homeomorft med R. Topologien på R_M er kvotienttopologien m.h.t. afbildningen $g : L \times C \to R$ givet ved

$$g(l,t) = \begin{cases} (l,t) & \text{hvis } l \leqslant \omega_1, \\ (\omega_1, \psi(t)) & \text{hvis } l = \omega_1. \end{cases}$$

At R_M er homeomorft med R følger af at h er en homeomorfi.

Måske ville det være passende at stoppe op og kikke på denne topologi:

Eksempel 8.19: Man kunne måske med rette spørge sig selv hvordan de åbne mængder i R_M ser ud. Topologien på R_M er en produkttopologi m.h.t. afbildningen g, dvs. de åbne mængder i R_M netop er de mængder, hvis originalmængde er åben i $L \times C$. De åbne mængder i $L \times C$ kan karakteriseres som de mængder hvori der om hver punkt[9] kan findes en omegn af typen $]l_1; l_2[\times]t_1; t_2[$, hvor $]t_1; t_2[$ og $]l_1; l_2[$ er åbne intervaller i respektivt C og L. Da $g|_{L \setminus \{\omega_1\} \times C}$ er den identiske afbildning er en sådan mængde U også åben i R_M for så vidt at $U \cap \{\omega_1\} \times I = \emptyset$. Hvad sker der i denne så at sige øverste linje? På den linje er g en sammensætning af en surjektion efterfulgt af en ordenstro homeomorfi, ialt afbildningen $\psi : C \to I$. Ethvert punkt x i U der ligger på denne øverste linje skal altså have en originalmængde, der kan skrives som en forening af de førnævnte kasser. Hvis vi for letheds skyld nøjes med at kikke på mængder, hvis originalmængde *er* sådanne kasser, har man måske noget i stil figur 9 - altså en kasse, hvis øverste linje er flyttet og deformeret af ψ på en ordenstro måde. Man vil bemærke, at hvis kassens ene hjørnepunkt enten er $(\omega_1, 0)$ eller $(\omega_1, 1)$ vil dette punkt *ikke* blive flyttet.

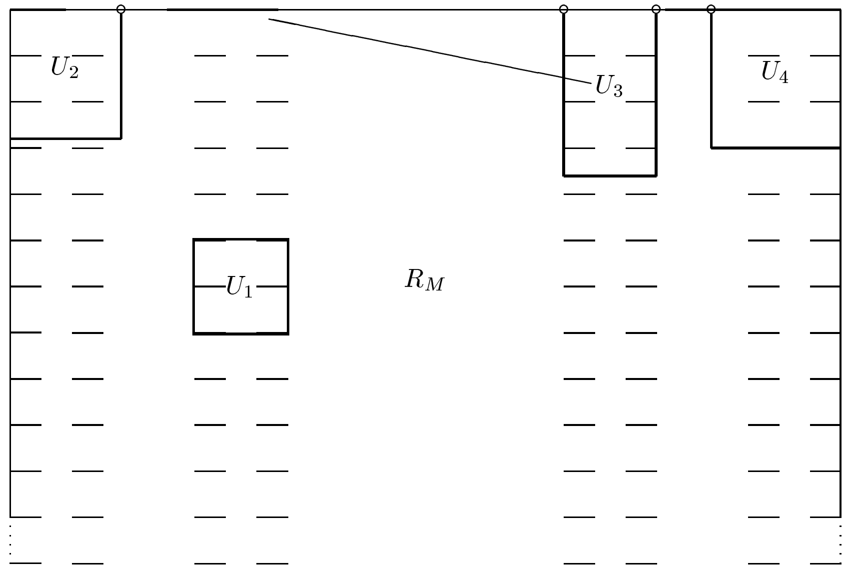
Nu er vi næsten klar(!). Dog mangler der følgende lemma:

Lemma 8.20: Lad $U \in \mathcal{T}(R_M)$ således at $U \cap (\{\omega_1\} \times I) \neq \emptyset$ være givet. Lad nu $c = \sup\{t | (\omega_1, t) \in U\}$. Er nu $c \notin M$ og er $c \neq 1$ er $\operatorname{ind} \partial U \geqslant 1$.

Bevis: Da $c \notin M$ findes $a \in C \setminus D$ så $\psi(a) = c$ og så $a \neq 1$. Lad $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ være en følge i C med grænseværdi a således at $\forall n \in \mathbb{N} : (\omega_1, \psi(t_n)) \in U$. At dette kan lade sig gøre følger af at c er valgt så (ω_1, c) ligger i $\overline{U}$, idet enhver „kasse“ der indeholder (ω_1, c) også må indeholde $(\omega_1, c - \epsilon)$ for et passende (lille) $\epsilon > 0$. Da c er et supremum må der findes et $n \in \mathbb{N}$ så $t_n \in [c - \epsilon, c]$ hvoraf (ω_1, t_n) ligger i „kassen“, se evt. figur 9. Videre må der til hvert $n \in \mathbb{N}$ findes et $l_n \in L$ så $[l_0; \omega_1[\times\{t_n\} \subseteq U$. Dette følger igen af, at U er en åben mængde. På grund af en egenskab ved L[10] er $\sup_{n \in \mathbb{N}} l_n = l_0 < \omega_1$. Ved et argument som før indses det, at $[l_0, \omega_1[\subseteq \overline{U}$. Nu er der to muligheder:

[9] Dog ikke punkter (l,t) hvor $l \in \{(0,0), \omega_1\}$ eller $t \in \{0,1\}$. I de tilfælde findes halvåbne kasser omkring $(0,l)$ på oplagt vis.

[10] Egenskaben følger af at en tællelig forening af tællelige mængder selv er tællelig. Som bekendt kan ordinaltallene opfattes som venstreafsnit i en passende, ordnet mængde. For hvert $l_n = (\xi_n, x_n)$ er $\xi_n < \omega_1$ og da ω_1 er det første overtællelige ordinaltal er ξ_n et tælleligt



Figur 9: Åbne mængder (kasser) i R_M. Bemærk især øverste linje, hvor ψ forvrænger „overlæggeren" i kasserne. Stregen fra U_3 er der blot for at gøre opmærksom på, at „overlæggeren" ligger helt omme på den anden side af det store hul i cantormængden C. Bemærk at hvis U_1 havde ligget oppe ved den øverste linje ville øverste højre hjørne af U_1 røre øverste venstre hjørne af U_3.

1. Der findes et $l \in [l_0; \omega_1[$ så $[l; \omega_1[\times \{a\} \subseteq \partial U$. I dette tilfælde er $\operatorname{ind} \partial U \geqslant 1$. Dette er meget let at vise, se evt. eksempel 8.2, idet der mindes om at L lokalt er homeomorft med I.

2. Der findes en koendelig mængde $A \subseteq L \setminus \{\omega_1\}$ således, at $\forall l \in A : (l, a) \in U$. I dette tilfælde må der til hvert $l \in A$ være en åben omegn omkring (l, a). Specielt må der til hvert $l \in A$ være et $b(l) > a$ i C så $C_a^{b(l)}(l) \subseteq U$, idet der mindes om definitionen af $C_a^{b(l)}(l)$ i def. 8.12.

I første tilfælde er vi færdige og i anden tilfælde fortsættes således: Da A er koendelig vil der findes et $b \in C$ og et $B \subseteq A$ således at $a < b$ og således at B er en koendelig delmængde af $L \setminus \{\omega_1\}$ og $\forall l \in B : b(l) \geqslant b$. Thi antages det at intet sådant b eksisterer kan der opnås en modstrid på følgende vis, der bygger på transfinit rekursion.

Der mindes om princippet om transfinit rekursion der siger følgende. Et ordinaltal er af et af følgende typer: type 1, som er de ordinaltal, der kan skrives som en efterfølger til et andet ordinaltal, og type 2, som ikke kan. Disse kan så skrives som foreningen af de foregående tal.

Betragt nu det første element $l_0 \in A$. Da er $b(l_0) > a$. Nu må der findes et $l_1 > l_0$ så $b(l_0) > b(l_1) > a$, thi ellers ville $b(l_0)$ opfylde kravet for b. Bemærk

ordinaltal, dvs. at ξ_n er et tælleligt venstreafsnit i vores mængde. Nu er $\sup_{n \in \mathbb{N}} \xi_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \xi_n$ hvor ordinaltallene på højresiden opfattes som venstreafsnit. Som nævnt kan højresiden højst være en tællelig mængde hvorfor venstresiden må være skarpt mindre end ω_1, der jo var det første, dvs. mindste, overtællelige ordinaltal. Ud fra ordningen af L kan det let ses at $\sup_{n \in \mathbb{N}} l_n \leqslant (1 + \sup_{n \in \mathbb{N}} \xi_n, 0) < \omega_1$.

at $b(l_1) > a$ automatisk er opfyldt fra konstruktionen af A. På samme måde findes til hvert $i = 2, \ldots$ et $l_i > l_{i-1}$ så $b(l_{i-1}) > b(l_i) > a$. Herefter betragtes $l^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} l_i < \omega_1$, som så er et ordinaltal af type 2. Nu må der findes et $l' > l^*$ så $b(l_0) > b(l') > a$, thi ellers ville $b(l_0)$ opfylde betingelsen for b med $B = \{b(l_0)\} \cup \{l \in A | l \geqslant l^*\}$. Så fortsættes processen ved at finde $l'_0 < l'_1 < \ldots$ så $b(l'_0) > b(l'_1) > \ldots > a$ med $l' = l'_0$. Herefter findes et nyt $l' \geqslant \bigcup_{i=0}^{\infty} l'_i$ så $b(l'_0) > b(l') > a$. l'-erne i denne proces definerer via transfinit rekursion en koendelig mængde $B \subseteq A$ så $\forall l > l' \in B : b(l) > b(l')$. Men dette ville i så fald være en velordnet og overtællelig mængde hvilket er en umulighed, der så giver den ønskede modstrid.

Med b, B i hånden er resten let vist. Lad $\psi(b) = d$ og bemærk, at $d > a$ da $a \notin D$, se bemærkning 8.11. Bemærk, at enhver omegn om $O = \{\omega_1\} \times [c, d]$ må indeholde punkter af typen (b, l) med $l \in B$, hvorfor $O \subseteq \overline{U}$. På den anden side er $(x, \omega_1) \notin U$ for alle $x > a$ hvorfor $O \subseteq \partial U$. Men da O tydeligvis er homeomorft med I, følger det af eksempel 8.2 at $\operatorname{ind} \partial U \geqslant 1$. □

Hermed er der endeligt gjort klart til at konstruere vores rum S.

Eksempel 8.21: Lad Y_1, Y_2 være lineart ordnede mængder, således at Y_1, Y_2 er ordensisomorfe med L og $Y_1 \cap Y_2 = \{y_0\}$, hvor y_0 er det største element i Y_1, Y_2 svarende til ω_1 i L. Sæt $Y = Y_1 \cup Y_2$ og lad

$$S = \{(y, t) \in Y \times I | y = y_0 \vee t \in C\}$$

Dette er vores mængde, der dog endnu mangler en topologi. For at finde en sådan betragtes

$$S_1 = \{(y, t) \in S | y \in Y_1\} \text{ og } S_2 = \{(y, t) \in S | y \in Y_2\}.$$

Lad videre M_1, M_2 være tætte delmængder af $\overset{\circ}{I}$ så $M_1 \cap M_2$ er disjunkte. Sådanne mængde eksisterer, f.eks.

$$M_1 = \{t \in \overset{\circ}{I} | t \in \mathbb{Q}\} \qquad M_2 = \{t \in \overset{\circ}{I} | t \in \mathbb{Q} + \sqrt{2}\}$$

Som i lemma 8.20 findes nu surjektioner $\psi_1, \psi_2 : C \to I$ så $x > y \Rightarrow \psi_i(x) \geqslant \psi_i(y)$ for $i = 1, 2$ hvor der gælder lighedstegn netop når x, y er relaterede punkter i D, se bemærkning 8.11. Som i def. 8.12 gives Y_1, Y_2 nu intervaltopologien. Betragt surjektionerne

$$g_i : Y_i \times C \to S_i, i = 1, 2\,,$$

givet ved

$$g_i(y, t) = \begin{cases} (y_0, \psi_i(t)) & \text{hvis } y = y_0, \\ (y, t) & \text{ellers.} \end{cases}, i = 1, 2$$

Giv nu S_i kvotienttopologien m.h.t. g_i, i=1,2. Alt dette er op til homeomorfi det samme som i def. 8.18, og det er umiddelbart klart at S_1, S_2 er homeomorfe med R_M og dermed med R, hvoraf det følger af lemma 8.16, at

$$\operatorname{ind} S_1 = \dim S_1 = \operatorname{ind} S_2 = \dim S_2 = 1$$

Essentielt set er det vi vil gøre, at lime to R_M'er med forskelligt M sammen i $\{\omega_1\} \times I$. For som det tidligere er bemærket er denne delmængde af R_M for et givet M homeomorft med I, hvoraf det følger at delrummene $\{(y_0,t) \in S_1\}, \{(y_0,t) \in S_2\}$ er identiske. Følgelig kan S arve topologien fra S_1, S_2 på sædvanlig vis, dvs. at $U \subseteq S \in \mathcal{T}(S)$ netop når $U \cap S_i \in \mathcal{T}(S_i)$ for både $i = 1, 2$. At dette er en topologi er meget let at vise, og overlades til læseren. Hvad er så lebesguedimensionen af S? Det følger af sætning 4.4 at $\dim S = 1$ da S_1, S_2 er afsluttede delmængder i S. Hvad med Urysohn-Menger-dimensionen af S? Der kommer lemma 8.20 os til hjælp. Lad G være en åben delmængde af Ssåledes at

$$G \cap (\{y_0\} \times I) = \{y_0\} \times \left]\tfrac{1}{4}; \tfrac{3}{4}\right[$$

og lad U være en åben omegn af $\left(y_0, \frac{1}{2}\right)$. Lad $c = \sup\{t \in I | (y_0,t) \in U\}$. Da er $c \leqslant \frac{3}{4} < 1$ og da $M_1 \cap M_2 = \emptyset$ må $c \notin M_1 \vee c \notin M_2$. Men da følger det af lemma 8.20 at $\operatorname{ind} \partial U \geqslant 1$. Altså er $\operatorname{ind} S \geqslant 1$. Dette er egentligt nok til at anvende lemma 8.6 til at vise, at der findes kompakte hausdorffrum, der ikke kan skrives som en invers limes af simplekser. Et noget nedslående resultat, som jeg vil begynde at lappe på i næste afsnit. Man kan iøvrigt vise, at $\operatorname{ind} S = 2$, se f.eks. [Pears]. Bemærk at dette eksempel også godtgør, at der ikke findes nogen sætning svarende til sætning 4.4 for Urysohn-Menger-dimensionen. Dette er en uacceptabel mangel ved et dimensionsbegreb, hvorfor Urysohn-Menger-dimensionen er lidet brugt. $\square$

9 Approksimative inverse systemer

Problemet med at skrive generelle topologiske rum som limes af inverse systemer ligger i, at denne limes i en vis forstand kan blive for lille i forhold til systemet. Som illustreret tidligere kan man risikere at et 1-dimensionelt kompakt hausdorffrum ikke kan skrives som en invers limes af pæne rum. Ønsker vi denne egenskab opfyldt må vi skifte det forholdsvis restriktive grænsebegreb „invers limes“ ud med et mindre restriktivt — „approksimativ invers limes“. Essentielt set er forskellen af ϵ-karakter, dvs. at der introduceres en lille elasticitet i definitionen. Billedligt talt tillader vi altså trådene at slingre lidt i deres vej gennem systemet. Til dette formål er idéen om normale overdækninger helt central.

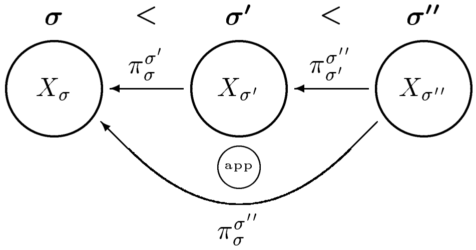
Def 9.1: Lad X, Y være topologiske rum og lad $f, g : X \to Y$ være afbildninger imellem disse. Antag at $\mathfrak{U} \in Cov(Y)$. Da siges f, g at være $\mathfrak{U}$-*nære afbildninger* hvis

$$\forall x \in X \exists U \in \mathfrak{U} : f(x), g(x) \in U$$

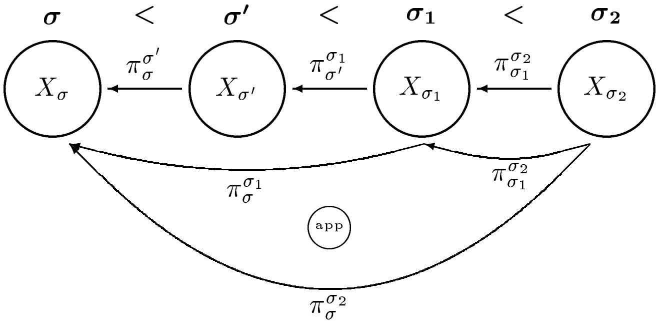
Dette skrives kort $(f, g) < \mathfrak{U}$. $\square$

Bemærkning 9.2: Faktisk vil en normal overdækning inducere et metrisk rum på et passende kvotientrum, hvorved man kan indse sammenhængen mellem def. 9.1 og ϵ, δ-definitioner. $\square$

Med dette simple begreb er vi klar til at definere approksimative inverse systemer. Det kan måske være en hjælp at kikke på figur 10 og figur 11 under læsningen af betingelserne (27) og (28). I disse og efterfølgende figurer betyder



Figur 10: Betingelse (27). Givet $\sigma < \sigma' < \sigma''$ skal π'erne være $\mathfrak{U}_\sigma$-nære i en passende forstand.



Figur 11: Betingelse (28). Givet et $\sigma \in \Sigma$ og et $\mathfrak{U} \in Cov(X_\sigma)$ findes der et σ' så ovenstående diagram gælder m.h.t. $\mathfrak{U}$ for ethvert valg af $\sigma_2 > \sigma_1 > \sigma'$.

cirkler med teksten „app“ indeni at funktionerne udenom kommuterer pånær en passende normal overdækning, som fremgår af den tilhørende betingelse.

Def 9.3: Lad Σ være en opad filtrerende præordnet mængde uden noget maksimalt element. Lad til hvert $\sigma \in \Sigma$ et rum X_σ samt en normal overdækning $\mathfrak{U}_\sigma$ være givet. Denne normale overdækning kaldes *garnet*[11] hørende til X_σ. Lad til hver $\sigma < \sigma'$ en kontinuert afbildning $\pi_\sigma^{\sigma'} : X_{\sigma'} \to X_\sigma$, hvor $\pi_\sigma^\sigma = id_{X_\sigma}$, være givet. Da kaldes $\mathfrak{X} = \{X_\sigma, \mathfrak{U}_\sigma, \pi_\sigma^{\sigma'}, \Sigma\}$ for et *inverst approksimativt system,* eller blot et *approksimativt system,* dersom følgende tre betingelse er opfyldt:

(27) $\forall \sigma < \sigma' < \sigma'' : (\pi_\sigma^{\sigma'} \pi_{\sigma'}^{\sigma''}, \pi_\sigma^{\sigma''}) < \mathfrak{U}_\sigma$.

(28) $\forall \sigma \in \Sigma \forall \mathfrak{U} \in Cov(X_\sigma) \exists \sigma' > \sigma \forall \sigma_2 > \sigma_1 > \sigma' : (\pi_\sigma^{\sigma_1} \pi_{\sigma_1}^{\sigma_2}, \pi_\sigma^{\sigma_2}) < \mathfrak{U}$.

(29) $\forall \sigma \in \Sigma \forall \mathfrak{U} \in Cov(X_\sigma) \exists \sigma' > \sigma \forall \sigma'' > \sigma' : \mathfrak{U}_\sigma < (\pi_\sigma^{\sigma''})^{-1}(\mathfrak{U})$,

hvor

$$(\pi_\sigma^{\sigma''})^{-1} I(\mathfrak{U}) = \left\{ (\pi_\sigma^{\sigma''})^{-1}(U) | U \in \mathfrak{U} \right\}.$$

□

Vi har straks følgende:

[11] I [MW 89] kaldes garnene for „mesh“. Jeg har oversat dette med garn for at undgå forvirring med hensyn til operatoren „mesh“ og begrebet „net“.

Bemærkning 9.4: Bemærk at hvis et $\sigma' \in \Sigma$ opfylder (28) eller (29) vil ethvert $\sigma^* > \sigma'$ gøre det samme. Da Σ er opad filtrerende findes der derfor et σ^* der opfylder både (28) og (29). Et lignende argument vil ofte være underforstået i resten af dette speciale.

Bemærk iøvrigt, at da Σ er uden et maksimalt element kan ingen endelig delmængde af Σ være koendelig, dvs. for givet $n \in \mathbb{N}$ gælder

$$\forall\{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\}\exists\sigma_0 \in \Sigma\forall i \in \{1, \ldots, n\} : \sigma_i \leqslant \sigma_0$$

Endeligt lige et par bemærkninger om forskellene mellem approksimative systemer og inverse systemer. Først og fremmest er kravet om at Σ ikke har noget maksimalt element en teknisk bekvem foranstaltning. Thi er σ_0 et maksimalt element i Σ kan Σ blot tilføjes en kopi af $\mathbb{N}$ hvor $\sigma_0 < n$, $X_n = X_{\sigma_0}$, $\pi_n^{\sigma_0} = \pi_n^m = id_{X_{\sigma_0}}$ for alle $n \in \mathbb{N}$ og $m > n$. Denne tilføjelse ændrer ikke egenskaber som invers approksimativ limes (defineret nedenfor) ved systemet.

Bemærk iøvrigt at betingelserne (27) og (28) svarer til kravet om at bindingsafbildningerne i et inverst system kommuterer: (27) kræver at enhver *totalt ordnet tripel* af π'erne approximativt kommuterer m.h.t. garnet fra det mindste element i tripelen, mens (28) kræver at π'erne approksimativt kommuterer m.h.t. en *vilkårlig normal overdækning*, blot elementerne i tripelen ligger tilpas langt fra hinanden. Den sidste betingelse, (29), sikrer at garnene i systemet er fine nok. Et inverst system er derfor oplagt et approksimativt system. □

Jeg vil indføre følgende konvention, der også stammer fra [MW 89]:

Def 9.5: Lad $\mathcal{X} = \{X_\sigma, \mathfrak{U}_\sigma, \pi_\sigma^{\sigma'}, \Sigma\}$ være et approximativt system. Hvis vi undlader at betragte garnene, dvs. nøjes med at betragte systemet $\mathbf{X} = \{X_\sigma, \pi_\sigma^{\sigma'}, \Sigma\}$ har vi et *associeret* system, som jeg også vil kalde et *approksimativt system*. Bemærk at førstnævnte noteres med et skrevet $\mathcal{X}$ mens sidstnævnte benævnes med et fedt $\mathbf{X}$. Ethvert approksimativt system $\mathbf{X}$ har altså mindst ét associeret, approksimativt system $\mathcal{X}$, der så ikke i almindelighed er entydigt, mens hvert approksimativt system $\mathcal{X}$ har et entydigt associeret approksimativt system $\mathbf{X}$. Overgang fra det ene til det andet vil ikke være ualmindeligt i det følgende. □

Som i inverse systemer kan vi betragte limes af approksimative systemer. Dette gøres i det følgende, idet jeg dog først vil indføre følgende.

Def 9.6: Lad X være et topologisk rum og lad $\mathbf{X} = \{X_\sigma, \pi_\sigma^{\sigma'}, \Sigma\}$ være et approksimativt system. Lad nu $\underline{\pi} = \{\pi_\sigma | \sigma \in \Sigma\} : X \to \mathbf{X}$ være en familie af kontinuerte afbildninger $\pi_\sigma : X \to X_\sigma$ der opfylder følgende:

(30) $\forall\sigma \in \Sigma\forall\mathfrak{U} \in Cov(X_\sigma)\exists\sigma' > \sigma\forall\sigma'' > \sigma' : (\pi_\sigma^{\sigma''}\pi_{\sigma''}, \pi_\sigma) < \mathfrak{U}.$

Da siges $\underline{\pi}$ at være en *approksimativ afbildning.* □

Vi kan nu definere en grænse af et approksimativt system:

Def 9.7: Lad $\mathbf{X} = \{X_\sigma, \pi_\sigma^{\sigma'}, \Sigma\}$ være et approksimativt system, lad X være et topologisk rum og lad $\underline{\pi}$ være en approksimativ afbildning af X i $\mathbf{X}$. Da siges $\underline{\pi}$ at være en *limes* eller en *grænse* af $\mathbf{X}$ hvis følgende egenskab er opfyldt: for ethvert topologisk rum Y og approksimativ afbildning $\underline{\rho} : Y \to \mathbf{X}$ skal der findes en entydig afbildning $g : X \to Y$ så

(31) $\forall\sigma \in \Sigma : \pi_\sigma g = \rho_\sigma$

□

Lemma 9.8: Lad $\mathbf{X} = \{X_\sigma, \pi_\sigma^{\sigma'}, \Sigma\}$ være et approksimativt system, lad X,Y være et topologiske rum og lad $\underline{\pi} : X \to \mathbf{X}$ og $\underline{\rho} : Y \to \mathbf{X}$ være grænser af $\mathbf{X}$. Da findes en homeomorfi $g : X \to Y$ mellem X og Y. Dette giver anledning til at tale om *grænsen* af et approksimativt system $\mathbf{X}$.

Bevis: Lad $\underline{\pi}, \underline{\rho}$ være givet som i lemmaet. Da findes der ifølge def. 9.7 afbildninger $g : X \to Y$ og $h : Y \to X$ som opfylder (31). Nu er for givet $\sigma \in \Sigma$

$$\pi_\sigma \circ g \circ h = \rho_\sigma \circ h = \pi_\sigma,$$

hvoraf $g \circ h : X \to X$ opfylder (31), idet $g \circ h$ klart er approksimativ, idet g, h er det. Bemærk at for givet $\sigma \in \Sigma$ opfylder $\pi_\sigma id_X = \pi_\sigma$ trivielt (31) hvoraf

$$id_X = g \circ h,$$

p.g.a. entydigheden fra def. 9.7. Ligeledes må

$$id_X = h \circ g.$$

Men da h, g er kontinuerte følger det nu, at $g : X \to Y$ er en homeomorfi med h som den kontinuerte inverse. □

Def. 9.7 er lidet konstruktiv og har ikke nogen klar forbindelse med def. 5.1. Det vil følgende definition og sætning råde bod på:

Def 9.9: Lad $\mathbf{X} = \{X_\sigma, \pi_\sigma^{\sigma'}, \Sigma\}$ være et approximativt system. Et punkt $x = (x_\sigma) \in \prod_{\sigma \in \Sigma} X_\sigma$ kaldes en *tråd* i $\mathbf{X}$ hvis følgende betingelse er opfyldt:

(32) $\forall \sigma \in \Sigma \forall \mathfrak{U} \in Cov(X_\sigma) \exists \sigma' > \sigma \forall \sigma'' > \sigma' : \pi_\sigma^{\sigma''}(x_{\sigma''}) \in \mathrm{St}(x_\sigma, \mathfrak{U}).$

□

Ovenstående bærer en vis lighed med konvergens af net, og der gælder faktisk:

Bemærkning 9.10: Hvis $\{\mathrm{St}(x_\sigma, \mathfrak{U}) | \mathfrak{U} \in Cov(X)\}$ er en lokal basis omkring x_σ for hvert $\sigma \in \Sigma$ er ovenstående ækvivalent med

(33) $\forall \sigma \in \Sigma : \lim\limits_{\sigma'' > \sigma} \pi_\sigma^{\sigma''} x_{\sigma''} = x_\sigma$

Specielt gælder dette hvis hvert X_σ er et tychonoffrum. □

Næste sætning er helt central for approksimative systemer. Bemærk bevisgangen og sammelign med ϵ, δ-beviser — slægtskabet er meget tydeligt.

Sætning 9.11: Lad $\mathbf{X} = \{X_\sigma, \pi_\sigma^{\sigma'}, \Sigma\}$ være et approksimativt system og lad $X \subseteq \prod_{\sigma \in \Sigma}$ være mængden af tråde i $\mathbf{X}$. Lad nu $\pi_\sigma : X \to X_\sigma$ være projektionen $p_\sigma : \prod X_\sigma \to X_\sigma$ restringeret til X. Da er $\underline{\pi} = \{\pi_\sigma | \sigma \in \Sigma\}$ en grænse af $\mathbf{X}$, der er entydig op til homeomorfi. Ovennævnte udgave af grænsen kaldes den *kanoniske grænse af* $\mathbf{X}$.

Bevis: Entydigheden haves straks af lemma 9.8. Nu ønskes bevist, at $\underline{\pi}$ er en approksimativ afbildning. Lad altså $\sigma \in \Sigma$ og $\mathfrak{U} \in Cov(X)$ være givet. Vælg et $\mathfrak{V} \in Cov(X)$ så $\mathfrak{V}^* < \mathfrak{U}$.

Lad nu $x = (x_\sigma) \in X$ og vælg et $\sigma' \in \Sigma$ der opfylder (28) og (29), se evt. bemærkning 9.4. Lad et $\sigma'' > \sigma'$ være givet. Jeg vil nu vise

(34) $(\pi_\sigma^{\sigma''}\pi_{\sigma''}, \pi_\sigma) < \mathfrak{U}$.

Af (32) anvendt på $\sigma, \mathfrak{V}$ og på $\sigma'', \mathfrak{U}_{\sigma''}$ haves et $\sigma^* > \sigma''$ der opfylder (32) anvendt på begge par[12] så

$$\pi_\sigma^{\sigma^*} x_{\sigma^*} \in \mathrm{St}(x_\sigma, \mathfrak{V}),$$

og så

$$\pi_{\sigma'}^{\sigma^*} x_{\sigma^*} \in \mathrm{St}(x_{\sigma''}, \mathfrak{U}_{\sigma''}).$$

Følgeligt findes der $V_1 \in \mathfrak{V}$ og $U_1 \in \mathfrak{U}_{\sigma''}$ så

(35) $\pi_\sigma^{\sigma^*}(x_{\sigma^*}), x_\sigma \in V_1,$ og så

(36) $\pi_{\sigma''}^{\sigma^*}(x_{\sigma^*}), x_{\sigma''} \in U_1.$

Da σ' opfylder (29) og da $\sigma'' > \sigma'$ vil

$$\mathfrak{U}_{\sigma''} < \left(\pi_\sigma^{\sigma''}\right)^{-1}(\mathfrak{V}).$$

Følgeligt findes $V_2 \in \mathfrak{V}$ så $\pi_\sigma^{\sigma''}(U_1) \subseteq V_2$, hvoraf det følger af (36) at

(37) $\pi_\sigma^{\sigma''}\pi_{\sigma''}^{\sigma^*}(x_{\sigma^*}), \pi_\sigma^{\sigma''}(x_{\sigma''}) \in V_2.$

Nu opfylder σ' også (28) hvoraf

$$\left(\pi_\sigma^{\sigma''}\pi_{\sigma''}^{\sigma^*}, \pi_\sigma^{\sigma^*}\right) < \mathfrak{V}.$$

Af dette haves en mængde $V_3 \in \mathfrak{V}$ så

(38) $\pi_\sigma^{\sigma''}\pi_{\sigma''}^{\sigma^*}(x_{\sigma^*}), \pi_\sigma^{\sigma^*}(x_\sigma^*) \in V_3.$

Betragt nu (35),(37) og (38). Tilsammen giver disse

$$\pi_\sigma^{\sigma''}(x_{\sigma''}), x_a \in \mathrm{St}(V_3, \mathfrak{V}),$$

se figur 12. Da nu $x_{\sigma''} = \pi_{\sigma''}(x)$ og da $x_\sigma = \pi_\sigma(x)$ haves

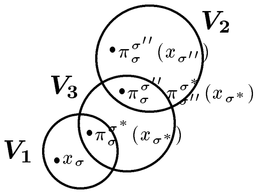
$$\pi_\sigma^{\sigma''}\pi_\sigma(x), \pi_\sigma(x) \in \mathrm{St}(V_3, \mathfrak{V}).$$

Da $x \in X$ var valgt vilkårligt og da $\mathfrak{V}^* < \mathfrak{U}$ haves (34), hvorved $\underline{\pi}$ er vist at være en approksimativ afbildning.

For at vise at $\underline{\pi}$ er en grænse mangler jeg at godtgøre, at $\underline{\pi}$ opfylder (31). Lad derfor $\underline{\rho} = (\rho_\sigma)_{\sigma\in\Sigma} : Y \to \mathbf{X}$ være en approksimativ afbildning og lad $y \in Y$ og $\sigma \in \Sigma$. Sæt $x_\sigma = \rho_\sigma(y)$ og $x = (x_\sigma)_{\sigma\in\Sigma} \in \prod X_\sigma$. Lad $g : Y \to \prod X_\sigma$ være givet ved $g(y) = (x_\sigma)_{\sigma\in\Sigma}$. Da er

$$p_\sigma g = \rho_\sigma, \sigma \in \Sigma.$$

[12]At der findes ét σ^* der opfylder begge følger af at Σ er opad filtrerende.



Figur 12: V_1 og V_3 har et fælles element og ligeså har V_3 og V_2. Følgeligt indeholder $\mathrm{St}(V_3, \mathfrak{V})$ såvel V_1 som V_2.

Nu er $\underline{\rho}$ en approksimativ afbildning, dvs. at der til hvert $\sigma \in \Sigma$ og $\mathfrak{U} \in Cov(X_\sigma)$ findes et $\sigma' > \sigma$ så for $\sigma'' > \sigma'$ gælder at $(\pi_\sigma^{\sigma''}\rho_{\sigma''}, \rho_\sigma) < \mathfrak{U}_\sigma$. Derfor må $x_{\sigma''}, x_\sigma$ ligge i samme tråd for et givet $x = g(y)$. Thi af ovenstående haves, at der findes et $U \in \mathfrak{U}$ så $\pi_\sigma^{\sigma''}(x_{\sigma''}) = \pi_\sigma^{\sigma''} q_{\sigma''}(y) \in U$ og så $x_\sigma = q_\sigma(y) \in U$. Følgeligt er $\pi_\sigma^{\sigma''}(x''_\sigma) \in \mathrm{St}(x_\sigma, \mathfrak{U})$.

Men da er $(x_\sigma)_{\sigma\in\Sigma}$ en tråd og dermed er $(x_\sigma) \in X$. Følgeligt er $g(Y) \subseteq X$. Tilbage står at vise, at g er den eneste afbildning fra Y ind i X så $\forall \sigma \in \Sigma$: $p_\sigma g = \rho_\sigma$. Men højre side af lighedstegnet er uafhængigt af valg af g, og da to funktioner på en produktmængde er ens, hvis deres projektioner er det følger entydigheden heraf. $\square$

Nu vil jeg så vise, at en approksimativ limes af kompakte hausdorffrum selv er et kompakt hausdorffrum. Dette gøres ved at vise at en approksimativ limes er afsluttet. Bemærk at bevisteknikken ligner den der blev brugt i ovenstående bevis.

Sætning 9.12: Lad $\mathbf{X} = \{X_\sigma, \pi_\sigma^{\sigma'}, \Sigma\}$ være et approksimativt system. Da er den kanoniske limes X afsluttet i $\prod_{\sigma\in\Sigma}$.

Bevis: Det ønskes bevist at $O = \prod X_\sigma \setminus X$ er åben i $\prod X_\sigma$. Lad derfor et $x = (x_\sigma) \in O$ være givet. Da x så ikke er en tråd må der findes et $\sigma \in \Sigma$ og et $\mathfrak{U} \in Cov(X_\sigma)$ så

(39) $\forall \sigma' > \sigma \exists \sigma'' > \sigma' : \pi_\sigma^{\sigma''}(x''_\sigma) \notin \mathrm{St}(x_\sigma, \mathfrak{U})$.

Da $\mathfrak{U} \in Cov(X_\sigma)$ findes der et $\mathfrak{V} \in Cov(X_\sigma)$ så

(40) $\mathfrak{V}^{**} = (\mathfrak{V}^*)^* < \mathfrak{U}$

Af def. 9.3 findes der nu et $\sigma' > \sigma$ så

(41) $\forall \sigma_2 > \sigma_1 > \sigma' : (\pi_\sigma^{\sigma_2}, \pi_\sigma^{\sigma_1}\pi_{\sigma_1}^{\sigma_2}) < \mathfrak{V}$

(42) $\forall \sigma_2 > \sigma' : \mathfrak{U}_{a_2} < (\pi_\sigma^{\sigma_2})^{-1}(\mathfrak{V})$

Vælg nu et σ'' i henhold til (39). Da findes der et $\mathfrak{W} \in Cov(\prod X_\sigma)$ så

$$\mathfrak{W} < \pi_\sigma^{-1}(\mathfrak{V}), \pi_{\sigma''}^{-1}(\mathfrak{U}_{\sigma''}).$$

Sættes $G = \mathrm{St}(x, \mathfrak{W})$ er G en åben mængde hvorfor det er nok at vise, at $G \subseteq O$.

Antag derfor det modsatte, dvs. at der findes et $y = (y_\sigma) \in X \cap G$. Da giver (32) anvendt først med $\mathfrak{U} = \mathfrak{V}$ og derefter med $\sigma = \sigma''$ og $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}_{\sigma''}$ et $\sigma_1 > \sigma''$

således at ethvert $\sigma_2 > \sigma_1$ opfylde både

(43) $\pi_{\sigma}^{\sigma_2}(y_{\sigma_2}) \in \mathrm{St}(y_\sigma, \mathfrak{V})$ og

(44) $\pi_{\sigma''}^{\sigma_2}(y_{\sigma_2}) \in \mathrm{St}(y_{\sigma''}, \mathfrak{U}_{\sigma''})$.

Af (41) og (42) haves

(45) $(\pi_\sigma^{\sigma_2}, \pi_\sigma^{\sigma''}\pi_{\sigma''}^{\sigma_2}) < \mathfrak{V}$ og

(46) $\mathfrak{U}_{\sigma''} < (\pi_\sigma^{\sigma''})^{-1}(\mathfrak{V}))$

Da nu $y \in G = \mathrm{St}(x, \mathfrak{W})$ findes der et $V_1 \in \mathfrak{W}$ og et $U_1 \in \mathfrak{U}_{\sigma''}$

$$x, y \in \pi_\sigma^{-1}(V_1) \cap \pi_{\sigma''}^{-1}(U_1),$$

da $\mathfrak{W}$ forfiner både $\pi_\sigma^{-1}(\mathfrak{V})$ og $\pi_{\sigma''}^{-1}(\mathfrak{U}_{\sigma''})$. Følgeligt haves følgende to udsagn:

(47) $x_\sigma, y_\sigma \in V_1$

(48) $x_{\sigma''}, y_{\sigma''} \in U_1$

Af (43) og (44) findes der et $V_2 \in \mathfrak{V}$ og et $U_2 \in \mathfrak{U}_{\sigma''}$ så

(49) $y_\sigma, \pi_\sigma^{\sigma_2}(y_{\sigma_2}) \in V_2$.

(50) $y_{\sigma''}, \pi_{\sigma''}^{\sigma_2}(y_{\sigma_2}) \in U_2$.

Af (45) haves nu et $V_3 \in \mathfrak{V}$ så

(51) $\pi_\sigma^{\sigma_2}(y_{\sigma_2}), \pi_\sigma^{\sigma''}\pi_{\sigma''}^{\sigma_2}(y_{\sigma_2}) \in V_3$

Til sidst haves ifølge (46) to mængder $V_4, V_5 \in \mathfrak{V}$ så

$$U_1 \subseteq (\pi_\sigma^{\sigma''})(V_4) \text{ og } U_2 \subseteq (\pi_\sigma^{\sigma''})^{-1}(V_5).$$

Da følger det af hhv. (48) og af (50) at

(52) $\pi_\sigma^{\sigma''}(x_{\sigma''}), \pi_\sigma^{\sigma''}(y_{\sigma''}) \in V_4$ og

(53) $\pi_\sigma^{\sigma''}(y_{\sigma_2}), \pi_\sigma^{\sigma''}\pi_{\sigma''}^{\sigma_2}(y_{\sigma_2}) \in V_5$.

Nu haves af (52), (53), (51), (49), (47) og slutteligt (40) situationen skitseret i figur 13. Dermed må

$$\pi_\sigma^{\sigma''}(x_{\sigma''}) \in \mathrm{St}(x''_\sigma, \mathfrak{B}^{**}) \subseteq \mathrm{St}(x_\sigma, \mathfrak{U}),$$

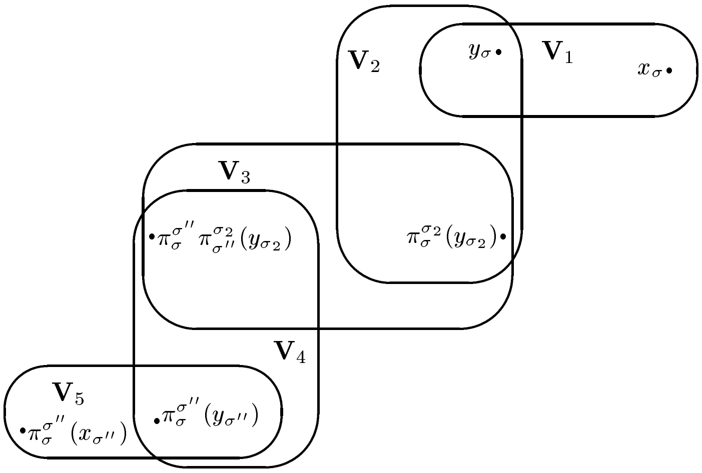
hvilket er i modstrid med (39). □

Nu haves

Korollar 9.13: Lad $\mathbf{X} = \{X_\sigma, \pi_\sigma^{\sigma'}, \Sigma\}$ være et approksimativt system hvor X_σ er et kompakt hausdorffrum for alle $\sigma \in \Sigma$. Da $\varprojlim \mathbb{X}$ et kompakt hausdorffrum.

Bevis: Da X_σ'erne er kompakte hausdorffrum er $\prod_{\sigma\in\Sigma} X_\sigma$ et kompakt hausdorffrum. Da $\varprojlim \mathbb{X}$ er et afsluttet underrum af $\prod X_\sigma$ ifølge sætning 9.12 er $\varprojlim \mathbf{X}$ et kompakt hausdorffrum. □

I lyset af bemærkning 8.7 kunne man spørge om et kompakt hausdorffrum X med $\dim X \leqslant n$ for et passende n kan skrives som en approksimativ limes af f.eks. terninger. Og dette kan faktisk lade sig gøre.



Figur 13: Ovenstående skitse illustrerer bevisgangen i sidste del af sætning 9.12. Bemærk at $V_1 \cup cdot \cup V_5 \in \mathfrak{V}^{**} < \mathfrak{U}$

Sætning 9.14: Lad X være et kompakt hausdorffrum med $\dim X \leqslant n$ for et passende n. Da findes der et approksimativt system $\mathfrak{Q} = \{Q_\sigma, \mathfrak{U}_\sigma, pi_\sigma^{\sigma'}, \Sigma\}$ af afsluttede delmængder af endelige terninger Q_σ med lebesguedimension højst n så $\varprojlim \mathfrak{Q}$ er homeomorft med X.

Bevis: Beviset er ret omfattende og når ikke at komme med her som andet end grove hovedtræk. Interesserede henvises til [Mardešić, pp. 136–143]. Det jeg vil fremhæve her er ligheden med sætning 7.5. Idéen i beviset er at bemærke at X kan antages at være en afsluttet delmængde af en terning I^ξ. Herefter betragtes et system ganske som i sætning 7.5 bestående af delmængder N af endelige terninger I^a, hvor N indeholder projektionen af X på terningerne. Ved at definere en passende ordning på disse opnås det ønskede system. Herefter, ganske som i sætning 7.5, laves en homeomorfi ved at betragte disse projektioner som en afbildning ind i $\mathfrak{X}$. Ved en lignende konstruktion som i def. 5.3 haves dermed en grænsefunktion der så kan vises at være en homeomorfi.

Dette er idéen. Denne føres ud i livet ved en teknik der kombinerer beviserne i dette afsnit med idéerne fra beviset for sætning 7.5. □

Hermed slut på dette speciale. Jeg håber det har været lige så spændende at læse som det var at skrive.

Litteratur

[E-S 52] S. Eilenberg og N. Steenrod: *Foundations of Algebraic Topology*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1952.

[Engelking] R. Engelking: *Generel Topology, Revised and completed edition*, Helderman Verlag, Berlin, 1989.

[MW 89] S. Mardešić og T. Watanabe: *Approximate Resolutions of Spaces and Mappings*, Glasnik Matematički, vol. 24 (44) (1989), pp. 587–637.

[EDM2] Mathematical Society of Japan: *Encyclopedic Dictionary of Mathematics*, The MIT Press, Cambridge, Massachusetts, and London, England, 1993.

[Mardešić] S. Mardešić: *Approximate inverse systems of compacta and covering dimension*, Pacific J. Math. 138 (1989), no. 1, pp. 129–144.

[Morita 70] K. Morita: *Topological completion and M-spaces*, Scientific Report Tokyo Kyoiku Daigaku, Sect. A, 10 (1970), pp. 271–288.

[Morita 73] K. Morita: *On the dimension of the product of Tychonoff spaces*, General Topology and Applications 3 (1973), pp. 125–133.

[Morita 75] K. Morita: *Čech cohomology and covering dimension for topological spaces*, Fundamenta Mathematicae LXXXVII (1975), pp. 31–52.

[Nagata] J. Nagata: *Modern Dimension Theory, revised and extended edition*, Heldermann Verlag Berlin, 1983.

[Pears] A.R. Pears: *Dimension Theory of General Spaces*, Cambridge University Press, Cambridge, 1975.