Matematisk analyse og statisk optimering

72 timers skriftlig hjemmeopgave
18.-21. december 2006

Opgaven består af 5 delopgaver, der vægtes ens ved bedømmelsen, og er på 3 sider.
Besvarelsen, der udarbejdes individuelt af hver studerende, skal indeholde en forside, hvorpå anføres tydeligt navn og cpr. nr. samt antal sider (inklusive forside), og sammenhæftes i øverste venstre hjørne. Der må kun skrives på en side på hvert ark og med tydeligt læsbar skrift. Besvarelen underskrives på forsiden.
Aflevering i to eksemplarer på MØK-sekretariat, skal ske senest torsdag den 21. december kl. 10.00.
Ved bedømmelsen lægges der vægt på, at resultaterne fremtræder klart og præcist, og at de er begrundede med argumenter eller med nøjagtige henvisninger til undervisningsmaterialet. Der henvises til lærebogen (Sydsæter, bind II [S]), til noterne (Grubb og Gutmann Madsen [GG] og Fuglede [F]), til de udleverede tillægsnoter (T. Lindstrøm [L]) eller til ugesedlerne.
En fyldestgørende besvarelse af opgavesættet vil kunne gives på under 10 håndskrevne A4-sider, og besvarelsen må under ingen omstændigheder overstige 15 sider.

Opgave 1

Lad talfølgerne $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ og $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ være givne ved

$$a_n = \frac{n^2+\ln n}{2n^2+e^{-n}} \qquad b_n = \frac{n^2+\ln n}{3n^3+e^{-n}}\,, \quad n\in\mathbb{N}\,.$$

a) Vis, at begge følger er konvergente og bestem deres grænseværdier.

b) Gør rede for, at rækkerne $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ og $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ er divergente.

c) Afgør, for hver af rækkerne $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ og $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$, om den er konvergent eller divergent.

Opgave 2

Lad polynomiet f være givet ved

$$f(z) = z^3 - 2(2+i)z^2 + (5+8i)z - 10i\,.$$

a) Eftervis, at $z_0 = 2 - i$ er rod i f.

b) Bestem de andre rødder z_1 og z_2 i f.

c) Lad $\alpha = \frac{z_1}{z_2}$, hvor z_1 og z_2 er valgt, således at $\operatorname{Re} z_1 < \operatorname{Re} z_2$.
Skriv α på formen $x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, bestem $|\alpha|$ og gør rede for, at $\frac{\pi}{4} < \operatorname{Arg} \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Opgave 3

Lad delmængden S af $\mathbb{R}^3$ være givet ved

$$S = \{(x, y, z) \mid x^2 + y + z \leq 5\,,\ x^2 y \geq 2\,,\ x^2 z \geq 2\}\,,$$

og lad funktionen $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ være defineret ved

$$f(x, y, z) = y + z - 2x\,.$$

a) Gør rede for, at S er en kompakt mængde, samt at f antager såvel en maksimumsværdi som en minimumsværdi i S.

b) Opstil Kuhn-Tucker betingelserne for optimeringsproblemet: Maksimer $f(x, y, z)$ for $(x, y, z) \in S$, og find samtlige optimale løsninger til dette.

Opgave 4

Punktet $(x, y, u, v) = (1, -2, 0, 2)$ opfylder ligningssystemet

$$\begin{aligned} e^{-u^2} + x(1 + 2u) + y &= 0 \\ 2e^{xu} + \sin(y + v) - uv &= 2\,. \end{aligned}$$

a) Begrund, at ligningssystemet i en omegn af dette punkt bestemmer u og v som C^1-funktioner af (x, y): $(u, v) = \mathbf{g}(x, y) = (g_1(x, y), g_2(x, y))$.

b) Bestem de partielle afledede af u og v i $(1, -2)$, d.v.s. bestem Jacobi matricen $\mathbf{g}'(1, -2)$.

c) Gør rede for, at der ved

$$\varphi(t) = g_1(1 + t, -g_2(1 + t, 2t - 2))$$

defineres en C^1-funktion på et interval omkring $t = 0$ og beregn $\varphi'(0)$.

Opgave 5

Betragt følgende lineære program

(P) Maksimer $-7x_2 + 4x_3 + x_4$ under hensyn til bibetingelserne

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 7x_4 &\leq 2 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 &\leq 1 \\ -x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 &\leq -1 \end{aligned}$$

og ingen fortegnskrav.

a) Opskriv det duale program (P').

b) Find samtlige tilladte løsninger til (P').

c) Find samtlige optimale løsninger til (P') og bestem den optimale værdi for (P').

d) Find samtlige optimale løsninger til (P).