Matematisk analyse og statisk optimering

72 timers skriftlig hjemmeopgave
30.juli - 2. august 2007

Opgaven består af 5 delopgaver, der vægtes ens ved bedømmelsen, og er på 3 sider.
Besvarelsen, der udarbejdes individuelt af hver studerende, skal indeholde en forside, hvorpå anføres tydeligt navn og cpr. nr. samt antal sider (inklusive forside), og sammenhæftes i øverste venstre hjørne. Der må kun skrives på en side på hvert ark og med tydeligt læsbar skrift. Besvarelsen underskrives på forsiden.
Aflevering i to eksemplarer på MØK-sekretariatet skal ske senest torsdag den 2. august kl. 12.00.
Ved bedømmelsen lægges der vægt på, at resultaterne fremtræder klart og præcist, og at de er begrundede med argumenter eller med nøjagtige henvisninger til undervisningsmaterialet. Der henvises til lærebogen (Sydsæter, bind II [S]), til noterne (Grubb og Gutmann Madsen [GG] og Fuglede [F]), til de udleverede tillægsnoter (Lindstrøm [L]) eller til ugesedlerne.
En fyldestgørende besvarelse af opgavesættet vil kunne gives på under 10 håndskrevne A4-sider, og besvarelsen må under ingen omstændigheder overstige 15 sider.

Opgave 1

Lad talfølgerne $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ og $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ være givne ved

$$a_n = \frac{2^n + n^2}{e^n + n^3}\,, \qquad b_n = \frac{2^n + n}{n\,2^n + n^3}\,, \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

a) Vis, at begge følger er konvergente og bestem deres grænseværdier.

b) Gør rede for, at rækken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er konvergent og at $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ er divergent.

c) Afgør, for hver af rækkerne $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ og $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$, om den er konvergent eller divergent.

Opgave 2

Lad polynomiet f være givet ved

$$f(z) = (\,z + 1 - i\sqrt{3}\,)^2\,(\,z^2 - 2z + 5\,)\,.$$

a) Bestem rødderne i polynomiet samt deres multiplicitet.

b) Beregn produktet α af de fire rødder (regnet med multiplicitet).

c) Bestem $|\alpha|$ og $\operatorname{Arg}\alpha$.

Opgave 3

Lad delmængden S af $\mathbb{R}^3$ være givet ved

$$S = \{(x, y, z) \mid \ x \geq 0\,,\ z \geq 0\,,\ xy \geq 1\,,\ x + y + z \leq 3\,\}\,,$$

og lad funktionen $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ være defineret ved

$$f(x, y, z) = x^2 + 2y + 3z\,.$$

a) Gør rede for, at S er en kompakt mængde, samt at f antager såvel en maksimumsværdi som en minimumsværdi i S.

b) Opstil Kuhn-Tucker betingelserne for optimeringsproblemet: Maksimer $f(x, y, z)$ for $(x, y, z) \in S$, og find samtlige optimale løsninger til dette.

Opgave 4

Betragt ligningen

$$\tan(\frac{\pi}{4}(x^2 - y)) + xz^2 + e^{(x+y)z} = 2 \qquad (*)\,.$$

a) Eftervis at $(x, y, z) = (\sqrt{2}, 1, 0)$ er en løsning til $(*)$ og gør rede for, at ligningen i en omegn af dette punkt bestemmer z som funktion af (x, y), d.v.s. $z = g(x, y)$, hvor g er en C^1-funktion defineret i en omegn af $(\sqrt{2}, 1)$.

b) Bestem de partielle afledede af z i $(\sqrt{2}, 1)$, d.v.s. bestem $g'_x(\sqrt{2}, 1)$ og $g'_y(\sqrt{2}, 1)$.

c) Gør rede for, at der ved

$$\varphi(t) = g(\sqrt{1 + t^2},\ \sin(\frac{\pi}{2}t))$$

defineres en C^1-funktion på et interval omkring $t = 1$ og beregn $\varphi'(1)$.

Opgave 5

Betragt følgende lineære program

(P) Maksimer $2x_1 + 4x_2 + 7x_3$ under hensyn til bibetingelserne

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 &\leq 3 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &\leq -5 \\ x_1 - 2x_2 \quad\quad &= 2 \\ 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 &= 6 \end{aligned}$$

og fortegnskravet $x_3 \geq 0$.

a) Find samtlige tilladte løsninger til (P).

b) Find samtlige optimale løsninger til (P).

c) Opskriv det duale program (P') til (P).

d) Find samtlige optimale løsninger til (P').