MASO

Dualitet og Kuhn-Tucker betingelserne.

I denne note forklares sammenhængen mellem dualitetssætningen i F §6 og Kuhn-Tucker betingelserne som givet i Sætning 8.9.1 i S, idet vi indskrænker os til kun at betragte standardprogrammer. Specielt skal vi se, at for en optimal løsning til et standardprogram (P) udgør Lagrangemultiplikatorerne for (P) en optimal løsning til det duale program (P'), se sidst i noten for en mere præcis formulering.

Med samme betegnelser som i Definition 5.2 i F er Lagrangefunktionen for standardprogrammet

(P) Maksimer $\mathbf{c}^t\mathbf{x}$ under hensyn til bibetingelserne og fortegnskravene

$$\mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}\,, \qquad \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \tag{1}$$

givet ved

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^t\mathbf{x} - \mathbf{y}^t(\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}) + \mathbf{z}^t\mathbf{x}\,,$$

hvor $\mathbf{y}^t = (y_1 \dots y_m)$ og $\mathbf{z}^t = (z_1 \dots z_n)$ er rækkevektorerne bestående af Lagrangemultiplikatorerne hørende til henholdsvis de egentlige bibetingelser og til fortegnskravene. Man bruger tit betegnelsen *Kuhn-Tucker vektor* for $\mathbf{y}$.

Ved differentiation ses, at betingelse (a) i Sætning 8.9.1 i S antager formen

$$\mathbf{c}^t = \mathbf{y}^t\mathbf{A} - \mathbf{z}^t\,. \tag{2}$$

Betingelse (b) i samme sætning kan udtrykkes ved

$$\mathbf{y} \geq \mathbf{0}\,, \quad \mathbf{z} \geq \mathbf{0} \tag{3}$$

samt kravet om, at $y_i = 0$, hvis i'te bibetingelse ikke er aktiv, og $z_j = 0$, hvis $x_j > 0$. Idet vi husker bibetingelserne og fortegnskravene (1), medfører sidstnævnte krav, at

$$\mathbf{y}^t(\mathbf{Ax} - \mathbf{b}) = 0 \quad \text{og} \quad \mathbf{z}^t\mathbf{x} = 0\,. \tag{4}$$

Kuhn-Tucker betingelserne medfører altså (2)-(4). Multipliceres begge sider af (2) med $\mathbf{x}$ fra højre fås

$$\mathbf{c}^t\mathbf{x} = \mathbf{y}^t\mathbf{Ax} - \mathbf{z}^t\mathbf{x} = \mathbf{y}^t\mathbf{Ax}\,,$$

hvor sidste ligning i (4) er brugt i sidste skridt. Kombineres dette med første ligning i (4), opnås

$$\mathbf{c}^t\mathbf{x} = \mathbf{y}^t\mathbf{Ax} = \mathbf{y}^t\mathbf{b}\,. \tag{5}$$

Da endvidere $\mathbf{y} \geq \mathbf{o}$ og

$$\mathbf{A}^t\mathbf{y} = \mathbf{c} + \mathbf{z} \geq \mathbf{c}$$

ifølge (2) (transponeret) og (3), er $\mathbf{y}$ en tilladt løsning til det duale program (P'), og det følger derfor af Sætning 4.7 i F og (5), at $\mathbf{x}$ er en optimal løsning til (P) og $\mathbf{y}$ en optimal løsning til (P'). *Lagrangemultiplikatorerne svarende til de egentlige bibetingelser for (P) i en optimal løsning udgør altså en optimal løsning til det duale program (og omvendt).* Endvidere ses af ovenstående, at Lagrangemultiplikatorerne svarende til fortegnskravene i (P) optræder som restvariable i det til (P') svarende kanoniske program.

Da Lagrangefunktionen $\mathcal{L}$ er lineær, er den specielt konkav. Sætning 8.8.1 i S medfører derfor, at en løsning $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ til Kuhn-Tucker betingelserne for (P) giver en optimal løsning $\mathbf{x}$ til (P) og dermed ifølge ovenstående en optimal løsning $\mathbf{y}$ til (P'). Det sluttes derfor af dualitetssætningen i F §6, at der *i tilfælde 1, og kun i dette tilfælde, eksisterer løsninger til Kuhn-Tucker betingelserne for (P).*