MASO

Uge 4, 22.- 28. september, 2008

Forelæsninger

Mandag 22. september indføres begreberne *delfølge* (nederst p.18 i GG) og *Cauchy følge* (også kaldet *fundamentalfølge*), se p.36 i GG. Sidstnævnte bruges til at formulere det såkaldte *almindelige konvergensprincip*, der er ækvivalent med supremumsegenskaben, men til mange formål mere nyttigt, f.eks. når vi senere skal behandle punktfølger.

Det skal bemærkes, at omtalen af limsup og liminf p.33-36 midt overspringes og delvis erstattes af uddrag af afsnit 4.4 i tillægsnoterne.

Torsdag 25. september indføres de komplekse tal $\mathbb{C}$ som en udvidelse af de reelle tal, således at eksempelvis ligningen $x^2 = -1$ har en løsning i $\mathbb{C}$, kaldet i. Alle de grundlæggende regneregler (1.1)-(1.9) i GG §1 er fortsat gældende i $\mathbb{C}$, men ordningen af de reelle tal kan ikke udvides til $\mathbb{C}$. Der vil især blive lagt vægt på den geometriske betydning af addition og multiplikation af komplekse tal. Vi skulle gerne nå første halvdel af §5 i GG.

Regneøvelser 22. og 24. september

Følgende opgaver regnes:

Opgave 12 Afgør ved brug af sammenligningskriteriet for hver af følgende rækker, om den er konvergent eller divergent.

$$a) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7n^2+3}{4n^3-2} \qquad b) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-7}{4n^3+8} \qquad c) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n}$$

Vink. Vedr. c): Man kan bruge, at $\sin x \geq \frac{2}{\pi}x$, for $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Tegn grafen for sinus i intervallet $[0, \frac{\pi}{2}]$ for at overbevise dig om denne ulighed.

Opgave 13 Afgør ved brug af kvotientkriteriet for hver af følgende tre rækker, hvorvidt den er konvergent eller divergent.

$$a)\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n} \qquad b)\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^{10}} \qquad c)\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$$

Øvelse 3.4 i GG.

Øvelse 3.5 i GG.

Vink. Se Eksempel 12.2.14 i tillægsnoterne vedr. den første række.

Opgave 14

a) Forklar, hvorfor

$$0,231231231\ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{231}{1000^n}$$

b) Vis, at $0,231231231\ldots = \frac{231}{999}$

c) Brug samme fremgangsmåde til at skrive $0,473181818...$ som en brøk.

Opgave 15 til skriftlig aflevering.

a) Gør rede for, at rækken

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \ldots$$

er konvergent for ethvert reelt tal $x \geq 0$. - Man kan vise, at summen er e^x:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\,,$$

men det skal ikke gøres her. (Her bruges den sædvanlige konvention $0! = 1$.)

b) Gør rede for, at rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots$$

er konvegent for $x \in [0,1[$ og divergent for $x \geq 1$. - Man kan vise, at summen er $-\ln(1-x)$, ifald den er konvergent:

$$\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \, .$$

Trykfejl i GG:

side 1_7: (-1) skal være $(-)$
side 2^9: $(187-$ skal være $(287-$
side 9_9: $n > M$ skal være $n > N$