MASO

Facit til udvalgte eksamensopgaver

Vinter 02/03

Opg.1 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}(k+\frac{1}{n})^n$ er konvergent for $0 < k < 1\,, a \in \mathbb{R}$, og for $k = 1, a > 1$, og divergent ellers.

Opg.2

a) Løsningerne er

$$\begin{aligned} z_1 &= \sqrt{\frac{\sqrt{10}+1}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{10}-1}{2}}\,, \quad z_2 = -z_1\,, \\ z_3 &= \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}\,, \quad z_4 = -z_3\,. \end{aligned}$$

b) $|z_1| = |z_2| = 10^{\frac{1}{4}}$ og $|z_3| = |z_4| = 2^{\frac{1}{4}}$.

c) Summen af rødderne er 0 og produktet er $-4+2i$.

Opg.3

b) Eneste optimale løsning er $(\frac{\pi}{6\sqrt{3}}, 0, \frac{\pi}{3})$.

Opg.4

c)

$$\begin{pmatrix} \phi'(0) \\ \psi'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Opg.5

b) (P_k) har en optimal løsning netop når $k \leq 4$.
   For $k < 4$ er $(0,0)$ eneste optimale løsning.
   For $k = 4$ er de optimale løsninger $(2t, t)$, $t \geq 0$.

d) Tilfælde 1. forekommer for $k \leq 4$.
   Tilflde 2. forekommer for $k > 4$.

Vinter 03/04

Opg.1

b) Brug a) og Sætn. 2.18 1) i [GG].

c) og d) Brug a) og sammenligningskriteriet samt Eks. 3.20 i [GG].

Opg.2

b) Løsningerne er

$$z_1 = 1 + i\sqrt{3},\; z_2 = 1 + i\frac{1}{\sqrt{3}},\; z_3 = 1,\; z_4 = 1 - i\frac{1}{\sqrt{3}},\; z_5 = 1 - i\sqrt{3}\,.$$

b) $|z_1| = |z_5| = 2,\; |z_2| = |z_4| = \frac{2}{\sqrt{3}},\; |z_3| = 1\,.$
   $\operatorname{Arg} z_1 = \frac{\pi}{3},\; \operatorname{Arg} z_2 = \frac{\pi}{6},\; \operatorname{Arg} z_3 = 0,\; \operatorname{Arg} z_4 = -\frac{\pi}{6},\; \operatorname{Arg} z_5 = -\frac{\pi}{3}\,.$

c) Produktet af rødderne er $\frac{16}{3}$.

Opg.3

b) T_k er konveks for $0 \leq k \leq 3$, eller ikke.

c) T_k er afsluttet for alle $k \in \mathbb{R}$.

d) T_k er kompakt for alle $k \in \mathbb{R}$.

e) De optimale løsninger for $k = 25$ er $(0, \pm 4)$.

Opg.4

b) $\nabla g(0,1,2) = (\frac{\pi}{2} - 4, 8, 0)$.

c) $\gamma(0) = -\frac{\pi}{4}\,, \quad \gamma'(0) = 2\pi$.

Opg.5

b) Mængden af tilladte løsninger til (P_k) er kvadratet med hjørnerne $(1,0), (2,1), (1,2), (0,1)$ inklusive randen.

c) Optimale løsninger til (P'_k):

$(1,0)$ for $k < -1$, $\quad (2,1)$ for $-1 \leq k \leq 1$, $\quad$ og $(1,2)$ for $k > 1$.

e) Samtlige optimale løsninger til (P_k):

$$\begin{aligned} (0,t,2+t,0),\ \ 0 \leq t \leq -1-k, \qquad & \text{for} \quad k < -1 \\ (0,0,1-k,1+k) \qquad & \text{for} \quad -1 \leq k \leq 1 \\ (k-1,0,0,k+1) \qquad & \text{for} \quad k > 1 \end{aligned}$$

Vinter 04/05

Opg.1

b) Divergent (brug sammenligningskriteriet).

c) Konvergent (brug sammenligningskriteriet).

Opg.2

c) Løsningerne er

$$z_1 = 1 + i\sqrt{3},\ z_2 = -1 + i\sqrt{3},\ z_3 = -2,\ z_4 = -1 - i\sqrt{3},\ z_5 = 1 - i\sqrt{3}\,.$$

d) Produktet af rødderne er -32.

$f(z) = (z^2 - 2z + 4)(z^2 + 2z + 4)(z + 2)$

Opg.3

b) T_k er konveks for $k \leq 0$, ellers ikke.

c) Eneste optimale løsning er $(0, -\sqrt{3})$.

Opg.4

b)

$$\frac{\partial(g,h)}{\partial(x,y)}(0,0) = \begin{pmatrix} g'_x(0,0) & g'_y(0,0) \\ h'_x(0,0) & h'_y(0,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

c) $\phi(0) = 0\,,\quad \phi'(0) = -1\,,\quad \psi'(0) = -1\,.$

d) Sæt $x = 0$ og verificer, at f er ubegrænset under bibetingelsen.

Opg.5

c) (P'_a) har tilladte løsninger for $a \leq -2$, ellers ikke.

d) Tilfælde 1. forekommer for $a \leq -2$.

Tilfælde 2. forekommer for $a > -2$.

e) Tilladte basisløsninger er:

$$(-1,0,0,0,2),\ (0,-1,0,0,0)\,,\ (0,0,-1,0,0)\,,\ (0,0,0,1,0)$$

Optimale basisløsninger er :

$(0,0,-1,0,0)$ og $(0,0,0,1,0)$, hvis $a > -2$, og tillige $(0,-1,0,0,0)$, hvis $a = -2$. Endelig er $(0,-1,0,0,0)$ eneste optimale basisløsning for $a < -2$.

Vinter 05/06

Opg.1

a) $x_2 = \frac{5}{4}, \quad x_3 = \frac{53}{72}$.

c) Brug, at (x_n) er aftagende og nedad begrænset. Grænseværdien er 0.

d) Brug vinket og sammenligningskriteriet.

e) Svaret er ja.

Opg.2

b) Brug a) og Sætn. 5.8 i [GG]: $g(z) = z^5 + z^4 + z + 1$.

c) Løsningerne er:

$$-1, \quad \frac{1 \pm i}{\sqrt{2}}, \quad \frac{-1 \pm i}{\sqrt{2}}$$

d) Produktet af løsningerne til $(f - g)(z) = 0$ er 0.

Summen af løsningerne til $(f - g)(z) = 0$ er -1.

Opg.3

c) $(0, 0)$ er eneste ikke-regulære punkt (d.v.s. eneste punkt, hvori ”føringsbetingelsen” ikke er opfyldt).

d) Eneste maksimumspunkt er $(1, 1)$.

Eneste minimumspunkt er $(0, 0)$.

Opg.4

b)

$$\begin{pmatrix} u'(0) \\ v'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

c) $w'(0) = 0$.

Opg.5

a) $(0,0,0)$ er tilladt løsning til (P_a) for alle $a > 0$.

c) (P_3') har $(3,0,0)$ som optimal løsning og optimal værdi er 3.
(P_3) har $(1,0,0)$ som optimal løsning og optimal værdi er 3.

d) For $a > 3$ forekommer tilfælde 2. i dualitetssætningen.

e) For $a < 3$ forekommer tilfælde 1. i dualitetssætningen.