Appendiks

Reelle tal, fysiske størrelser og fuldstændighed

Formålet med dette appendiks er at gøre rede for, at udvidelsen af det rationale talområde til de reelle tal er både naturligt og nødvendigt i de fysiske fag (og mere generelt i kvantitativ) naturvidenskab) som følge af deres eksperimentelle grundlag, og at de grundlæggende egenskaber ved de reelle tal kan forstås i lyset heraf, herunder specielt de reelle tals fuldstændighed. Denne synsvinkel leder på naturlig vis til den generalisering af fuldstændighedsbegrebet, som indgår i Kapitel 2, og som der knyttes yderligere kommentarer til sidst i appendikset.

Reelle tal som måleserier. Vi begynder med at konstatere, at resultatet af enhver måling angives med et (eller flere) tal a samt en måleusikkerhed $\varepsilon > 0$, hvilket betyder, at den sande værdi s af den målte størrelse ligger i intervallet $[a - \varepsilon, a + \varepsilon]$. Der findes naturligvis målinger, hvor resultatet ikke er behæftet med nogen usikkerhed. F.eks. kan vi med sikkerhed angive antallet af måner omkring jorden til 1, og vi kan i princippet tælle antallet af stjerner i Mælkevejen eller antallet af molekyler i en gasbeholder. Dette beror på, at vi ved, at resultatet af målingen skal være et helt tal og dermed eksakt, hvis måleusikkerheden er mindre end 1. Vi ser bort fra sådanne tælle-eksperimenter i det følgende og retter opmærksomheden mod målinger af størrelser, der såvidt vides ikke er kvantiserede, f. eks. måling af tyngdeaccelerationen g eller af lysets hastighed c.

Almindeligvis angives måleresultatet a samt usikkerheden ε som endelige decimalbrøker. Dette vil vi antage gjort i det følgende, og benytter betegnelsen $\mathbb{Q}_0$ for mængden af endelige decimalbrøker. Mere generelt kunne vi erstatte $\mathbb{Q}_0$ med mængden $\mathbb{Q}$ af samtlige rationale tal, men det er ikke vigtigt for det følgende, om vi vælger den ene eller den anden konvention.

Lad os tænke os, at lysets hastighed c forsøges bestemt af to forsøgshold I og II. I første forsøg finder de to hold følgende resultater (i enheder af bestemmes til (i enheder af 10^6m/s):

$$\begin{array}{lllll} \text{I:} & c_1 = 299.8\ , & \varepsilon_1 = 0.1 & \text{dvs.} & c \in [299.7, 299.9] \\ \text{II:} & c_1' = 299.82\ , & \varepsilon_1' = 0.09 & \text{dvs.} & c \in [299.73, 299.91] \end{array}$$

De to holds resultater er konsistente, eftersom intervallerne $[299.7, 299.9]$ og $[299.73, 299.91]$ overlapper hinanden, og den sande værdi c må tilhøre fællesmængden $[299.73, 299.9]$. Hold I vil ikke stå tilbage for hold II og forbedrer forsøgsopstillingen, så måleusikkerheden formindskes til 0.02, hvorefter hold

II gør det endnu bedre med en måleusikkerhed på 0.01. Man finder da resultaterne:

$$\begin{array}{llll} \text{I:} & c_2 = 299.81\ , \ \varepsilon_2 = 0.02 & \text{dvs.} & c \in [299.79, 299.83] \\ \text{II:} & c_2' = 299.80\ , \ \varepsilon_2' = 0.01 & \text{dvs.} & c \in [299.79, 299.81]\ . \end{array}$$

Hold I's resultater er konsistente, da de to tilsvarende intervaller overlapper hinanden, og det samme gælder for hold II's resultater. Endvidere er de to holds resultater konsistente med hinanden, da alle fire intervaller har et fælles overlap, dvs. deres fællesmængde er ikke tom.

Dette eksempel illustrerer to vigtige ting: P. gr.a. usikkerhed ved enhver måling af en størrelse kan denne for det første ikke bestemmes ved en endelig serie af målinger. I den idealiserede situation, hvor man forestiller sig, at en eksperimentator udfører en uendelig serie af målinger med usikkerheder $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots$, der aftager imod 0, er resultatet en uendelig følge $c_1, c_2, c_3, \dots$ af værdier, som er konsistente inden for usikkerhederne, hvilket vil sige, at overlappet O_N af intervallerne $[c_1 - \varepsilon_1, c_1 + \varepsilon_1]$, $[c_2 - \varepsilon_2, c_2 + \varepsilon_2], \dots, [c_N - \varepsilon_N, c_N + \varepsilon_N]$, må være ikke-tom for hvert $N \in \mathbb{N}$, dvs.

$$O_N = \bigcap_{i=1}^{N} [c_i - \varepsilon_i, c_i + \varepsilon_i] \neq \emptyset\ . \tag{A1}$$

For det andet kan en anden forsøgsudøver ved målinger af samme størrelse med usikkerheder $\varepsilon_1', \varepsilon_2', \varepsilon_3', \dots$ nå frem til en anden følge $c_1', c_2', c_3', \dots$ af værdier, uden at de er uenige om resultatet, hvis blot de stemmer overens inden for de angivne usikkerheder, hvilket igen betyder, at

$$O_N \cap O_N' = \bigcap_{i=1}^{N} ([c_i - \varepsilon_i, c_i + \varepsilon_i] \cap [c_i' - \varepsilon_i', c_i' + \varepsilon_i']) \neq \emptyset \tag{A2}$$

for hvert $N \in \mathbb{N}$. Dette udtrykker jo blot, at hvis man fletter de to følger af måleresultater ind imellem hinanden, da udgør de tilsammen en følge af målinger af den samme størrelse.

Vi kalder en talfølge $(c_1, c_2, c_3, \dots)$ med tilhørende usikkerheder $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots)$, der aftager imod 0, og således at (A1) er opfyldt, for en *måleserie*. Bag sådan en måleserie ligger naturligvis forestillingen om, at de målte værdier tilnærmer den sande værdi c af den målte størrelse, altså at følgen $(c_1, c_2, c_3, \dots)$ konvergerer mod c. Spørgsmålet, der interesserer os her, er, hvorvidt vi kan være sikre på, at følgen overhovedet konvergerer mod noget tal. Da fysikeren ikke kan levere andet end en måleserie, må al vor viden om tallet c, hvis det findes, være indeholdt i måleserien. Vi siger, at måleserien repræsenterer tallet c. To måleserier, der opfylder (A2), er at betragte som ækvivalente i den forstand, at de repræsenrerer det samme tal. Overraskende nok tager man i matematik netop denne iagttagelse som udgangspunkt for en definition af de reelle tal: Man tager de velkendte rationale tal, eller bare alle endelige decimalbrøker, og konstruerer så de reelle tal som måleserier, således at to måleserier, der opfylder (A2), identificeres. En mere præcis måde at udtrykke dette er følgende: Betingelsen (A2) giver anledning til en inddeling af mængden af alle måleserier i såkaldte ækvivalensklasser, hvor to måleserier tilhører samme ækvivalensklasse, netop hvis de opfylder (A2). Et reelt tal er da pr. definition en sådan ækvivalensklasse, og en måleserie i denne siges at repræsentere det pågældende reelle tal.

Decimalfremstilling af de reelle tal. Spørger man nu, hvordan den sædvanlige decimalfremstilling hænger sammen med denne opfattelse af de reelle tal, er svaret simpelt: For at bestemme de første n decimaler i tallet svarende til følgen $(c_1, c_2, \dots)$ vælges et N så stort, at usikkerheden ε_N er $\leq \frac{1}{2} \cdot 10^{-n-1}$. Da intervallet O_N har længde $\leq 2\varepsilon_N$ følger det, at hvis O_N indeholder en endelig decimalbrøk, hvis $(n+1)$'te decimal er forskellig fra 0 og 9, da har alle endelige decimalbrøker i O_N de første n decimaler tilfælles. Da $n \in \mathbb{N}$ var vilkårligt og $O_{N_1} \subseteq O_N$ for $N_1 \geq N$, bestemmes på denne måde en entydig uendelig decimalbrøk, medmindre der for enhver decimalplads n efter et vist trin n_0 gælder, at det tilsvarende O_N kun indeholder endelige decimalbrøker, der har 0 eller 9 på n'te plads. I dette sidste tilfælde får man to mulige decimalfremstillinger, den ene ender på lutter nuller og den anden på lutter nitaller fra et vist trin. Dette er den sædvanlige (og eneste) flertydighed i decimalfremstillinger. F.eks. repræsenterer $1.0000\dots$ og $0.9999\dots$ samme tal, idet de ikke kan skelnes ved målinger: Følgerne $(1.0,\ 1.00,\ 1.000, \dots)$ og $(0.9,\ 0.99,\ 0.999, \dots)$ med måleusikkerheder $(0.2,\ 0.02,\ 0.002, \dots)$ repræsenterer samme fysiske størrelse, fordi i dette tilfælde er $O_N = [1 - 2 \cdot 10^{-N}, 1 + 2 \cdot 10^{-N}]$ og $O'_N = [1 - 3 \cdot 10^{-N}, 1 + 10^{-N}]$ og $O_N \cap O'_N = [1 - 2 \cdot 10^{-N}, 1 + 10^{-N}] \neq \emptyset$.

Det er naturligvis afgørende for nyttigheden af decimalfremstillinger af reelle tal, at ækvivalente måleserier får samme decimalfremstilling p.gr.a. (A2), altså at den pånær ovennævnte særtilfælde giver en entydig repræsentation af en målelig størrelse, som vi kender det.

Selvom vi hermed har argumenteret for det naturlige i at opfatte reelle tal som repræsenteret ved måleserier, kan det måske forekomme som en omstændelig synsvinkel. F.eks. forekommer det ikke indlysende praktisk at betragte det rationale tal $\frac{1}{3}$ som repræsenteret ved talfølgen $(0.3,\ 0.33,\ 0.333,\ \dots)$ med usikkerheder $(0.1,\ 0.01,\ 0.001,\ \dots)$. Ikke destomindre har denne opfattelse sine fortrin frem for decimalfremstillingen. For at tage et eksempel lad os se på, hvordan man adderer reelle tal. Med to vilkårlige uendelige decimalbrøker x og y er det ikke helt indlysende, hvordan $x + y$ udregnes. Tager man istedet to følger af endelige decimalbrøker $(x_1, x_2, \dots)$ og $(y_1, y_2, \dots)$, der repræsenterer de to tal med usikkerheder hhv. $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots)$ og $(\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \dots)$, da er det velkendt, at summen af de to størrelser er bestemte ved følgerne $(x_1{+}y_1,\ x_2{+}y_2, \dots)$ med usikkerheder $(\varepsilon_1{+}\varepsilon'_1, \varepsilon_2{+}\varepsilon'_2, \dots)$. Man skal så naturligvis sikre sig, at man ender med samme måleserie pånær ækvivalens, uanset hvilke to måleserier man repræsenterer de to tal med. Dette er intuitivt klart og overlades til læseren at overbevise sig om (man får brug for trekantsuligheden). Tilsvarende er afstanden $|x - y|$ mellem x og y lig med det reelle tal repræsenteret af $(|x_1{-}y_1|, |x_2{-}y_2|, \dots)$ med usikkerheder $(\varepsilon_1{+}\varepsilon'_1, \varepsilon_2{+}\varepsilon'_2, \dots)$. Således kan alle relationer mellem reelle tal fås ved at overføre de tilsvarende relationer for rationale tal til følger af sådanne, naturligvis med passende omtanke, idet der skal tages hensyn til måleusikkerhederne. Lad os i denne forbindelse lige nævne, at f.eks. $x \leq y$ ikke betyder, at $x_1 \leq y_1,\ x_2 \leq y_2, \dots$ for *vilkårlige* måleserier $(x_1, x_2, \dots)$ og $(y_1, y_2, \dots)$ repræsenterende x og y, men kun at der *findes* måleserier, for hvilke det gælder (overvej dette!).

Omfanget af $\mathbb{Q}$ og $\mathbb{R}$. Som bekendt repræsenteres et rationalt tal $\frac{m}{n}$ af en decimalbrøk, der er periodisk fra et vist trin, hvilket følger af, at der ved division med n kun kan forekomme n mulige rester, så den omtalte periode må være $\leq n$. F.eks. er $\frac{1}{7} = 0,142857142857\dots$. Det er intuitivt klart, at periodiske decimalbrøker snarere hører til undtagelsen end reglen blandt alle decimalbrøker: Kaotiske strukturer er mere hyppige end regelmæssige. Man kan faktisk vise, at ved udtagelse af en tilfældig uendelig decimalbrøk er sandsynligheden 0 for, at den er periodisk. I denne forstand udgør de rationale tal en forsvindende delmængde af de reelle tal. Så det er en højst ikke-triviel udvidelse af mængden $\mathbb{Q}_0$ (eller $\mathbb{Q}$), der er foretaget ovenfor, og der er af samme årsag ikke meget belæg for at forvente, at talværdien af fysiske størrelser i almindelighed er rationale tal.

Et andet udtryk for de irrationale tals overmægtighed i forhold til de rationale, er følgende: Betragtes kun tallene i $[0, 1]$, kan vi stille de rationale op i rækkefølge ved først at tage dem, der har nævner 2, dernæst dem der har nævner 3, o.s.v., dvs. $\frac{0}{2}, \frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{0}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \cdots$, og derefter stryge alle gentagelser (dvs. $\frac{0}{3}, \frac{3}{3}, \frac{0}{4}, \frac{2}{4}, \frac{4}{4}, \cdots$). Tilbage står en talfølge som udgør samtlige rationale tal i $[0, 1]$. Da disse således kan nummereres med naturlige tal, er der lige mange af dem, som der er af naturlige tal. Vi siger, at de rationale tal er tællelige, eller har samme mægtighed som $\mathbb{N}$. Man kan ret let vise, at noget tilsvarende ikke kan lade sig gøre for samtlige reelle tal i $[0, 1]$. (Dette blev først gjort af G. Cantor i 1874). – Disse bemærkninger understreger forhåbentlig både omfanget og vigtigheden af det reelle talområde.

Fuldstændighed af $\mathbb{R}$. Man kan nu med rette spørge, om det ikke efter samme recept er muligt at udvide de reelle tal yderligere ved at betragte måleserier af reelle tal i stedet for måleserier af tal i $\mathbb{Q}_0$ (eller $\mathbb{Q}$). Svaret herpå er nej af den simple grund, at ethvert reelt tal kan tilnærmes vilkårlig godt med en endelig decimalbrøk (hvilket man jo netop gør ved brug af måleserier), hvoraf følger, at enhver reel måleserie er ækvivalent med en måleserie i $\mathbb{Q}_0$. Man får derfor ikke flere tal end de reelle. Dette er netop et udtryk for de reelle tals fuldstændighed, som vi nu skal forklare nærmere og dermed sætte den foregående diskussion i mere præcis forbindelse med diskussionen i Kapitel 2.

Det afgørende at bemærke er, at en måleserie ikke er andet end, hvad vi har kaldt en Cauchy følge i Afsnit 2.1, eller mere præcist: En talfølge $(x_1, x_2, \dots)$ er en Cauchy følge, netop hvis der findes en følge $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots)$ af usikkerheder, der aftager imod 0, således at de to tilsammen udgør en måleserie. Antag nemlig, at følgen $(x_1, x_2, \dots)$ med usikkerheder $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots)$ opfylder (A1). For et givet $\varepsilon > 0$ vælges så et $N \in \mathbb{N}$, så $\varepsilon_N \leq \frac{1}{2}\varepsilon$. For $n, m > N$, hvor vi kan antage at $n \leq m$, vælges et $a \in O_m$. Da har a højst afstand ε_n til x_n og højst afstand ε_m til x_m, så x_n og x_m har en indbyrdes afstand på højst $\varepsilon_n + \varepsilon_m$. Men da $\varepsilon_m \leq \varepsilon_n \leq \varepsilon_N$, er denne afstand $\leq 2\varepsilon_N \leq \varepsilon$. Dette viser, at $(x_1, x_2, \dots)$ er en Cauchy følge.

Hvis omvendt $(x_1, x_2, \dots)$ er en Cauchy følge, definerer vi os måleusikkerheder $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots)$ ved at lade ε_n være det største af tallene $|x_k - x_\ell|$, hvor $k, \ell \geq n$, medmindre disse alle er 0, i hvilket tilfælde vi sætter $\varepsilon = \frac{1}{n}$. Det bør bemærkes, at antagelsen om, at $(x_1, x_2, \dots)$ er en Cauchy følge, sikrer, at der er et største blandt de nævnte tal: Hvis et af tallene $|x_{k_0} - x_{\ell_0}|$ er $\neq 0$, da findes $N \in \mathbb{N}$ så $|x_k - x_\ell| \leq |x_{k_0} - x_{\ell_0}|$ for $k, \ell \geq N$, således at det største af tallene skal søges blandt de endelig mange tal $|x_k - x_\ell|$, hvor $n \leq k, \ell < N$, eller $|x_{k_0} - x_{\ell_0}|$. Med det givne valg af ε_n, $n \in \mathbb{N}$, er det klart, at følgen $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots)$ aftager imod 0, som påkrævet, samt at (A1) er opfyldt, fordi $x_N \in O_N$ for hvert $N \in \mathbb{N}$. Dette viser, at enhver Cauchy følge giver anledning til en måleserie.

Mens det for eksempelvis en fysiker er mere naturligt at tale om måleserier end om Cauchy følger, er sidstnævnte begreb dog enklere i den forstand, at en Cauchy følge alene er bestemt ved selve følgen af målte værdier, hvorimod måleusikkerhederne, som vist ovenfor, så at sige er indbygget i definitionen. I matematiklitteratur bruges derfor overalt Cauchy følger i stedet for måleserier. Således definerer man de reelle tal som ækvivalensklasser af Cauchy følger, hvor to sådanne er ækvivalente (dvs. repræsenterer samme tal), hvis de tilsvarende måleserier er ækvivalente, hvilket blot betyder, at man ved sammenfletning af de to følger igen får en Cauchy følge: To Cauchy følger $(x_1.x_2, \dots)$ og $(x'_1.x'_2, \dots)$ er ækvivalente, hvis $(x_1, x'_1, x_2, x'_2, \dots)$ er en Cauchy følge. I kraft af bemærkningerne ovenfor er denne definition af $\mathbb{R}$ helt ækvivalent med den tidligere givne ved brug af måleserier. Endvidere følger som nævnt, at $\mathbb{R}$ herved er et fuldstændigt rum i henhold til Definition 2.1:

Lad nemlig $(x_1, x_2, \dots)$ være en Cauchy følge i $\mathbb{R}$. Da er denne, som tidligere bemærket, ækvivalent med en Cauchyfølge i $\mathbb{Q}_0$ og repræsenterer altså et reelt tal x, som den faktisk konvergerer imod. Dette sidste skulle være intuitivt klart ud fra konstruktionen af reelle tal som (ækvivalensklasser af) måleserier, der tilnærmer det tilsvarende reelle tal, men lad os for fuldstændigheds skyld udmønte argumentet i Cauchy-følge-sprog: Ifølge definitionen af Cauchy følge findes for givet $\varepsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ så $|x_n - x_m| \leq \varepsilon$ for $n, m \geq N$. Men for et fast n repræsenteres afstanden $|x - x_n|$ af følgen $(|x_1 - x_n|, |x_2 - x_n|, \dots)$, som er ækvivalent med delfølgen $(|x_N - x_n|, |x_{N+1} - x_n|, \dots)$ (overvej dette!). Men da alle denne følges elementer er $\leq \varepsilon$ for $n \geq N$, følger det, at $|x - x_n| \leq \varepsilon$ for $n \geq N$. Dette viser, at $x_n \to x$ for $n \to \infty$.

Fuldstændiggørelse af indre produkt rum. Vi har i Kapitel 2 indført begrebet Cauchy følge for ethvert indre produkt rum. Vi kan derfor generalisere den ovenfor beskrevne fremgangsmåde ved konstruktionen af de reelle tal til et vilkårligt indre produkt rum V i stedet for $\mathbb{Q}_0$ eller $\mathbb{Q}$. Dvs. vi kan udvide V til et rum H ved at definere H som mængden af Cauchy følger i V, hvor to sådanne identificeres, hvis de er ækvivalente. Alle operationer på V, såsom addition, skalarmultiplikation og indre produkt, kan da overføres til H, som derved bliver et Hilbert rum. Ethvert indre produkt rum har således en *fuldstændiggørelse* H, som er et Hilbert rum. Således er specielt fuldstændiggørelsen af $C([a, b])$ lig med $L_2([a, b])$. Men analogt med tilfældet $\mathbb{R}$ er denne opfattelse af elementerne i $L_2([a, b])$ som ækvivalensklasser af Cauchy følger af kontinuerte funktioner ikke særlig praktisk anvendelig. I stedet bør man tænke på elementerne i $L_2([a, b])$ som grænseværdien af de repræsenterende Cauchy følger, og det er netop, hvad vi har gjort i Afsnit 2.1. Problemet er blot, som vi så, at disse grænseværdier ikke er entydigt bestemte, idet to funktioner, der er ens næsten overalt i $[a, b]$ repræsenterer samme element i $L_2([a, b])$. Denne flertydighed er at sammenligne med den tilsvarende, ganske vist sparsomme, flertydighed af decimalfremstillinger af reelle tal.