MASO

Uge 8, 27. oktober-2.november, 2008

Forelæsninger

Mandag 27. oktober videreføres studiet af ligningsystemer til systemer af m ligninger med n ubekendte, hvor $n > m$. Hovedresultatet er *sætningen om implicit givne funktioner*. I første omgang ser vi på en ligning med to ubekendte og skulle gerne nå at formulere og illustrere Sætning 5.3.1.

Torsdag 30. oktober afsluttes omtalen af sætningen om implicit givne funktioner svarende til resten af afsnit S 5.3 med hovedvægt på sætning 5.3.2.

Regneøvelser 27. og 29. oktober

Følgende opgaver regnes:

Opgave 22 Lad afbildningerne $\mathbf{f}, \mathbf{g} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ være givne ved

$$\mathbf{f}(x, y) = (3x - 2y^2, x^2 + 5y) \quad \text{og} \quad \mathbf{g}(u, v) = (u + v, u - v)\,.$$

Opskriv funktionsudtrykket for $\mathbf{f} \circ \mathbf{g}(u, v)$ og eftervis, at kædereglen

$$(\mathbf{f} \circ \mathbf{g})'(1, 1) = \mathbf{f}'(2, 0) \cdot \mathbf{g}'(1, 1)$$

er opfyldt ved at udregne begge sider af denne ligning.

Opgave 23 Lad afbildningerne $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ og $\mathbf{g} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ være givne ved

$$\mathbf{f}(x, y) = x^3 + y^2 + xy \quad \text{og} \quad \mathbf{g}(t) = (t, t^2)\,.$$

a) Bestem Jacobimatricerne $\mathbf{f}'(x, y)$ og $\mathbf{g}'(t)$.

b) Bestem funktionsudtrykket for $\mathbf{f} \circ \mathbf{g}(t)$ og eftervis kædereglen

$$(\mathbf{f} \circ \mathbf{g})'(t) = \mathbf{f}'(\mathbf{g}(t)) \cdot \mathbf{g}'(t)$$

ved at udregne begge sider af denne ligning.

Opgave 24 Lad afbildningerne $\mathbf{f}, \mathbf{g}, \mathbf{h}, \mathbf{k} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ være givne ved

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}(x,y) &= (x^4 - 2x^2y^2 + y^4, -x^4 + 2x^2y^2) \\
\mathbf{g}(u,v) &= (u^2, v^2 - 2u^2) \\
\mathbf{h}(s,t) &= (s, \sqrt{s^2 + t^2}\,) \\
\mathbf{k}(x,y) &= (x^2 - y^2, y^2)\,.
\end{aligned}$$

a) Eftervis, at $\mathbf{f} = \mathbf{g} \circ \mathbf{h} \circ \mathbf{k}$.
b) Beregn $\mathbf{f}'(1, -2)$.

Opgave S 5.2.1 med følgende præcisering:
Den givne afbildning er ikke en-entydig (injektiv) i $\mathbb{R}^2$. Bestem en åben delmængde af $\mathbb{R}^2$, på hvilken den er en-entydig, og find den tilsvarende inverse afbildning.

Opgave S 5.2.2

Til skriftlig aflevering: Opgave 25

a) Gør rede for, at mængden

$$A = \{(x,y) \mid \ x \geq 4\,, \ \ \ln x \leq y \leq \sqrt{x}\}$$

er en afsluttet delmængde af $\mathbb{R}^2$.

b) Afgør, om A er kompakt.

c) Gør rede for, at afbildningen $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ givet ved

$$g(t) = (e^t, t + \cos t)\,, \quad t \in \mathbb{R}\,,$$

er kontinuert.

d) Gør rede for, at mændgen

$$B = \{t \mid \ g(t) \in A\}$$

er en afsluttet delmængde af $\mathbb{R}$.