# MASO

## Eksempel på anvendelse af Sætning 7.2.7

a) Lad mængden $S \subseteq \mathbb{R}^3$ være givet ved

$$S = \{(x, y, z) \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ x + y^2 + e^{y+z} \leq 3\}$$

og lad funktionen $f : S \to \mathbb{R}$ være givet ved

$$f(x, y, z) = \frac{2x^2 - yz}{e^x + e^y + z^2}.$$

Da er $f$ kontinuert i $S$ (faktisk i hele $\mathbb{R}^3$), idet den er kvotient af to kontinuerte funktioner, hvor nævneren er positiv. Desuden er $S$ en kompakt mængde, hvilket ses som følger:

Da funktionerne $(x, y, z) \to x,\ (x, y, z) \to y,\ (x, y, z) \to z$ og $(x, y, z) \to x + y^2 + e^{x+y}$ alle er kontinuerte i $\mathbb{R}^3$ er $S$ afsluttet ifølge Sætning 7.2.5 (eller Eksempel 2 side 198). Eller mere specifikt: $S$ er fællesmængden af mængderne $\{(x, y, z) \mid\ x \geq 0\}$, $\{(x, y, z) \mid\ y \geq 0\}$, $\{(x, y, z) \mid\ z \geq 0\}$ og $\{(x, y, z) \mid\ x + y^2 + e^{y+z} \leq 3\}$, der hver er afsluttet iflg. Eksempel 2 side 198. Da en fællesmængde af afsluttede mængder er afsluttet (iflg. opgave 7.1.6, uge 6) er $S$ altså afsluttet.
Da $x \geq 0$, $y^2 \geq 0$ og $e^{y+z} \geq 0$ følger af uligheden $x + y^2 + e^{y+z} \leq 3$, at $x \leq 3$ og $e^{y+z} \leq 3$. Dette giver $0 \leq x \leq 3$, $0 \leq y \leq \ln 3$ og $0 \leq z \leq \ln 3$ (da ln er en voksende funktion). Hermed har vi indset, at $S$ også er begrænset, idet $\|(x, y, z)\| \leq \sqrt{9 + 2(\ln 3)^2}$ for alle $(x, y, z) \in S$.
Altså er $S$ kompakt.

Af Sætning 7.2.7 sluttes derfor, at $f$ antager både en maksimums- og en minimumsværdi i $S$.

(Vend!)

b) Samme konklusion kan drages om funktionen

$$g(x,y,z) = \frac{2x^2 - yz}{e^x + e^y - z^2}$$

i samme mændge $S$. Her er $g$ imidlertid ikke defineret i hele $\mathbb{R}^3$, da nævneren kan blive 0 (f.eks. i $(0,0,\sqrt{2})$). Men dette forekommer ikke i $S$, da vi for $(x,y,z) \in S$ har, at

$$e^x + e^y - z^2 \geq e^0 + e^0 - (\ln 3)^2 = 2 - (\ln 3)^2 > 0\,.$$

Altså er $g$ en kontinuert funktion i $S$, og Sætning 7.2.7 kan anvendes.

c) Betragt nu funktionen $f$ fra før i mængden

$$R = \{(x,y,z) \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0\}\,,$$

som ikke er kompakt, da den ikke er begrænset. Ikke destomindre kan vi bruge Sætning 7.2.7 til at indse, at $f$ antager en maksimumsværdi i $R$ på følgende vis:

Bemærk først, at $f(1,0,0) = \frac{2}{e+1} > 0$, og at

$$f(x,y,z) \leq \frac{2x^2}{e^x + e^y + z^2} \leq \frac{2x^2}{e^x}\,, \quad \text{når } (x,y,z) \in R\,.$$

Da $\frac{2x^2}{e^x} \to 0$ for $x \to \infty$, findes derfor et $K_1 > 0$, således at

$$f(x,y,z) < f(1,0,0)\,, \quad \text{når } x > K_1\,.$$

Dette viser, at maksimum for $f$ skal søges for $x \leq K_1$. Men for sådanne $x$ har vi, at

$$f(x,y,z) \leq \frac{2x^2}{e^x + e^y + z^2} \leq \frac{2x^2}{e^y + z^2} \leq \min\left\{\frac{2K_1^2}{e^y}, \frac{2K_1^2}{z^2}\right\}\,.$$

Da $\frac{2K_1^2}{e^y} \to 0$ for $y \to \infty$ og $\frac{2K_1^2}{z^2} \to 0$ for $z \to \infty$, findes derfor $K_2 > 0$ og $K_3 > 0$, således at

$$f(x,y,z) < f(1,0,0)\,, \quad \text{når } y > K_2 \text{ eller } z > K_3\,.$$

Ialt har vi altså, at $f(x,y,z) < f(1,0,0)$ udenfor kassen

$$R_1 = [0,K_1] \times [0,K_2] \times [0,K_3]\,.$$

Da $R_1$ er kompakt, og $f$ er kontinuert, antager $f$ en maksimumsværdi i $R_1$ iflg. Sætning 7.2.7, som derfor også er maksimumsværdi for $f$ i $R$.