Matematisk analyse og statisk optimering

72 timers skriftlig hjemmeopgave
17.-20. december 2007

Opgaven består af 5 delopgaver, der vægtes ens ved bedømmelsen, og er på 3 sider.
Besvarelsen, der udarbejdes individuelt af hver studerende, skal indeholde en forside, hvorpå anføres tydeligt navn og cpr. nr. samt antal sider (inklusive forside), og sammenhæftes i øverste venstre hjørne. Der må kun skrives på en side på hvert ark og med tydeligt læsbar skrift. Besvarelsen underskrives på forsiden.
Aflevering i to eksemplarer på MØK-sekretariatet skal ske senest torsdag den 20. december kl. 12.00.
Ved bedømmelsen lægges der vægt på, at resultaterne fremtræder klart og præcist, og at de er begrundede med argumenter eller med nøjagtige henvisninger til undervisningsmaterialet. Der henvises til lærebogen (Sydsæter, bind II [S]), til noterne (Grubb og Gutmann Madsen [GG] og Fuglede [F]), til de udleverede tillægsnoter (Lindstrøm [L]) eller til ugesedlerne.
En fyldestgørende besvarelse af opgavesættet vil kunne gives på under 10 håndskrevne A4-sider, og besvarelsen må under ingen omstændigheder overstige 15 sider.

Opgave 1

Lad talfølgerne $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ og $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ være givne ved

$$a_n = \frac{1+2^{-n}n^5}{3n^2+2n}\,, \qquad b_n = \frac{e^n}{2^n+n^5}\,, \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

a) Gør rede for, at rækken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er konvergent og at $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n}$ er divergent.

b) Gør rede for, at rækkerne $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ og $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{b_n}$ begge er divergente.

c) Afgør, for hver af rækkerne $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b_n}$ og $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n b_n}$, om den er konvergent eller divergent.

Opgave 2

Lad polynomiet f være givet ved

$$f(z) = (z^2 + 2z + 2)(z^2 + (2 - 4i)z - 3 - 2i)\,.$$

a) Bestem samtlige rødder i f.

b) Beregn produktet α af de af rødderne i f, hvis realdel er negativ, og angiv resultatet på formen $x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$.

c) Bestem $|\alpha|$ og $\operatorname{Arg}\alpha$ med to decimalers nøjagtighed.

Opgave 3

Lad delmængden S af $\mathbb{R}^3$ være givet ved

$$S = \{(x, y, z) \mid \; x + 2y + 3z \leq 2\,,\; x - 5y + z \leq -1\,\}\,,$$

og lad funktionen $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ være defineret ved

$$f(x, y, z) = -2x^2 - 2y^2 - z^2 + 2xy + 2yz\,.$$

a) Gør rede for, at S er en afsluttet men ikke kompakt delmængde af $\mathbb{R}^3$.

b) Opstil Kuhn-Tucker betingelserne for optimeringsproblemet: Maksimer $f(x, y, z)$ for $(x, y, z) \in S$.

   Bestem samtlige punkter i S, der opfylder Kuhn-Tucker betingelserne.

c) Gør rede for, at f er en konkav funktion. Begrund, at der findes mindst en optimal løsning til optimeringsproblemet i b) og find en sådan.

Opgave 4

Lad $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være en C^1-funktion og antag, at $f(0) = 1$ samt $f'(0) = -1$.

a) Gør rede for, at ethvert punkt af formen $(x, y, z, u) = (s, -s, -s, s)$, hvor $s \in \mathbb{R}$, opfylder ligningen

$$f(xy - zu) + (x + y)f(z + u) + (z + u)f(x + y) = 1\,,$$

   og begrund, at der for hvert $s \neq 1$ gælder, at ligningen i en omegn af punktet $(s, -s, -s, s)$ bestemmer u som en C^1-funktion af (x, y, z).

b) Lad g betegne den ved a) bestemte C^1-funktion for $s = -1$, d.v.s. $u = g(x, y, z)$ i en omegn af punktet $(-1, 1, 1, -1)$. Bestem de partielle afledede af u i $(-1, 1, 1)$, d.v.s. bestem gradienten $\nabla g(-1, 1, 1)$.

Opgave 5

Betragt følgende lineære program

(P) Maksimer $7x_1 - x_2 - 4x_3$ under hensyn til bibetingelserne

$$\begin{aligned} 3x_1 - 5x_2 + x_3 &\leq 1 \\ -x_1 + 4x_2 + 2x_3 &\leq 2 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 &\leq -2 \end{aligned}$$

og fortegnskravet $x_1 \geq 0$.

a) Opskriv det duale program (P').

b) Find samtlige tilladte løsninger til (P').

c) Find samtlige optimale løsninger til (P') og bestem den optimale værdi for (P').

d) Find samtlige optimale løsninger til (P).