Videregående vektorrumsteori

Bergfinnur Durhuus

Januar 2003

Indledning

Vektorrumsformalismen viser sig at være nyttig til formulering og analyse af mange forskelligartede fysiske problemstillinger. Vi har allerede set forskellige begreber fra vektorrumsteori dukke op i forbindelse med løsning af differentialligninger, både sædvanlige og partielle, samt i Fourierrækketeorien og mere generelt i Sturm-Liouville teorien. Eksempelvis fremstillede vi løsninger til varmeledningsligningen som linearkombinationer af løsninger til det tilsvarende homogene problem, og i Sturm-Liouville teorien bemærkede vi vigtigheden af ortogonaliteten af egenfunktionerne.

Som et yderligere eksempel på en fysisk disciplin, hvori vektorrumsteori indgår på afgørende vis, kan nævnes kvantemekanik, som vi lejlighedsvis kommer til at berøre i disse noter.

Fælles for de vektorrum, der indgår i ovennævnte eksempler, er, at de er af uendelig dimension. Vores mål i det følgende er at udvide dele af den fra første år kendte teori om endeligdimensionale indre produkt rum til en vis klasse af uendeligdimensionale vektorrum, kaldet *Hilbert rum*, som er stor nok til at omfatte ovennævnte eksempler og mere til. Dette muliggør samtidig en forenklet formulering og en præcisering af en del af resultaterne vedrørende differentialligninger, vi har mødt i Kreyszigs bog.

I Kapitel 1 genopfriskes mestendels velkendte begreber fra elementær vektorrumsteori, dog udvidet til komplekse vektorrum. I Kapitel 2 indføres Hilbert rum og grundlæggende resultater vedrørende disse udledes og illustreres. Kapitel 3 omhandler lineære afbildninger mellem Hilbert rum og i særdeleshed differentialoperatorer. Et appendiks er tilføjet, som uddyber nogle aspekter af Kapitel 2.

I disse noter henviser betegnelsen LA til lærebogen Robert Messer: Linear Algebra, 1994-udgaven, og AEM til Erwin Kreyszig: Advanced Engeneering Mathematics, 8. udgave. Messers bog benyttes i Matematik 1, men de resultater, der henvises til, vil også kunne findes i Matematik A lærebogen af Edwards og Penney.

1 Elementær vektorrumsteori

1.1 Nogle eksempler på vektorrum

Et vektorrum er som bekendt en mængde V udstyret med en addition, som definerer summen $v + w$ af to vektorer v, w i V, og en skalarmultiplikation, som definerer produktet λv af en skalar (dvs. et tal) λ og en vektor v i V. Disse opfylder visse standard regneregler, som angivet i LA Definition 1.1, og som vi udlader at gengive her. Afhængig af om skalarerne er reelle tal eller komplekse tal taler vi om et *reelt vektorrum*, henholdsvis *komplekst vektorrum*, eller om et *vektorrum over* $\mathbb{R}$, henholdsvis $\mathbb{C}$. Nedenfor gives nogle eksempler.

Talrum. Fra Matematik 1 er talrummene $\mathbb{R}^n$, hvor $n = 1, 2, 3, \ldots$, velkendte reelle vektorrum. Tilsvarende er de komplekse talrum

$$\mathbb{C}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) |\ x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{C}\}$$

eksempler på komplekse vektorrum, når addition og skalarmultiplikation defineres koordinatvis (som for $\mathbb{R}^n$), dvs.

$$\begin{aligned} (x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) &= (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) \\ \lambda(x_1, \ldots, x_n) &= (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n) \ . \end{aligned}$$

Bemærk dog, at $\mathbb{C}^n$ også kan opfattes som et reelt vektorrum (idet λ ovenfor da blot antages at tilhøre $\mathbb{R}$ i stedet for $\mathbb{C}$), hvorimod $\mathbb{R}^n$ ikke kan opfattes som komplekst vektorrum (idet multiplikation af et reelt talsæt med et komplekst tal i almindelighed ikke tilhører $\mathbb{R}^n$).

Funktionsrum. Af større interesse for os i det følgende er vektorrum bestående af funktioner. Hvis eksempelvis $[a, b]$ er et interval, vil vi ligesom Messer bruge betegnelsen $F([a, b])$ for vektorrummet af funktioner defineret på $[a, b]$. Hvis ikke andet er anført, vil det være underforstået, at funktionerne antager komplekse værdier, hvorved $F([a, b])$ bliver et komplekst vektorrum. Hvis vi ønsker at understrege, at der er tale om reelle funktioner, henholdsvis komplekse funktioner, skriver vi $F([a, b], \mathbb{R})$, henholdsvis $F([a, b], \mathbb{C})$. Det er her naturligvis ikke afgørende, at funktionerne er definerede på et interval. Definitionsmængden kan være en vilkårlig mængde M, f.eks. $\mathbb{R}^2$ svarende til funktioner af to variable, idet addition og skalarmultiplikation jo defineres punktvis, dvs. for $f, g \in F(M)$ og $\lambda \in \mathbb{C}$ er funktionerne $f + g$ og λf givne ved

$$\begin{aligned} (f + g)(x) &= f(x) + g(x) \ , \quad x \in M \ , \\ (\lambda f)(x) &= \lambda f(x) \ , \quad x \in M \ . \end{aligned}$$

Som det vil fremgå, er det i konkrete problemstillinger sjældent rummene bestående af *alle* funktioner på en mængde, der er af interesse, men snarere delmængder heraf, som i sig selv er vektorrum (med samme addition og skalarmultiplikation), dvs. underrum af disse, jvf. Definition 1.10 i LA. Det kan f.eks. være rummet $C([a, b])$ bestående af kontinuerte funktioner på $[a, b]$. Denne er et underrum af $F([a, b])$, da summen af to kontinuerte funktioner er kontinuert, og ligeledes en konstant gange en kontinuert funktion, jvf. Theorem 1.11 i LA. Et andet eksempel er rummet $D([a, b])$ bestående af differentiable funktioner på $[a, b]$. Vi skal i Kapitel 2 indføre flere funktionsrum af interesse.

Følgerum. Vi får også lejlighed til at beskæftige os med vektorrum bestående af følger. Med $\ell(\mathbb{N})$ vil vi betegne mængden af alle komplekse talfølger med sædvanlig addition og skalarmultiplikation, dvs. hvis $(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ og $(y_1, y_2, y_3, \ldots)$ er to talfølger og $\lambda \in \mathbb{C}$, sættes

$$\begin{aligned} (x_1, x_2, x_3, \ldots) + (y_1, y_2, y_3, \ldots) &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, \ldots)\ , \\ \lambda(x_1, x_2, x_3, \ldots) &= (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3, \ldots)\ . \end{aligned}$$

Faktisk kan dette eksempel anskues som et specielt tilfælde af det foregående, svarende til $M = \mathbb{N}$, eftersom en følge $(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ kan opfattes som en funktion på $\mathbb{N}$, nemlig funktionen, der afbilder n i x_n, for $n \in \mathbb{N}$.

Som et eksempel på et underrum af $\ell(\mathbb{N})$ har vi rummet $\ell_0(\mathbb{N})$ bestående af følger, der er 0 fra et vist trin, dvs, følger med kun endelig mange elementer forskellige fra 0. Det overlades til læseren at overbevise sig om, at der her faktisk er tale om et underrum (jvf. Opgave 1.1).

1.2 Grundlæggende begreber

Lineær (u)afhængighed. Addition og skalarmultiplikation giver os mulighed for at danne *linearkombinationer* af vektorer i et vektorrum V. For $v_1, \ldots, v_n \in V$ og skalarer $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ kaldes udtrykket

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$$

linearkombinationen af $v_1, \ldots, v_n$ med koefficienter $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Da der gælder, at $0v = \underline{0}$ for alle vektorer v i V (hvor $\underline{0}$ betegner nulvektoren i V), er linearkombinationen af $v_1, \ldots, v_n$, hvis koefficienter alle er 0, lig med $\underline{0}$. Såfremt alle andre linearkombinationer af $v_1, \ldots, v_n$ er forskellige fra $\underline{0}$, siges $v_1, \ldots, v_n$ at være *lineært uafhængige*. M.a.o. er $v_1, \ldots, v_n$ lineært uafhængige, hvis der gælder

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = \underline{0} \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0\ .$$

Vi siger i dette tilfælde også, at sættet $(v_1, \ldots, v_n)$ er lineært uafhængigt.

Vi udvider begrebet lineær uafhængighed til også at omfatte følger af vektorer ved at definere følgen $(v_1, v_2, v_3, \ldots)$ til at være lineært uafhængig, hvis sættet $(v_1, \ldots, v_n)$ er lineært uafhængigt for alle $n \in \mathbb{N}$. Tit vil vi omtale følgen $(v_1, v_2, v_3, \ldots)$ som et (uendeligt) sæt af vektorer i V. Når vi derfor omtaler *sæt af vektorer* i det følgende, kan der være tale om endelige eller uendelige sæt.

Et sæt af vektorer, der ikke er lineært uafhængigt siges selvfølgelig at være *lineært afhængigt*.

Span. Det er klart, at summen af en linearkombination af $v_1, \ldots, v_n$ og en linearkombination af $w_1, \ldots, w_m$ er en linearkombination af $v_1, \ldots, v_n, w_1, \ldots, w_m$, og at produktet af en skalar λ og en linearkombination af $v_1, \ldots, v_n$ er en linearkombination af $v_1, \ldots, v_n$. Heraf ses, at for en vilkårlig delmængde $A \subseteq V$ gælder, at mængden span$A$ bestående af alle linearkombinationer af vektorer fra A (se Definition 3.2 i LA), er et underrum af V (iflg. Theorem 1.11 i LA). Det kaldes *underrummet udspændt af* A og er faktisk det mindste underrum af V, der indeholder A, jvf. Opgave 1.2.

Basis og dimension. Et sæt $(v_1, \ldots, v_n)$ af vektorer i V siges at være en basis for V, hvis det er lineært uafhængigt og udspænder V, jvf. Definition 3.6 i LA. Det huskes fra Matematik 1, at dette betyder, at enhver vektor v i V på entydig måde kan skrives som en linearkombination af $v_1, \ldots, v_n$, og de tilsvarende koefficienter kaldes *koordinaterne* for v m.h.t. basen $(v_1, \ldots, v_n)$.

Hvis V har en basis $(v_1, \ldots, v_n)$, gælder, at et vilkårligt lineært uafhængigt sæt i V har højst n vektorer (Theorem 3.9 i LA), og et vilkårligt sæt, der udspænder V, har mindst n vektorer (Theorem 3.11 i LA). Heraf følger, at antallet af vektorer i enhver basis for V er netop n, som kaldes *dimensionen* af V og betegnes $\dim V$.

Som vi skal se, findes der i ovenfor omtalte funktionsrum og følgerum uendelige lineært uafhængige sæt, hvorfor rummenes dimension ikke kan være endelig.

Eksempel 1.1. a) Lad os se på vektorerne $v_1 = (1,2,1), v_2 = (0,2,3)$, $v_3 = (2,2,-1)$ i vektorrummet $\mathbb{C}^3$ og sætte

$$U = \text{span}\{v_1, v_2, v_3\} \ .$$

De tre vektorer er lineært afhængige, da

$$v_3 = 2v_1 - v_2 \ . \tag{1.1}$$

Altså er $v_3 \in \text{span}\{v_1, v_2\}$, og derfor er

$$U = \text{span}\{v_1, v_2\} \ ,$$

eftersom enhver linearkombination af v_1, v_2, v_3 også kan skrives som en linearkombination af v_1, v_2 ved brug af (1.1). Dette argument viser mere generelt, at der for vilkårlige delmængder A, B af et vektorrum V gælder, at

$$\text{span}(A \cup B) = \text{span}A \quad \text{hvis} \quad B \subseteq \text{span}A$$

(jvf. Opgave 1.3).

Vektorerne v_1 og v_2 ovenfor er lineært uafhængige, da de ikke er proportionale. Derfor udgør de en basis for U, så $\dim U = 2$.

b) Vi betragter vektorerne $v_1 = 1$, $v_2 = \cos x$, $v_3 = \cos 2x$ i vektorrummet $C([-\pi, \pi])$. Her betegner 1 som sædvanlig den konstante funktion 1 på $[-\pi, \pi]$.

Disse tre vektorer er lineært uafhængige. Antag nemlig, at

$$\lambda_1 + \lambda_2 \cos x + \lambda_3 \cos 2x = 0 \quad \text{for} \quad x \in [-\pi, \pi] \ .$$

Indsættes heri de tre værdier $x = 0$, $\frac{\pi}{2}$, π, fås de tre ligninger

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 &= 0 \\ \lambda_1 + 0 - \lambda_3 &= 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 &= 0 \ , \end{aligned}$$

som let ses kun at have løsningen $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. (Af Eksempel 1.6 c) nedenfor vil det ligeledes fremgå, at v_1, v_2, v_3 er lineært uafhængige.) Altså har

$$U = \operatorname{span}\{v_1, v_2, v_3\} \ .$$

dimension 3.

Det er klart, at $1 + \cos x \in U$. Idet vi genkalder formlen

$$\cos^2 \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}(1 + \cos x) \ ,$$

følger det, at $\cos^2 \frac{1}{2}x \in U$. Tilsvarende ses, at $\cos^2 x \in U$. Derimod tilhører $\cos^3 x$ ikke U, jvf. Opgave 1.4.

c) I vektorrummet $\ell_0(\mathbb{N})$ sætter vi $\varepsilon_1 = (1, 0, 0, 0, \dots)$, $\varepsilon_2 = (0, 1, 0, 0, \dots)$, $\varepsilon_3 = (0, 0, 1, 0, \dots)$, $\dots$, dvs. ε_n er følgen, hvis elementer alle er 0 pånær det n'te, som er 1. Disse følger tilhører klart $\ell_0(\mathbb{N})$, og for $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ er

$$\lambda_1\varepsilon_1 + \cdots + \lambda_n\varepsilon_n = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, 0, 0, \dots) \ . \tag{1.2}$$

Dette viser, at enhver følge i $\ell_0(\mathbb{N})$ kan skrives som en linearkombination af vektorerne $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots$, altså

$$\ell_0(\mathbb{N}) = \operatorname{span}\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots\} \ .$$

Det ses også umiddelbart af (1.2), at sættet $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots)$ er lineært uafhængigt. Det er dermed et eksempel på en (uendelig) basis for $\ell_0(\mathbb{N})$.

1.3 Indre produkt rum

Indre produkt på reelle vektorrum er defineret i LA Definition 4.1. Vi udvider nu dette til også at omfatte komplekse vektorrum. Som det vil ses, består forskellen på det reelle og det komplekse tilfælde alene i, at kompleks konjugering af visse udtryk, specielt i (1.4) og (1.8) nedenfor, bortfalder i det reelle tilfælde.

Indre produkt. For hvert par af vektorer v, w i et komplekst vektorrum V er det *indre produkt* $\langle v, w\rangle$ et komplekst tal, som kræves at opfylde følgende fire betingelser:

$$\begin{aligned}
&i) && \langle v, v\rangle > 0 \quad \text{for} \quad v \neq \underline{0} && (1.3)\\
&ii) && \langle v, w\rangle = \overline{\langle w, v\rangle} && (1.4)\\
&iii) && \langle v, w_1 + w_2\rangle = \langle v, w_1\rangle + \langle v, w_2\rangle && (1.5)\\
&iv) && \langle v, \lambda w\rangle = \lambda\langle v, w\rangle \ . && (1.6)
\end{aligned}$$

Når der på et vektorrum er givet et sådant indre produkt, taler vi om et *indre produkt rum.*

Inden vi ser på nogle eksempler, er det værd at knytte nogle bemærkninger til definitionen:

- Bemærk det skarpe ulighedstegn i (1.3) for $v \neq \underline{0}$. Sættes $\lambda = 0$ i (1.6), fås

$$\langle v, \underline{0}\rangle = 0 \qquad \text{for alle } v \in V \ ,$$

og derfor specielt $\langle \underline{0}, \underline{0} \rangle = 0$. D.v.s. $\langle v, v \rangle = 0$, hvis og kun hvis $v = \underline{0}$.
• Betingelserne *iii*) og *iv*) udtrykker, at det indre produkt er *lineært i anden variabel* og er ækvivalente med kravet

$$\langle v, \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 \rangle = \lambda_1 \langle v, w_1 \rangle + \lambda_2 \langle v, w_2 \rangle$$

eller mere generelt

$$\langle v, \lambda_1 w_1 + \cdots + \lambda_n w_n \rangle = \lambda_1 \langle v, w_1 \rangle + \cdots + \lambda_n \langle v, w_n \rangle \tag{1.7}$$

(jvf. Opgave 1.5).
• Kombineres *ii*) med *iii*) og *iv*) fås (jvf. Opgave 1.5)

$$\begin{aligned} \langle v_1 + v_2, w \rangle &= \langle v_1, w \rangle + \langle v_2, w \rangle \\ \langle \lambda v, w \rangle &= \overline{\lambda} \langle v, w \rangle \end{aligned}$$

eller ækvivalent hermed

$$\langle \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n, w \rangle = \overline{\lambda}_1 \langle v_1, w \rangle + \cdots + \overline{\lambda}_n \langle v_n, w \rangle \ . \tag{1.8}$$

Vi siger, at det indre produkt er *konjugeret lineært* i første variabel. I det reelle tilfælde bortfalder den komplekse konjugering, så det indre produkt er lineært i begge variable, som det er kendt fra Matematik 1.
• Det er ikke afgørende for den følgende teori, at vi har krævet linearitet i anden variabel i stedet for i første variabel. Faktisk er den sædvanlige konvention i matematiklitteratur linearitet i første variabel, hvorimod fysiklitteratur, specielt vedrørende kvantemekanik, fortrinsvis benytter den her valgte konvention.

Eksempel 1.2. a) *Det sædvanlige indre produkt på* $\mathbb{C}^n$. Dette defineres ved

$$\langle (x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) \rangle = \overline{x_1} y_1 + \cdots + \overline{x_n} y_n \ . \tag{1.9}$$

Det overlades til læseren at eftervise, at kravene $i) - iv)$ er opfyldt (jvf. Opgave 1.6). Bemærk især den komplekse konjugering, der indgår i definitionen, som er afgørende for positivitet af

$$\langle (x_1, \ldots, x_n), (x_1, \ldots, x_n) \rangle = |x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2 \ . \tag{1.10}$$

b) *Det sædvanlige indre produkt på* $C([a, b])$. For $f, g \in C([a, b])$ defineres dette ved

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b \overline{f(x)} g(x) dx \ . \tag{1.11}$$

Også her er den komplekse konjugering afgørende for positivitet af

$$\langle f, f \rangle = \int_a^b |f(x)|^2 dx \ . \tag{1.12}$$

Bemærk, at det indre produkt (1.11) ikke giver mening for vilkårlige funktioner i $F([a, b])$, da integralet kun er defineret for kontinuerte funktioner. Bemærk også, at en kompleks funktion $f = f_1 + if_2$, hvor f_1 og f_2 betegner henholdsvis real- og imaginærdelen af f, er kontinuert, netop hvis både f_1 og f_2 er kontinuerte (reelle) funktioner, og integralet af f er da defineret ved at integrere real- og imaginærdel hver for sig, dvs.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f_1(x)dx + i\int_a^b f_2(x)dx \ .$$

c) *Indre produkt på* $C([a,b])$ *med vægtfunktion.* For enhver positiv kontinuert funktion ρ på $[a,b]$ kan vi definere et indre produkt $\langle\cdot,\cdot\rangle_\rho$ på $C([a,b])$ ved

$$\langle f,g\rangle_\rho = \int_a^b \overline{f(x)}g(x)\rho(x)dx \ . \tag{1.13}$$

Dette kaldes det indre produkt med *vægtfunktion* ρ. For $\rho = 1$ fås det sædvanlige indre produkt. Det overlades til læseren at eftervise, at $\langle\cdot,\cdot\rangle_\rho$ opfylder kravene $i)-iv)$, jvf. Opgave 1.7.

I diskussionen af Bessel funktioner i AEM Theorem 2 p. 232 indgik det indre produkt $\langle\cdot,\cdot\rangle_\rho$ på $C([0,R])$, hvor $\rho(x) = x$, og det indre produkt (1.11) på $C([-1,1])$ optrådte i forbindelse med Legendre polynomier i Eksempel 4 p.237. Endvidere har vi set det sædvanlige indre produkt på $C([-\pi,\pi])$ i forbindelse med Fourier rækker i Afsnit 10.2 i AEM.

d) *Det sædvanlige indre produkt på* $\ell_0(\mathbb{N})$. Dette defineres ved

$$\langle(x_1,x_2,x_3,\dots),(y_1,y_2,y_3,\dots)\rangle = \sum_{n=1}^{\infty}\overline{x_n}y_n \ . \tag{1.14}$$

Her bemærkes, at rækken på højresiden er konvergent, da kun endelig mange af dens led er forskellige fra 0 ifølge definitionen af $\ell_0(\mathbb{N})$. Derimod kan (1.14) naturligvis ikke bruges som definition af et indre produkt på $\ell(\mathbb{N})$, da rækken generelt vil være divergent. Læseren bedes i Opgave 1.8 om at eftervise, at (1.14) definerer et indre produkt på $\ell_0(\mathbb{N})$. Vi skal i Kapitel 2 udvide dette til et større vektorrum.

Cauchy-Schwarz' ulighed. Et nøgleresultat vedrørende indre produkt rum er Cauchy-Schwarz' ulighed:

$$\boxed{|\langle v,w\rangle| \leq \|v\|\|w\|} \tag{1.15}$$

hvor *normen* $\|v\|$ af $v \in V$ er defineret ved

$$\|v\| = \sqrt{\langle v,v\rangle} \ . \tag{1.16}$$

Denne ulighed findes i LA Theorem 4.8 for reelle vektorrum. For komplekse vektorrum kan den indses ved en mindre tilpasning af argumentet i LA, som vi giver her for fuldstændigheds skyld:
Hvis v eller w er $\underline{0}$, står der 0 på begge sider af uligheden, så vi antager, at $v \neq 0$ og $w \neq 0$. Da er også $\|v\| \neq 0$ og $\|w\| \neq 0$, og ved brug af $i) - iv)$ får vi

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle \|v\|^{-1}v - \|w\|^{-1}w, \|v\|^{-1}v - \|w\|^{-1}w\rangle \\ &= \|v\|^{-2}\langle v,v\rangle + \|w\|^{-2}\langle w,w\rangle - \|v\|^{-1}\|w\|^{-1}(\langle v,w\rangle + \langle w,v\rangle) \\ &= 2 - 2\|v\|^{-1}\|w\|^{-1}\mathrm{Re}\langle v,w\rangle \ , \end{aligned}$$

og dermed

$$\mathrm{Re}\langle v,w\rangle \le \|v\|\|w\| \;, \tag{1.17}$$

hvor $\mathrm{Re}\, z$ står for realdelen af det komplekse tal z. Denne ulighed gælder altså for alle $v, w \in V \setminus \{\underline{0}\}$, så vi kan erstatte v med $e^{i\theta}v$, hvor θ er et argument til det komplekse tal $\langle v,w\rangle$, således at $\langle v,w\rangle = |\langle v,w\rangle| e^{i\theta}$. Da fås, at venstresiden af (1.17) bliver

$$\mathrm{Re}\langle e^{i\theta}v, w\rangle = \mathrm{Re}(e^{-i\theta}\langle v,w\rangle) = |\langle v,w\rangle| \;,$$

mens højresiden forbliver uændret $\|v\|\|w\|$, idet

$$\begin{aligned} \|e^{i\theta}v\| &= \sqrt{\langle e^{i\theta}v, e^{i\theta}v\rangle} = \sqrt{e^{-i\theta}e^{i\theta}\langle v,v\rangle} \\ &= \sqrt{\langle v,v\rangle} = \|v\| \;. \end{aligned}$$

Dette viser (1.15).

Eksempel 1.3. Cauchy-Schwarz' ulighed har et væld af nyttige konsekvenser ved anvendelse på passende vektorer i passende indre produkt rum:

- Lader vi f.eks. v og w være vektorerne x og $\sin x$ i $C([0,\pi])$, fås

$$\left(\int_0^\pi x \sin x dx\right)^2 \le \int_0^\pi x^2 dx \int_0^\pi \sin^2 x dx \;. \tag{1.18}$$

Her kan begge sider naturligvis udregnes, og man kan derved direkte verificere, at uligheden er opfyldt, jvf. Opgave 1.10.

- Af mere almen interesse er uligheden, man får ved at lade v være vektoren $(1, 1, \ldots, 1)$ i $\mathbb{C}^n$ og $w = (x_1, \ldots, x_n)$ en vilkårlig vektor i $\mathbb{C}^n$. Med det sædvanlige indre produkt (1.9) fås da, at $\langle v,w\rangle = x_1 + \cdots + x_n$ og $\|v\| = \sqrt{n}$. Iflg. (1.15) er derfor

$$|x_1 + \cdots + x_n|^2 \le n(|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2) \tag{1.19}$$

for vilkårlige komplekse tal $x_1, \ldots, x_n$.

- Lad endelig v være den konstante funktion 1 på $[a,b]$ og w være en vilkårlig kontinuert funktion f på $[a,b]$. Med det sædvanlige indre produkt (1.11) på $C([a,b])$ fås da, at $\langle v,w\rangle = \int_a^b f(x)dx$ og $\|v\| = \sqrt{b-a}$, og (1.15) giver

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right|^2 \le (b-a)\int_a^b |f(x)|^2 dx \;. \tag{1.20}$$

Afstand og konvergens af følger. I LA Theorem 4.9 er det vist, at normen $\|\cdot\|$ givet ved (1.16) besidder følgende tre vigtige egenskaber:

$$\begin{aligned} \|v\| &> 0 \quad \text{for} \quad v \ne \underline{0} && (1.21)\\ \|\lambda v\| &= |\lambda|\|v\| && (1.22)\\ \|v+w\| &\le \|v\| + \|w\| \;, && (1.23) \end{aligned}$$

hvor (1.23) kaldes *trekantsuligheden*. Disse relationer gælder også for komplekse vektorrum og vises pånær mindre ændringer på samme måde som i LA p. 150-151 og overlades til læseren, jvf. Opgave 1.11.

Vi opfatter $\|v-w\|$ som et mål for afstanden mellem v og w. I talrummene $\mathbb{R}^n$ og $\mathbb{C}^n$ med sædvanligt indre produkt (1.9) er der tale om den sædvanlige euklidiske afstand mellem punkter $x=(x_1,\dots,x_n)$ og $y=(y_1,\dots,y_n)$ givet ved

$$\|x-y\| = \sqrt{|x_1-y_1|^2+\cdots+|x_n-y_n|^2}\ .$$

For funktioner f og g i $C([a,b])$ med sædvanligt indre produkt (1.11) er afstanden givet ved

$$\|f-g\| = \left(\int_a^b |f(x)-g(x)|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\ .$$

Dette generaliserede afstandsbegreb sætter os i stand til at udvide konvergensbegrebet fra tal- eller punktfølger til følger af vektorer i et vilkårligt indre produkt rum på følgende vis.

Definition 1.4. En følge $(v_1,v_2,v_3,\dots)$ i et indre produkt rum V siges at konvergere imod vektoren $v\in V$, hvis der gælder, at afstanden mellem v_n og v går imod 0 for $n\to\infty$, altså hvis

$$\|v_n-v\|\to 0 \quad \text{for} \quad n\to\infty\ ,$$

og vi skriver da

$$\lim_{n\to\infty} v_n = v \qquad \text{eller} \qquad v_n\to v \quad \text{for} \quad n\to\infty\ .$$

Eksempel 1.5. Vi betragter følgen $(x,x^2,x^3,\dots)$ af funktioner i vektorrummet $C([0,1])$ med sædvanligt indre produkt. Denne følge konvergerer imod nulfunktionen, fordi

$$\|x^n-0\|^2 = \int_0^1 |x^n-0|^2dx = \int_0^1 x^{2n}dx = \frac{1}{2n+1} \to 0 \ \text{ for } \ n\to\infty\ .$$

Bemærk, at for hvert fast $x\in[0,1[$ konvergerer talfølgen $(x,x^2,x^3,\dots)$ imod 0, mens den for $x=1$ konvergerer imod (er konstant lig med) 1. Dvs. at funktionsfølgen $(x,x^2,x^3,\dots)$ ikke konvergerer imod 0 i alle punkter af $[0,1]$, men ikke desto mindre konvergerer den imod nulfunktionen i henhold til Definition 1.4.

Man kalder tit konvergens af en funktionsfølge $(f_1,f_2,f_3,\dots)$ i indre produkt rummet $C([a,b])$ for *konvergens i middel*. Er grænseværdien f, betyder dette altså, at

$$\int_a^b |f_n(x)-f(x)|^2dx \to 0 \quad \text{for} \quad n\to\infty\ ,$$

dvs. middelværdien af afstandskvadratet $|f_n(x)-f(x)|^2$ over intervallet $[a,b]$ skal gå imod 0.

Hvis der derimod gælder, at

$$f_n(x)\to f(x) \ \text{ for } \ n\to\infty \quad \text{for hvert } x\in[a,b]\ ,$$

taler vi om *punktvis konvergens* af $(f_1,f_2,f_3,\dots)$ imod f. Det er konvergens i denne betydning, der indgår i diskussionen af potensrækker i Matematik 1, og tillige i Theorem 1 p. 535 i AEM. Eksemplet ovenfor viser, at de to former for konvergens er forskellige (omend ikke helt uafhængige af hinanden).

Bemærk endelig, at vi i Afsnit 10.7 i AEM allerede har været inde på begrebet konvergens i middel, blot var det der ikke sat i forbindelse med indre produkt rum.

1.4 Ortogonalitet

Ortogonalsæt og Pythagoras' sætning. Som bekendt siges to vektorer v og w i et indre produkt rum V at være *ortogonale*, eller *vinkelrette på hinanden*, såfremt $\langle v, w\rangle = 0$. Et sæt $(v_1, v_2, v_3, \dots)$ af vektorer i V er et *ortogonalsæt*, hvis v_n og v_m er ortogonale for alle $n \neq m$. Hvis yderligere $\|v_n\| = 1$ for alle $n \in \mathbb{N}$, siges sættet at være et *ortonormalsæt*. Vi husker endvidere (jvf. LA Theorem 4.14), at et ortogonalsæt $(v_1, v_2, v_3, \dots)$, der ikke indeholder nulvektoren, og dermed i særdeleshed et ortonormalsæt, er lineært uafhængigt. Antag nemlig, at $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = \underline{0}$. Tages indre produkt med v_i, hvor $i = 1, \dots, n$, på begge sider og benyttes (1.7), giver venstresiden

$$\lambda_1\langle v_i, v_1\rangle + \cdots + \lambda_n\langle v_i, v_n\rangle = \lambda_i\|v_i\|^2 ,$$

hvorimod højresiden giver $\langle v_i, \underline{0}\rangle = 0$. Altså er $\lambda_i\|v_i\|^2 = 0$ og dermed $\lambda_i = 0$, for hvert $i = 1, \dots, n$. Dette viser, at sættet $(v_1, \dots, v_n)$ er lineært uafhængigt for ethvert $n \in \mathbb{N}$, og dermed påstanden.

Vi noterer os med det samme følgende nyttige udgave af *Pythagoras' sætning*, som siger, at der for et endeligt ortogonalsæt $(v_1, \dots, v_n)$ i et indre produkt rum gælder, at

$$\|v_1 + \cdots + v_n\|^2 = \|v_1\|^2 + \cdots + \|v_n\|^2 . \tag{1.24}$$

Dette følger ved udregning af venstresiden:

$$\begin{aligned}
\langle v_1 + \cdots + v_n, v_1 + \cdots + v_n\rangle &= \langle \sum_{i=1}^n v_i, \sum_{j=1}^n v_j \rangle \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \langle v_i, v_j\rangle \\
&= \sum_{i=1}^n \langle v_i, v_i\rangle \\
&= \|v_1\|^2 + \cdots + \|v_n\|^2 ,
\end{aligned}$$

hvor det tredie lighedstegn følger af ortogonaliteten, som indebærer, at kun leddene $\langle v_i, v_j\rangle$, hvor $i = j$ bidrager til summen.

Eksempel 1.6. a) I $\mathbb{C}^n$ er $((1,0,\dots,0), (0,1,0,\dots,0), \dots, (0,\dots,0,1))$ et ortonormalsæt. Dermed er det lineært uafhængigt (hvilket naturligvis også let kan indses på anden vis) og en basis for $\mathbb{C}^n$, da det klart udspænder $\mathbb{C}^n$.

b) Sættet $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots)$ indført i Eksempel 1.1 c) er et ortonormalsæt i $\ell_0(\mathbb{N})$. Overvej dette!

c) Sættet $(1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots)$ er et ortogonalsæt i $C([-\pi, \pi])$. Dette fremgår af udregningerne p.530-531 i AEM (jvf. Opgave 1.15), hvoraf det også femgår, at

$$\|\cos nx\| = \|\sin nx\| = \sqrt{\pi} \quad \text{for} \quad n \in \mathbb{N} .$$

Sættet er derfor ikke et ortonormalsæt. Ved normering (dvs. division med normen) af vektorerne i sættet fås ortonormalsættet

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x, \dots\right) . \tag{1.25}$$

Et andet ortonormalsæt i $C([-\pi,\pi])$ er

$$(\dots, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-i2x}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-ix}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ix}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{2ix}, \dots)\ , \tag{1.26}$$

hvor vi har nummereret vektorerne med $n \in \mathbb{Z}$ i stedet for $n \in \mathbb{N}$, således at den n'te vektor er funktionen

$$e_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{inx}\ .$$

At disse vektorer er parvis ortogonale og har norm 1, fremgår af følgende udregning

$$\begin{aligned}
\langle e_n, e_m\rangle &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \overline{e^{inx}}e^{imx}dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx}e^{imx}dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m-n)x}dx \\
&= \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{i(m-n)}e^{i(m-n)x}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0 & \text{for} \quad n \neq m \\ \frac{1}{2\pi}[x]_{-\pi}^{\pi} = 1 & \text{for} \quad n = m\ . \end{cases}
\end{aligned}$$

Det bemærkes, at dette ortonormalsæt optræder i Afsnit 10.5 i AEM.

d) Legendre polynomierne $P_0, P_1, P_2, \dots$ udgør et ortogonalsæt i $C([-1,1])$, jvf. Eksempel 4 p.237 i AEM. Det er ikke et ortonormalsæt, idet

$$\|P_n\|^2 = \int_{-1}^{1} P_n(x)^2 dx = \frac{2}{2n+1}$$

ifølge formel (8) p.242 i AEM.

Projektionssætningen. Vi afslutter dette kapitel med at diskutere den såkaldte *projektionssætning*, der i LA er anført som Theorem 4.19, og som giver en formel for projektionen af en vektor på et endeligdimensionalt underrum U af et indre produkt rum V. Inden vi formulerer sætningen, genkalder vi, at det *ortogonale komplement* $A^\perp$ til en delmængde $A \subseteq V$ består af de vektorer, der er vinkelrette på alle vektorer i A, dvs.

$$A^\perp = \{v \in V \mid \langle v, w\rangle = 0 \ \text{ for alle } \ w \in A\}\ .$$

Sætning 1.7. *Lad $(e_1, \dots, e_n)$ være et endeligt ortonormalsæt i et indre produkt rum V, og lad*

$$U = \operatorname{span}\{e_1, \dots, e_n\}\ .$$

For en vilkårlig vektor $v \in V$ findes da netop een vektor $w \in U$, således at afstanden $\|v - w\|$ er mindst mulig (blandt alle afstande fra v til vektorer i U). Vektoren w kaldes projektionen af v på U og er givet ved

$$w = \langle e_1, v\rangle e_1 + \cdots + \langle e_n, v\rangle e_n\ , \tag{1.27}$$

og der gælder

$$v - w \in U^\perp\ .$$

Defineres nemlig w ved (1.27) og tages indre produkt med e_i på begge sider af denne ligning, giver venstresiden $\langle e_i, w\rangle$, mens højresiden ved en udregning som i begyndelsen af dette afsnit giver $\langle e_i, v\rangle$. Altså er $\langle e_i, v\rangle = \langle e_i, w\rangle$ og dermed $\langle e_i, v - w\rangle = 0$. Dette viser, at $v - w$ er vinkelret på alle vektorerne $e_1, \dots, e_n$ og dermed på alle linearkombinationer af dem ifølge (1.8). Derfor er $v - w \in U^\perp$ som påstået.

Vi mangler at indse, at w er den vektor i U, som har kortest afstand til v. Lad hertil w' være en vilkårlig vektor i U. Da er

$$\begin{aligned}\|v - w'\|^2 &= \|(v - w) + (w - w')\|^2 \\ &= \|v - w\|^2 + \|w - w'\|^2 ,\end{aligned}$$

hvor vi har brugt Pythagoras, idet $v - w \in U^\perp$ og $w - w' \in U$. Men $\|w - w'\|^2$ er jo mindst mulig, nemlig 0, netop når $w' = w$, hvilket viser det ønskede.

Bemærk, at Pythagoras medfører dels

$$\begin{aligned}\|w\|^2 &= \|\langle e_1, v\rangle e_1\|^2 + \cdots + \|\langle e_n, v\rangle e_n\|^2 \\ &= |\langle e_1, v\rangle|^2 + \cdots + |\langle e_n, v\rangle|^2\end{aligned}$$

og dels

$$\begin{aligned}\|v\|^2 &= \|(v - w) + w\|^2 \\ &= \|v - w\|^2 + \|w\|^2 \\ &\geq \|w\|^2 .\end{aligned}$$

Heraf følger den vigtige *Bessels ulighed*:

$$\sum_{i=1}^{n} |\langle e_i, v\rangle|^2 \leq \|v\|^2 \tag{1.28}$$

for enhver vektor $v \in V$ og ethvert endeligt ortonormalsæt $(e_1, \dots, e_n)$ i V.

Eksempel 1.8. Lad os bestemme projektionen af funktionen x i $C([-\pi, \pi])$ på underrummet $U = \operatorname{span}\{1, \cos x, \sin x\}$.

Sættes $e_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, $e_2(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x$, $e_3(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x$, er (e_1, e_2, e_3) et ortonormalsæt i $C([-\pi, \pi])$ og $U = \operatorname{span}\{e_1, e_2, e_3\}$, således at den søgte projektion er funktionen

$$\begin{aligned}g(y) &= \langle \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, x\rangle \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \langle \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x, x\rangle \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos y + \langle \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x, x\rangle \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin y \\ &= \frac{1}{2\pi}\langle 1, x\rangle + \frac{1}{\pi}\langle \cos x, x\rangle \cos y + \frac{1}{\pi}\langle \sin x, x\rangle \sin y \\ &= 2 \sin y ,\end{aligned}$$

idet man ved udregning finder $\langle 1, x\rangle = \langle \cos x, x\rangle = 0$ og $\langle \sin x, x\rangle = 2\pi$.

Opgaver

Opgave 1.1 Eftervis, at mængden $\ell_0(\mathbb{N})$ bestående af følger med kun endelig mange elementer forskellige fra nul er et underrum af vektorrummet $\ell(\mathbb{N})$ af alle komplekse talfølger. (Benyt Theorem 1.11 i LA.)

Opgave 1.2 Begrund, at der for en delmængde A af et vektorrum V gælder, at $\mathrm{span}A$ er det mindste underrum af V, der indeholder A. (Overbevis dig selv om, at det, der kræves, er dels, at $\mathrm{span}A$ indeholder A, og dels, at ethvert underrum U, der indeholder A, også må indeholde enhver linearkombination af vektorer fra A.)

Opgave 1.3 Vis, at $\mathrm{span}A$ ikke ændres, hvis A udvides med en mængde B, der er indeholdt i $\mathrm{span}A$, altså at $\mathrm{span}(A \cup B) = \mathrm{span}A$, hvis $B \subseteq \mathrm{span}A$.

Opgave 1.4 Betragt underrummet $U = \mathrm{span}\{1, \cos x, \cos 2x\}$ af $C([-\pi, \pi])$.
Vis, at $\cos^2 x$ tilhører U, men at $\cos^3 x$ ikke tilhører U.

Opgave 1.5 Udled af de definerende egenskaber ved det indre produkt de to relationer (1.7) og (1.8):

$$\langle v, \lambda_1 w_1 + \cdots + \lambda_n w_n \rangle = \lambda_1 \langle v, w_1 \rangle + \cdots + \lambda_n \langle v, w_n \rangle$$

$$\langle \lambda_1 w_1 + \cdots + \lambda_n w_n, v \rangle = \overline{\lambda_1} \langle w_1, v \rangle + \cdots + \overline{\lambda_n} \langle w_n, v \rangle$$

Opgave 1.6 Verificer, at der ved

$$\langle (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \rangle = \overline{x_1} y_1 + \cdots + \overline{x_n} y_n$$

defineres et indre produkt på $\mathbb{C}^n$, altså at kravene *i)-iv)* til et indre produkt er opfyldt.

Opgave 1.7 Verificer, at hvis ρ er en positiv kontinuert funktion på $[a, b]$, da defineres der ved

$$\langle f, g \rangle_\rho = \int_a^b \overline{f(x)} g(x) \rho(x) dx$$

et indre produkt på $C([a, b])$.

Opgave 1.8 Verificer, at der ved

$$\langle (x_1, x_2, \dots), (y_1, y_2, \dots) \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{x_n} y_n$$

defineres et indre produkt på $\ell_0(\mathbb{N})$.

Opgave 1.9 Lad V være et indre produkt rum. Brug regnereglerne for det indre produkt til at udlede *parallelogramidentiteten*:

$$\|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 = 2(\|v\|^2 + \|w\|^2) .$$

(Hvad har denne identitet med parallelogrammer at gøre?)

Udled endvidere, forudsat V er et komplekst vektorrum, *polariseringsidentiteten*:

$$\langle v, w\rangle = \frac{1}{4}(\|v+w\|^2 - \|v-w\|^2 - i\|v+iw\|^2 + i\|v-iw\|^2) \ .$$

Opgave 1.10 Brug Cauchy-Schwarz' ulighed til at slutte, at

$$\left(\int_0^\pi x \sin x dx\right)^2 \leq \int_0^\pi x^2 dx \int_0^\pi \sin^2 x dx \ .$$

Udregn begge sider af uligheden og konstater, at den er opfyldt.

Opgave 1.11 Eftervis de tre fundamentale egenskaber (1.21), (1.22) og (1.23) ved normen $\|\cdot\|$ på et indre produkt rum V, jvf. Theorem 4.9 i LA.

Opgave 1.12 Brug trekantsuligheden (1.23) til at udlede

$$|\ \|v\| - \|w\|\ | \leq \|v-w\| \ ,$$

altså at afstanden (i $\mathbb{R}$) mellem normerne af v og w er mindre end eller lig med afstanden mellem v og w (i V). (Man siger, at normafbildningen $v \to \|v\|$ fra V ind i $\mathbb{R}$ er afstandsformindskende.)

Opgave 1.13 Brug uligheden fra Opgave 1.12 til at slutte, at der for en konvergent følge $(v_1, v_2, \dots)$ i et indre produkt rum gælder, at

$$\|\lim_{n\to\infty} v_n\| = \lim_{n\to\infty} \|v_n\| \ .$$

Opgave 1.14 Brug Cauchy-Schwarz' ulighed til at slutte, at der for en konvergent følge $(v_1, v_2, \dots)$ i et indre produkt rum gælder, at

$$\langle \lim_{n\to\infty} v_n, w\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle v_n, w\rangle$$

og

$$\langle w, \lim_{n\to\infty} v_n\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle w, v_n\rangle$$

for en vilkårlig vektor $w \in V$.

Opgave 1.15 Eftervis, at $(1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots)$ er et ortogonalsæt i $C([-\pi,\pi])$, enten ved direkte udregning eller ved at bruge, at sættet (1.26) er et ortonormalsæt sammen med Euler's formel $\exp ix = \cos x + i \sin x$.

Opgave 1.16 Vi ser på polynomierne $1, x, x^2, x^3, \dots$ i $C([-1,1])$ med sædvanligt indre produkt.

Bestem projektionen $Q_{n-1}(x)$ af x^n på $\operatorname{span}\{1, x, \dots, x^{n-1}\}$ for $n = 1, 2, 3$.

Sammenlign polynomierne $x^n - Q_{n-1}(x)$ for disse værdier af n med Legendre polynomierne p.208 i AEM. - Er du overrasket?

Opgave 1.17 Godtgør, at $(\sin x, \sin 2x, \sin 3x)$ er et ortogonalsæt i $C([0,\pi])$ med sædvanligt indre produkt.

Bestem $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{C}$, således at

$$\int_0^\pi |\cos x - \sum_{n=1}^{3} a_n \sin nx|^2 dx$$

antager den mindst mulige værdi.

Opgave 1.18 Lad vektorerne $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$ i $\ell_0(\mathbb{N})$ være givet som i Eksempel 1.1 c).

Eftervis, at sættet $(\varepsilon_1 + \varepsilon_2, \varepsilon_1 - \varepsilon_2, \varepsilon_3 + \varepsilon_4, \varepsilon_3 - \varepsilon_4, \dots)$ er et ortogonalsæt i $\ell_0(\mathbb{N})$ og bestem det tilsvarende ortonormalsæt ved normering.

Opgave 1.19 Eftervis, at funktionsfølgen $(f_1, f_2, \dots)$ i $C([0,1])$, hvor

$$f_n(x) = \frac{nx^2}{1+nx^2} ,$$

konvergerer i middel imod den konstante funktion 1.

Konvergerer den også punktvis imod funktionen 1?

Opgave 1.20 Find en funktionsfølge $(f_1, f_2, \dots)$ i $C([0,1])$, som konvergerer i middel imod nulfunktionen, og således at $f_n(1) \to \infty$ for $n \to \infty$.
Vink $f_n(x) = a_n x^n$, hvor a_n er valgt passende kan bruges.