2 Hilbert rum

2.1 Eksempler på Hilbert rum

Vi skal nu først forsøge at begrunde, at de indre produkt rum af funktioner eller følger, som blev indført i Kapitel 1, ikke er omfattende nok til vores formål. Husk på, med udgangspunkt i vores undersøgelser af Fourier rækker og partielle differentialligninger, at vi ønsker at kunne danne "uendelige linearkombinationer" eksempelvis af vektorer i ortonormalsættene omtalt i Eksempel 1.6 c) og d). Problemet er, at dette hyppigt vil give funktioner, der ikke er kontinuerte, dvs. som ikke ligger i vektorrummet. Tag for eksempel den "uendelige linearkombination"

$$\frac{4}{\pi}(\sin x + \tfrac{1}{3}\sin 3x + \tfrac{1}{5}\sin 5x + \cdots)$$

i $C([-\pi,\pi])$. Denne repræsenterer, som vi så i AEM Eksempel 1 p. 241–242 eller Eksempel 1 p. 532–534, funktionen f, som er 1 på $[0,\pi]$ og -1 på $[-\pi,0[$, og som derfor ikke er kontinuert i 0.

Noget tilsvarende gør sig gældende for $\ell_0(\mathbb{N})$: Går vi formelt tilværks, ser vi, at den uendelige linearkombination

$$\lambda_1\varepsilon_1 + \lambda_2\varepsilon_2 + \lambda_3\varepsilon_3 + \cdots$$

er lig med følgen $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots)$, jvf. Eksempel 1.1 c). Men denne tilhører kun $\ell_0(\mathbb{N})$, hvis højst endelig mange af koefficienterne λ_n er $\neq 0$, dvs. hvis linearkombinationen er endelig.

Vi kan undgå disse problemer ved at gøre de omtalte vektorrum større, uden at ændre på det indre produkt. Vi gennemfører dette for $\ell_0(\mathbb{N})$ først, og derefter for $C(I)$.

Vektorrummet $\ell_2(\mathbb{N})$. Bemærk til at begynde med, at normen på $\ell_0(\mathbb{N})$, som jo er givet ved

$$\|(x_1, x_2, \dots)\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 \tag{2.1}$$

er veldefineret for alle følger for hvilke højresiden er endelig. F.eks. tilhører følgen $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots)$ åbenbart ikke $\ell_0(\mathbb{N})$, men

$$\|(1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \dots)\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

er som bekendt endelig (faktisk lig med $\pi^2/6$). Vi kalder talfølger, for hvilke højresiden af (2.1) er endelig for *kvadratisk summable* følger og betegner mængden af disse med $\ell_2(\mathbb{N})$, altså

$$\ell_2(\mathbb{N}) = \{(x_1, x_2, \dots) \;\Big|\; \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty\}\,.$$

Dette er vores kandidat til udvidelsen af $\ell_0(\mathbb{N})$. I en vis forstand er dette den størst mulige udvidelse med den givne norm, idet vi simpelhen har medtaget alle følger med endelig norm. Spørgsmålet er nu dels, hvorvidt $\ell_2(\mathbb{N})$ faktisk er et vektorrum, og dels om det indre produkt givet ved (1.14) er veldefineret på $\ell_2(\mathbb{N})$, altså hvorvidt højresiden af (1.14) er konvergent for vilkårlige følger i $\ell_2(\mathbb{N})$. Svaret på begge spørgsmål er heldigvis ja, og det er ikke vanskeligt at indse, jvf. Opgave 2.1 og 2.2.

Vektorrummet $L_2([a,b])$. Situationen vedrørende $C([a,b])$ er tilsvarende. Vi foretager den maksimale udvidelse af $C([a,b])$ til mængden $L_2([a,b])$ bestående af alle funktioner på $[a,b]$, hvis normkvadrat (1.12) er endeligt, altså

$$L_2([a,b]) = \{f : [a,b] \to \mathbb{C} \mid \int_a^b |f(x)|^2 dx < \infty\}\,. \tag{2.2}$$

Dette rum indeholder eksempelvis alle stykkevis kontinuerte funktioner på $[a,b]$. Husk, at en funktion f på $[a,b]$ er stykkevis kontinuert, hvis den er kontinuert i alle punkter, pånær muligvis i endelig mange punkter $a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_N = b$, hvori dens grænseværdier fra venstre og højre kræves at eksistere. Alternativt betyder dette, at f på hvert af intervallerne $]t_{i-1}, t_i[$ kan udvides til en kontinuert funktion f_i på $[t_{i-1}, t_i]$, og integralet af f er da pr. definition givet ved

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^N \int_{t_{i-1}}^{t_i} f_i(x)dx\,.$$

Men $L_2([a,b])$ indeholder flere funktioner. F.eks. er funktionen

$$f(x) = x^{-\alpha},\ \ 0 < x \leq 1\,,$$

hvor $\alpha > 0$, ikke stykkevis kontinuert på $[0,1]$, uanset hvilken værdi $f(0)$ tillægges. Ikke destomindre har vi, at

$$\int_0^1 |f(x)|^2 dx = \int_0^1 x^{-2\alpha} dx = \lim_{\epsilon\to 0} \int_\epsilon^1 x^{-2\alpha} dx = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1-\epsilon^{1-2\alpha}}{1-2\alpha} = \begin{cases} \frac{1}{1-2\alpha}\,, & \alpha < \frac{1}{2} \\ +\infty\,, & \alpha > \frac{1}{2}\,. \end{cases}$$

Altså er $f \in L_2([0,1])$ for $\alpha < \frac{1}{2}$.

Vi skal ikke her forsøge nøjere at indkredse arten af de funktioner, der tilhører $L_2([a,b])$. En udførlig diskussion ville kræve indførelse af det såkaldte Lebesgue integral, som er underforstået i (2.2), og som tillader integration af en større klasse af funktioner end det sædvanlige Riemann integral. I praksis får vi dog kun brug for at integrere funktioner, for hvilke en simpel udvidelse af Riemann integralet, som i de lige nævnte eksempler, kan anvendes.

Man viser nu på lignende vis som for $\ell_2(\mathbb{N})$, at $L_2([a,b])$ er et vektorrum, og at integralet, der indgår i definitionen af det indre produkt i (1.11), er endeligt for $f, g \in L_2([a,b])$, jvf. Opgave 2.3. At eftervise de fire krav $i)$–$iv)$ er ikke anderledes end for $C([a,b])$, pånær et enkelt punkt, nemlig det skarpe ulighedstegn i $i)$. Tag f.eks. en funktion f som er nul overalt i $[a,b]$ undtagen i et enkelt punkt (eller endelig mange punkter). Denne funktion er stykkevis kontinuert og dens norm er øjensynlig 0. Der findes altså funktioner i $L_2([a,b])$ forskellige fra nulfunktionen, som har norm 0. Der findes en standard måde at takle dette problem på, nemlig ved at identificere funktioner, hvis differens har norm 0. Dette betyder, at man i stedet for at definere $L_2([a,b])$ som et rum af funktioner opfatter det som et rum af klasser (eller mængder) af funktioner, således at to funktioner f og g tilhører samme klasse netop hvis

$$\int_a^b |f(x) - g(x)|^2 dx = 0\,. \tag{2.3}$$

Herved får alle funktioner i en klasse samme norm (jvf. Opgave 2.4), som derfor kan defineres som klassens norm. Tilsvarende vil det indre produkt (1.11) af to funktioner ikke ændres, hvis de byttes ud med andre funktioner fra deres respektive klasser (jvf. Opgave 2.4), hvilket derfor kan defineres som det indre produkt af klasserne. Denne ændring af synspunkt har ikke nævneværdig praktisk betydning. Det er fortsat nyttigt at tænke på elementerne i $L_2([a,b])$ som funktioner, men blot være opmærksom på, at en ligning i vektorrummet $L_2([a,b])$, hvor der på venstresiden står en funktion f og på højresiden en funktion g, blot betyder at (2.3) er opfyldt, og ikke at funktionerne stemmer overens i alle punkter af $[a,b]$. Man siger i stedet at f er lig med g *næsten overalt* i $[a,b]$, eller at $f(x) = g(x)$ *for næsten alle* $x \in [a,b]$.

Vektorrummet $L_2(I,\rho)$. Vi kan tilsvarende indføre vektorrummet $L_2(I)$, hvor I er et vilkårligt (ikke nødvendigvis endeligt eller lukket) interval, og specielt $L_2(\mathbb{R})$. Mere generelt kan vi for en positiv vægtfunktion ρ på I indføre vektorrummet

$$L_2(I,\rho) = \{f : I \to \mathbb{C} \mid \int_I |f(x)|^2 \rho(x) dx < \infty\} \tag{2.4}$$

med indre produkt $\langle\cdot\,,\,\cdot\rangle_\rho$ givet ved (1.13).

$L_2(I)$ og kvantemekanik. Rummene $L_2(I)$ er af særlig vigtighed i den kvantemekaniske formalisme. Et af grundpostulaterne i denne formalisme er nemlig, at den fysiske tilstand af en partikel, hvis bevægelsesfrihed er begrænset til intervallet I, er givet ved en *bølgefunktion* ψ, som er en funktion i $L_2(I)$, og at $|\psi(x)|^2$ da er sandsynlighedstætheden for partiklens position. Dette betyder, at sandsynligheden for, at partiklen befinder sig i intervallet $[x, x+\Delta x] \subseteq I$, er

$$\int_x^{x+\Delta x} |\psi(x)|^2 dx\,. \tag{2.5}$$

Bemærk, at den ovenfor diskuterede identifikation af funktioner i samme klasse er ganske naturlig ud fra et kvantemekanisk synspunkt, eftersom to funktioner ψ og ϕ, som opfylder (2.3), regnes for at beskrive den samme kvantemekaniske tilstand. Specielt er sandsynlighederne givet ved (2.5) de samme for ψ og ϕ (jvf. Opgave 2.4).

Et andet grundelement i den kvantemekaniske formalisme med relation til det indre produkt er måleprocessen. En partikel, der vides at befinde sig i en tilstand ψ, vil normalt efter en måleproces befinde sig i en anden tilstand, eller anderledes udtrykt: Måleprocessen forstyrrer det fysiske system. Mere præcist er det sådan, at hvis man foretager en måling, der som resultat enten bekræfter eller afkræfter, at partiklen (efter målingen) befinder sig i tilstanden ϕ, da er sandsynligheden for et bekræftende svar givet ved

$$|\langle\psi,\phi\rangle|^2\,.$$

Specielt gælder, at tilstanden efter målingen ikke kan være vinkelret på ψ. Man kalder tit $\langle\psi,\phi\rangle$ for *overlappet* mellem tilstandene ψ og ϕ.

Da den totale sandsynlighed for at finde partiklen i I er 1, er kvantemekaniske tilstande repræsenteret af enhedsvektorer i $L_2(I)$, dvs. de har norm lig med 1. Ikke destomindre siger man tit, at en partikel befinder sig i en tilstand ψ, som ikke er en enhedsvektor. Hermed menes i såfald, at den befinder sig i den tilsvarende *normerede tilstand* $\psi/\|\psi\|$. Med denne konvention kan man danne linearkombinationer af kvantemekaniske tilstande. Denne egenskab ved tilstandsrummet for et kvantemekanisk system, som ikke har nogen analogi for klassiske mekaniske systemer, kaldes *superpositionsprincippet*. Dette er altså en direkte konsekvens af vektorrumsstrukturen af $L_2(I)$ og giver anledning til de for kvantemekanik så karakteristiske interferensfænomener.

Hilbert rum. Vi afslutter dette afsnit med spørgsmålet om, hvilken karakteristisk egenskab, der adskiller de udvidede indre produkt rum fra dem, der var vores udgangspunkt, ud over de lidt løse betragtninger vedrørende "uendelige linearkombinationer", vi har været inde på. Det store dyr i åbenbaringen her hedder *fuldstændighed*. Denne egenskab er en smart måde at udtrykke maksimaliteten, der indgik i konstruktionen af $\ell_2(\mathbb{N})$ og $L_2(I)$ – altså, at vi medtog *alle* vektorer, for hvilke normen (og det indre produkt) var definerede. Man siger også, at $\ell_2(\mathbb{N})$ og $L_2([a,b])$ er fremkommet ved fuldstændiggørelse af $\ell_0(\mathbb{N})$, henholdsvis $C([a,b])$.

For at kunne formulere denne egenskab har vi brug for først at definere begrebet *Cauchy følge* (eller *fundamentalfølge*): Vi siger, at en følge (v_n) i et indre produkt rum er en Cauchy følge, hvis der for hvert $\varepsilon > 0$ findes et $N \in \mathbb{N}$, således at

$$\|v_n - v_m\| < \varepsilon \text{ for } n, m > N\,,$$

dvs. afstanden mellem to af følgens elementer v_n og v_m kan gøres vilkårlig lille ved at vælge n og m store nok.

Det er klart, at enhver konvergent følge er en Cauchy følge, fordi hvis $v_n \to v$ for $n \to \infty$, da er v_n og v_m begge tæt på v og derfor tæt på hinanden, når n og m er store nok. Eller mere præcist: For et vilkårligt $\varepsilon > 0$ findes $N \in \mathbb{N}$, så $\|v_n - v\| < \frac{\varepsilon}{2}$ for $n > N$, og derfor

$$\|v_n - v_m\| = \|(v_n - v) + (v - v_m)\| \leq \|v_n - v\| + \|v - v_m\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

for $n, m > N$.

Fuldstændighed er kravet om, at det omvendte også er sandt:

Definition 2.1. Et indre produkt rum H er fuldstændigt, hvis enhver Cauchy følge er konvergent. I så fald siges H at være et Hilbert rum.

For de reelle tal $\mathbb{R}$, betragtet som indre produkt rum med sædvanligt indre produkt, er denne egenskab ækvivalent med supremumsegenskaben, omtalt i Matematik 1. Dette diskuteres mere udførligt i appendikset, hvori fuldstændighedsbegrebet søges yderligere belyst. Det følger heraf, at $\mathbb{R}^n$ og $\mathbb{C}^n$ er Hilbert rum og mere generelt, at *ethvert endeligdimensionalt indre produkt rum er et Hilbert rum* (se Opgave 2.5). For endeligdimensionale indre produkt rum er kravet om fuldstændighed derfor overflødigt. Helt anderledes forholder det sig med uendeligdimensionale vektorrum. F.eks. er hverken $\ell_0(\mathbb{N})$ eller $C([a,b])$ fuldstændige. Derimod har vi følgende

Sætning 2.2. *Der gælder, at $\ell_2(\mathbb{N})$ og $L_2([a,b])$ og mere generelt $L_2(I,\rho)$ er Hilbert rum.*

Dette resultat er helt afgørende for disse vektorrums anvendelighed i analysen. Det er ikke svært at eftervise for $\ell_2(\mathbb{N})$, men mere besværligt for $L_2(I,\rho)$, idet det kræver kendskab til det før omtalte udvidede integralbegreb, hvorfor vi afholder os fra at gennemføre det her.

Det bør bemærkes, at tilstandsrummene for kvantemekaniske systemer generelt er Hilbert rum. F.eks. består tilstandsrummet for flerpartikelsystemer uden spin af kvadratisk integrable funktioner af flere variable, nemlig koordinaterne for de enkelte partikler. Vi skal dog ikke omtale disse yderligere i disse noter.

2.2 Ortonormaludvikling

Vi skal i dette afsnit generalisere de centrale resultater vedrørende endeligdimensionale indre produkt rum til vilkårlige Hilbert rum, herunder specielt vise projektionssætningen for uendelige ortonormalsæt.

Konvergens af rækker i Hilbert rum. Vi begynder med at karakterisere præcist hvilke "uendelige linearkombinationer" af vektorerne i et ortonormalsæt, der giver mening. Hertil er det nødvendigt først at definere konvergens af rækker i et indre produkt rum. Dette gøres på samme måde som for talrækker:

Rækken $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$, hvis led v_n er vektorer i et indre produkt rum V, siges at være konvergent med sum $v \in V$, hvis

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} v_n = v\,,$$

altså hvis *afsnitsfølgen* $(s_1, s_2, \dots)$, hvor

$$s_N = \sum_{n=1}^{N} v_n\,,$$

er konvergent i V med grænseværdi v.

Eksempel 2.3. a) Lad os se på rækken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\varepsilon_n$ i $\ell_2(\mathbb{N})$, hvor ortonormalsættet $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots)$ er som i Eksempel 1.1 c). Her er

$$s_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}\varepsilon_n = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{N}, 0, 0, \dots\right).$$

Vi har tidligere bemærket, at følgen $x = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots)$ tilhører $\ell_2(\mathbb{N})$. Da

$$x - s_N = \left(0, 0, \dots, 0, \frac{1}{N+1}, \frac{1}{N+2}, \dots\right)$$

fås

$$\|x - s_N\|^2 = \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \to 0 \text{ for } N \to \infty\,,$$

fordi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ er konvergent, så "halen" $\sum\limits_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergerer imod 0 for $N \to \infty$. Altså har vi indset, at

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\varepsilon_n = (1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \dots)\,.$$

b) Lad os mere generelt undersøge rækken $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_n \varepsilon_n$. Her er

$$s_N = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n \varepsilon_n = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N, 0, 0, \dots)\,.$$

Følgen $x = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots)$ tilhører $\ell_2(\mathbb{N})$ pr. definition netop hvis $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2 < \infty$. I dette tilfælde fås

$$x - s_N = (0, 0, \dots, 0, \lambda_{N+1}, \lambda_{N+2}, \dots)$$

og derfor

$$\|x - s_N\|^2 = \sum_{n=N+1}^{\infty} |\lambda_n|^2 \to 0 \text{ for } N \to \infty\,.$$

Altså er

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \varepsilon_n = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)\,,$$

når højresiden tilhører $\ell_2(\mathbb{N})$. Ellers er rækken divergent. (Overvej dette! Det følger også af Lemma 2.4 nedenfor.)

Ved brug af følgende hjælperesultat kan vi generalisere overvejelserne i det foregående eksempel til vilkårlige ortonormalsystemer i et vilkårligt Hilbert rum.

Lemma 2.4. *Lad $(e_1, e_2, \dots)$ være et ortonormalsæt i et Hilbert rum H. Da er rækken $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n$ konvergent i H hvis og kun hvis $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2$ er konvergent i $\mathbb{R}$, altså netop hvis talfølgen $(\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ tilhører $\ell_2(\mathbb{N})$. I bekræftende fald gælder*

$$\Big\|\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n\Big\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2\,. \tag{2.6}$$

Dette resultat afhænger på afgørende vis af fuldstændigheden af H, ifølge hvilken rækken $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n$ er konvergent netop hvis afsnitsfølgen $(s_1, s_2, \dots)$ er en Cauchy følge. Men da

$$s_N - s_M = \sum_{n=M+1}^{N} \lambda_n e_n\,,$$

for $N > M$, følger af Pythagoras, at

$$\|s_N - s_M\|^2 = \sum_{n=M+1}^{N} |\lambda_n|^2 \, .$$

Kaldes nu afsnitsfølgen for talrækken $\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2$ for $(\gamma_1, \gamma_2, \dots)$, viser dette at

$$\|s_N - s_M\|^2 = \gamma_N - \gamma_M = |\gamma_N - \gamma_M| \, .$$

Heraf ses, at $(s_1, s_2, s_3, \dots)$ er en Cauchy følge (i H) netop hvis $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \dots)$ er en Cauchy følge (i $\mathbb{R}$). Men for fuldstændige rum er Cauchy følge og konvergent følge det samme, og da både H og $\mathbb{R}$ er fuldstændige, følger den første påstand i lemmaet heraf.

Endelig følger ligningen (2.6) af, at

$$\Big\| \sum_{n=1}^{N} \lambda_n e_n \Big\|^2 = \sum_{n=1}^{N} |\lambda_n|^2$$

iflg. Pythagoras, og derfor

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2 = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} |\lambda_n|^2 = \lim_{N\to\infty} \Big\| \sum_{n=1}^{N} \lambda_n e_n \Big\|^2 = \Big\| \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n \Big\|^2 ,$$

hvor det sidste lighedstegn følger af Opgave 1.13.

Projektionssætningen. Udstyret med Lemma 2.4 kan vi nu definere det *afsluttede underrum udspændt af et ortonomalsæt* $(e_1, e_2, \dots)$ ved

$$\overline{\operatorname{span}}\{e_1, e_2, \dots\} = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n \;\middle|\; \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2 < \infty \right\} .$$

Dvs. span $\{e_1, e_2, \dots\}$ og $\overline{\operatorname{span}}\{e_1, e_2, e_3, \dots\}$ afviger fra hinanden ved, at der i det første kun indgår sædvanlige (endelige) linearkombinationer, mens der i det andet indgår alle tilladte, dvs. konvergente, "uendelige linearkombinationer".

Den generelle projektionssætning lyder nu således:

Sætning 2.5. *Lad $(e_1, e_2, \dots)$ være et ortonormalsæt i Hilbert rummet H og lad*

$$U = \overline{\operatorname{span}}\{e_1, e_2, \dots\} \, .$$

For en vilkårlig vektor $v \in H$ findes da netop én vektor $w \in U$, således at afstanden $\|v - w\|$ er mindst mulig. Vektoren w kaldes projektionen af v på U og er givet ved

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} \langle e_n, v \rangle e_n \, , \tag{2.7}$$

og der gælder

$$v - w \in U^{\perp} \, . \tag{2.8}$$

Eftervisningen af dette foregår, pånær enkelte tilføjelser af teknisk art, efter samme recept som for Sætning 1.7:
Det første, vi bemærker, er, at rækken i (2.7) er konvergent. Ifølge Lemma 2.4 er dette nemlig ensbetydende med, at rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle e_n, v\rangle|^2$$

er konvergent. Men det er den, fordi ifølge Bessels ulighed (1.28) er $\sum\limits_{n=1}^{N} |\langle e_n, v\rangle|^2 \leq \|v\|^2$ for alle $N \in \mathbb{N}$ og derfor

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle e_n, v\rangle|^2 \leq \|v\|^2 . \tag{2.9}$$

Vi kan altså definere w ved (2.7) og får da

$$\begin{aligned} \langle e_m, w\rangle &= \left\langle e_m, \sum_{n=1}^{\infty} \langle e_n, v\rangle e_n \right\rangle \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \langle e_m, \langle e_n, v\rangle e_n\rangle \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \langle e_n, v\rangle \langle e_m, e_n\rangle \\ &= \langle e_m, v\rangle , \end{aligned}$$

hvoraf

$$\langle e_m, v - w\rangle = 0$$

for alle $m \in \mathbb{N}$. Men heraf følger, at $v - w \in U^\perp$, fordi der for enhver vektor $\sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m e_m$ i U gælder, at

$$\left\langle \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m e_m, v - w \right\rangle = \sum_{m=1}^{\infty} \overline{\lambda_m} \langle e_m, v - w\rangle = 0 .$$

Resten følger nu lige som i beviset for Sætning 1.7.

Vi har ovenfor to gange trukket et summationstegn $\sum\limits_{n=1}^{\infty}$ uden for et indre produkt. Dette er tilladt ifølge Opgave 2.6.

Ortonormaludvikling, Parsevals ligning og Fourier rækker. For et endeligdimensionalt indre produkt rum er en ortonormalbasis en basis, som også er et ortonormalsæt. Med den generaliserede projektionssætning til rådighed kan vi indføre en brugbar generalisering af dette begreb til vilkårlige Hilbert rum.

Definition 2.6. En *ortonormalbasis* for et Hilbert rum H er et ortonormalsæt $(e_1, e_2, e_3, \dots)$, således at

$$\{e_1, e_2, e_3, \dots\}^\perp = \{\underline{0}\} .$$

Det følger direkte af projektionssætningen, at der for en ortonormalbasis gælder, at $v - w = 0$, dvs. $v = w$, hvor w er givet ved (2.7). Altså

$$\boxed{v = \sum_{n=1}^{\infty} \langle e_n, v \rangle e_n \, .} \tag{2.10}$$

Bemærk specielt, at det følger, at

$$\overline{\text{span}}\{e_1, e_2, e_3, \dots\} = H \; .$$

Rækken i ligningen (2.10) kaldes *ortonormaludviklingen* af v m.h.t. ortonormalbasen $(e_1, e_2, \dots)$. Af Lemma 2.4 følger da *Parsevals ligning*

$$\boxed{\|v\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle e_n, v \rangle|^2 \, .} \tag{2.11}$$

Eksempel 2.7. Af Eksempel 2.2 b) fremgår, at sættet $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots)$ er en ortonormalbasis for $\ell_2(\mathbb{N})$. For $x = (x_1, x_2, \dots) \in \ell_2(\mathbb{N})$ gælder, at $\langle \varepsilon_n, x \rangle = x_n$ således at (2.10) i dette tilfælde siger, at

$$(x_1, x_2, \dots) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \varepsilon_n \, ,$$

hvilket er identisk med den sidste ligning i Eksempel 2.3. Endvidere ses (2.11) at være identisk med definitionen af normen på $\ell_2(\mathbb{N})$.

Af betydelig større interesse end dette noget trivielle eksempel er, at de to ortonormalsæt i Eksempel 1.6 c) er ortonormalbaser for $L_2([-\pi, \pi])$. Dette faktum er allerede blevet formuleret i AEM Kapitel 10, omend noget indirekte, og udgør i en vis forstand grundlaget for Fourierrækketeorien, som det nu skal forklares.

Lad os se på sættet (1.26) eller, mere generelt,

$$\left(\dots, \tfrac{1}{\sqrt{2L}} e^{-i2\pi \frac{x}{L}}, \tfrac{1}{\sqrt{2L}} e^{-i\pi \frac{x}{L}}, \tfrac{1}{\sqrt{2L}}, \tfrac{1}{\sqrt{2L}} e^{i\pi \frac{x}{L}}, \tfrac{1}{\sqrt{2L}} e^{i2\pi \frac{x}{L}}, \dots \right) \, . \tag{2.12}$$

Dette udgør en ortonormalbasis for $L_2([-L, L])$. I henhold til Definition 2.6 betyder dette, at den eneste kvadratisk integrable funktion f på $[-L, L]$, der opfylder

$$\int_{-L}^{L} f(x) e^{i\pi n \frac{x}{L}} dx = 0$$

for alle $n \in \mathbb{Z}$, er nulfunktionen. Vi skal ikke vise dette her, men tage det for givet i det følgende. Ortonormaludviklingen (2.10) af en kvadratisk integrabel funktion f m.h.t. denne ortonormalbasis antager nu formen

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{i\pi n \frac{x}{L}} \tag{2.13}$$

for næsten alle $x \in [-L, L]$, hvor

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{2L}} \langle \frac{1}{\sqrt{2L}} e^{i\pi n \frac{x}{L}}, f \rangle = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(x) e^{-i\pi n \frac{x}{L}} dx \ .$$

Vi ser altså, at denne ortonormaludvikling netop er den komplekse version af Fourier rækkeudviklingen omtalt i AEM Afsnit 10.5 (se især formel (9) p. 548). Bemærk dog, at der i (2.13) er tale om *konvergens i middel* , d.v.s. at

$$\int_{-L}^{L} |f(x) - \sum_{-N}^{N} c_n e^{i\pi n \frac{x}{L}}|^2 dx \to 0 \tag{2.14}$$

for $N \to \infty$, hvorimod Theorem 1 p.535 i AEM udtaler sig om *punktvis konvergens* d.v.s. konvergens af talrækken i (2.13) for hvert fastholdt x. Disse resultater vedrørende konvergens af Fourier rækker kan sammenfattes som følger.

Sætning 2.8. *For enhver kvadratisk integrabel funktion f på $[-L, L]$ er Fourier rækken konvergent i middel og dens sum er f, d.v.s.* (2.14) *gælder.*

Hvis f ydermere er stykkevis glat, er Fourier rækken konvergent i hvert punkt $x \in \mathbb{R}$, og dens sum er lig med $\frac{1}{2}(\tilde{f}(x+) + \tilde{f}(x-))$, hvor $\tilde{f}$ betegner den periodiske udvidelse af f med periode $2L$, og $\tilde{f}(x+)$ og $\tilde{f}(x-)$ er dens grænseværdier fra h.h.v. højre og venstre i x. Specielt er summen lig med $\tilde{f}(x)$, hvis $\tilde{f}$ også er kontinuert i x.

For en kvadratisk integrabel funktion f antager Parsevals ligning nu formen

$$\int_{-L}^{L} |f(x)|^2 dx = 2L \sum_{-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \ . \tag{2.15}$$

Denne version af ligningen optræder ikke direkte i AEM, men er analog med formel (8) p. 536.

På tilsvarende vis som ovefor fås (se Opgave 2.11), at ortonormaludvikling m.h.t. ortonormalbasen (1.25) netop er Fourier rækkeudvikling som defineret i AEM Afsnit 10.3 (for $L = \pi$), og at Parsevals ligning i dette tilfælde netop er formel (8) p. 536 i AEM.

Endvidere kan Fourier-Legendre og Fourier-Bessel rækkeudviklingerne som indført i AEM pp. 242-243 opfattes som ortonormaludviklinger i henholdsvis $L_2([-1, 1])$ og i $L_2(]0, R], x)$. Specielt svarer Fourier-Legendre udvikling til ortonormaludvikling m.h.t. ortonormalbasen $(p_0, p_1, p_2, \dots)$ i $L_2([-1, 1])$, hvor

$$p_n = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} P_n \ ,$$

og P_n som sædvanlig betegner det n'te Legendre polynomium.

Eksempel 2.9. Vi går tilbage til Eksempel 1 p.241-242 og Eksempel 1 p.532-534 i AEM og betragter rækken

$$\frac{4}{\pi} \left(\sin x + \tfrac{1}{3} \sin 3x + \tfrac{1}{5} \sin 5x + \cdots \right) \ . \tag{2.16}$$

Da $\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x, \dots\right)$ er et ortonormalsæt i $L_2([-\pi,\pi])$, jvf. Eksempel 1.6 c), og rækken

$$1^2 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$$

vides at være konvergent, da er (2.16) konvergent i $L_2([-\pi,\pi])$ ifølge Lemma 2.4. Vi kalder summen for f, dvs.

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}\sin(2n-1)x \tag{2.17}$$

for næsten alle $x \in [-\pi,\pi]$. Højresiden i (2.17) er faktisk ortonormaludviklingen af f m.h.t. ortonormalbasen (1.25), idet

$$\begin{aligned}\left\langle \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin mx, f\right\rangle &= \left\langle \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin mx, \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\sin(2n-1)x\right\rangle \\ &= \frac{4}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\left\langle \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin mx, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(2n-1)x\right\rangle \\ &= \begin{cases} \frac{4}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{m} & \text{hvis } m \text{ er ulige} \\ 0 & \text{hvis } m \text{ er lige} \end{cases}\end{aligned}$$

for $m = 1, 2, \dots$, og tilsvarende ses at $\left\langle \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, f\right\rangle = \left\langle \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos mx, f\right\rangle = 0$.

Men højresiden i (2.17) er ifølge de to nævnte eksempler i AEM også ortonormaludviklingen af funktionen

$$g(x) = \begin{cases} -1 & \text{for } x \in [-\pi, 0[\\ 1 & \text{for } x \in [0,\pi]\ . \end{cases}$$

Vi kan derfor slutte, at $f(x) = g(x)$ for næsten alle $x \in [-\pi,\pi]$. Faktisk ved vi p.gr.a. Theorem 1 p. 535 i AEM, at rækken (2.17) er konvergent for hvert $x \in [-\pi,\pi]$ og at

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{for } x \in]-\pi, 0[\\ 1 & \text{for } x \in]0,\pi[\\ 0 & \text{for } x = -\pi, 0, \pi\ . \end{cases}$$

Opgaver

Opgave 2.1 Lad $x = (x_1, x_2, \dots)$ og $y = (y_1, y_2, \dots)$ være to talfølger. Benyt uligheden $|x_n + y_n|^2 \le 2(|x_n|^2 + |y_n|^2)$ (se (1.19)) til at vise, at $x + y$ tilhører $\ell_2(\mathbb{N})$, hvis x og y tilhører $\ell_2(\mathbb{N})$.

Vis, at $\ell_2(\mathbb{N})$ er et underrum af $\ell(\mathbb{N})$.

Opgave 2.2 Lad $x = (x_1, x_2, \dots)$ og $y = (y_1, y_2, \dots)$ være to talfølger. Benyt uligheden $|\overline{x_n} y_n| \leq \frac{1}{2}(|x_n|^2 + |y_n|^2)$, som følger af $(|x_n| - |y_n|)^2 \geq 0$, til at slutte, at

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\overline{x_n} y_n| < \infty \quad \text{hvis} \quad x, y \in \ell_2(\mathbb{N}) ,$$

og at det indre produkt givet ved (1.14) er veldefineret på $\ell_2(\mathbb{N})$.

Opgave 2.3 Eftervis, at $L_2([a, b])$ er et underrum af $F([a, b])$, og at det indre produkt givet ved (1.11) er veldefineret på $L_2([a, b])$. (Benyt lignende fremgangsmåde som i Opgave 2.1 og 2.2.)

Opgave 2.4 Benyt uligheden fra Opgave 1.12 til at indse, at normen af en funktion f i $L_2([a, b])$ kun afhænger af f's klasse, d.v.s. at $\|f\| = \|f'\|$, hvis f og f' tilhører samme klasse.

Brug endvidere Cauchy-Schwarz til at indse, at det indre produkt af to funktioner i $L_2([a, b])$ kun afhænger af de klasser, som f og g tilhører.

Opgave 2.5 1) Begrund, at en følge i $\mathbb{R}^n$ er konvergent, hhv. en Cauchy følge, netop hvis de tilsvarende n koordinatfølger er konvergente, hhv. Cauchy følger, i $\mathbb{R}$, og benyt dette til at indse, at $\mathbb{R}^n$ er fuldstændigt, og ligeså $\mathbb{C}^n$.

2) Lad H være et endeligdimensionalt indre produkt rum og lad $(e_1, \dots, e_n)$ være en ortonormalbasis for H.

Brug Pythagoras til at godtgøre, at afstanden mellem to vektorer i H er lig med afstanden i $\mathbb{R}^n$ eller $\mathbb{C}^n$ mellem deres koordinatsæt m.h.t. basen, og benyt dette til at slutte, at H er fuldstændigt.

Opgave 2.6 Lad $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ være en konvergent række i et indre produkt rum V.

Benyt Opgave 1.14 til at slutte, at

$$\langle \sum_{n=1}^{\infty} v_n, w \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle v_n, w \rangle$$

og

$$\langle w, \sum_{n=1}^{\infty} v_n \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle w, v_n \rangle$$

for en vilkårlig vektor $w \in V$.

Opgave 2.7 Eftervis, at sættet (2.12) er et ortonormalsæt i $C([-L, L])$.

Udnyt, at sættet (1.26) er en ortonormalbasis for $C([-\pi, \pi])$ til at vise, at (2.12) er en ortonormalbasis for $C([-L, L])$. (Vink: Benyt et simpelt variabelskift til at udtrykke det indre produkt på $C([-L, L])$ ved det indre produkt på $C([-\pi, \pi])$.)

Opgave 2.8 Eftervis, at

$$\left(\sqrt{\tfrac{2}{L}} \sin \tfrac{\pi x}{L}, \sqrt{\tfrac{2}{L}} \sin \tfrac{2\pi x}{L}, (\sqrt{\tfrac{2}{L}} \sin \tfrac{3\pi x}{L}, \dots \right)$$

og

$$\left(\tfrac{1}{\sqrt{L}}, \sqrt{\tfrac{2}{L}}\cos\tfrac{\pi x}{L}, \sqrt{\tfrac{2}{L}}\cos\tfrac{2\pi x}{L}, \sqrt{\tfrac{2}{L}}\cos\tfrac{3\pi x}{L}, \dots\right)$$

er ortonormalsæt i $L_2([0, L])$. Disse er begge ortonormalbaser for $L_2([0, L])$.

Opgave 2.9 Eftervis, at

$$\left(\sin\tfrac{\pi x}{2L}, \sin\tfrac{3\pi x}{2L}, \sin\tfrac{5\pi x}{2L}, \dots\right)$$

er et ortogonalsæt i $C([0, L])$, og opskriv det tilsvarende ortonormalsæt efter normering. Dette er en ortonormalbasis for $L_2([0, L])$.

Opgave 2.10 Lad $(e_1, e_2, \dots)$ være et ortonormalsæt i Hilbert rummet H.

1) Vis, at rækken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e_n$ er konvergent i H, og afgør for hvilke $\alpha \in \mathbb{R}$ rækken $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} e_n$ er konvergent i H.

2) Bestem projektionen af vektorerne $e_1 \pm 2e_2$ på (underrummet udspændt af) vektoren $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} e_n$.
(Man kan benytte, at $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.)

Opgave 2.11 Diskuter sammenhængen mellem ortonormaludvikling m.h.t. ortonormalbaserne (1.25) og Fourier rækkerne i Afsnit 10.3 i AEM.

Opgave 2.12 Lad a være et komplekst tal. Bestem de værdier af a, for hvilke følgen $(1, a, a^2, a^3, \dots)$ tilhører $\ell_2(\mathbb{N})$.

Opgave 2.13 Lad $(e_1, e_2, e_3, \dots)$ være en ortonormalbasis for Hilbert rummet H. Vis, at der for alle $v, w \in H$ gælder:

$$\langle v, w\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \langle v, e_i\rangle\langle e_i, w\rangle\ .$$

Opgave 2.14 1) Afgør for hvilke $\alpha \in \mathbb{R}$ funktionerne

$$f_\alpha(x) = \frac{1}{x^\alpha} \qquad \text{og} \qquad g_\alpha(x) = e^{-\alpha x}$$

tilhører $L_2([1, \infty[)$.

b) Eftervis, at følgerne $(f_1, f_2, f_3, \dots)$ og $(g_1, g_2, g_3, \dots)$ konvergerer (i middel) imod nulfunktionen i $L_2([1, \infty[)$.

Opgave 2.15 a) Afgør, for hvilke $\alpha \in \mathbb{R}$ funktionerne

$$f_\alpha(x) = \frac{1}{(1 + |x|)^\alpha} \qquad \text{og} \qquad g_\alpha(x) = \frac{1}{|x|^\alpha}$$

tilhører $L_2(\mathbb{R})$.

b) Eftervis, at følgen $(f_1, f_2, f_3, \dots)$ konvergerer (i middel) imod nulfunktionen i $L_2(\mathbb{R})$.

Opgave 2.16 a) Afgør, for hvilke $\alpha \in \mathbb{R}$ funktionen

$$f_\alpha(x) = \frac{1}{1+|x|^\alpha}$$

tilhører $L_2(\mathbb{R})$.

b) Eftervis, at følgen $(f_1, f_2, f_3, \dots)$ konvergerer (i middel) imod funktionen f i $L_2(\mathbb{R})$, der er lig med 1 på intervallet $[-1, 1]$ og 0 udenfor.

Opgave 2.17 Begrund, at alle funktioner af formen

$$P(x)e^{-\alpha x^2} ,$$

hvor $\alpha > 0$ og P er et polynomium, tilhører $L_2(\mathbb{R})$.

Opgave 2.18 Lad $(e_1, e_2, e_3, \dots)$ være en ortonormalbasis for $L_2(\mathbb{R})$ og antag, at en kvantemekanisk partikel på $\mathbb{R}$ befinder sig i tilstanden

$$\psi = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n .$$

Begrund, at sandsynligheden for, at en måling vil resultere i tilstanden e_n, er lig med $|a_n|^2$ samt, at der gælder

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 = 1 .$$