Matematik F1

Opgavesæt til besvarelse i 4 timer. Sættet består af 4 opgaver og er på 3 sider. Alle sædvanlige hjælpemidler, d.v.s. bøger, notater og lommeregnere, kan benyttes. Det er tilladt at skrive med blyant, når blot skriften er tydeligt læsebar.
De stillede opgaver vægtes tilnærmelsesvis ens.

Opgave 1

Lad den komplekse funktion f være givet ved udtrykket

$$f(z) = \frac{1}{z(e^z - 1)} \ .$$

a) Begrund, at $z = 0$ er en pol af orden 2 for f.

b) Bestem samtlige poler for f samt deres orden, og gør rede for, at der findes et $R > 0$, således at f har en Laurent række fremstilling

$$f(z) = \frac{a_{-2}}{z^2} + \frac{a_{-1}}{z} + a_0 + a_1 z + \dots$$

for $0 < |z| < R$. Angiv den størst mulige værdi af R.

c) Gør rede for, at $a_{-2} = 1$ og $a_{-1} = -\frac{1}{2}$.

d) Bestem værdien af kurveintegralet

$$\oint_C f(z)dz \ ,$$

hvor C betegner cirklen med centrum i 2 og radius 3, orienteret mod uret.

Opgave 2

Lad H være et Hilbert rum med indre produkt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ og tilhørende norm $\| \cdot \|$, og lad $(e_1, e_2, e_3, \dots)$ være en ortonormalbasis for H.

a) Gør rede for, at rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+a} e_n$$

er konvergent i H for ethvert reelt tal $a \geq 0$. Idet summen betegnes med v_a skal det vises, at

$$\|v_0\|^2 = \|v_1\|^2 + 1 \ .$$

b) Idet det oplyses, at

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \qquad \text{og} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1 \ ,$$

skal man gøre rede for, at

$$\langle v_0, v_1 \rangle = 1$$

samt bestemme den ortogonale projektion af vektoren v_1 på (underrummet udspændt af) vektoren v_0.

c) Med A betegner vi afbildningen fra H ind i H givet ved

$$A(v) = \langle v_1, v \rangle v_0 .$$

Begrund, at A er en begrænset lineær operator og bestem dens norm.

d) Gør rede for, at A har netop to egenværdier og bestem disse.

Opgave 3.

Betragt følgende anden ordens lineære differentialligning

$$4x^2 y'' + 5xy' - \frac{1}{2}(1+x)y = 0 \ . \qquad (*)$$

a) Gør rede for, at 0 er et singulært punkt for denne differentialligning. Opstil indeksligningen og bestem dens rødder.

b) Begrund, at (*) har to lineært uafhængige løsninger y_1 og y_2 af formen

$$y_1(x) = x^{\frac{1}{4}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad y_2(x)) = x^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \ ,$$

og vis, at koefficienterne a_n og b_n kan bestemmes ved at løse rekursionsligningerne

$$2n(4n+3)a_n = a_{n-1} \quad \text{og} \quad 2n(4n-3)b_n = b_{n-1} \ , \ \ n = 1, 2, 3, \ldots$$

Bestem herved de tre første led i ovennævnte rækkeudviklinger for to sådanne løsninger.

Opgave 4.

Lad funktionen $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ være givet ved

$$f(x) = \begin{cases} \sin 2x & \text{for } \ 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{for } \ \frac{\pi}{2} < x \le \pi \ . \end{cases}$$

a) Gør rede for, at Fourier sinus rækken for f er

$$\frac{1}{2}\sin 2x + \frac{4}{\pi}\sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ ulige}}}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{4-n^2}\sin nx\ .$$

b) Begrund, at ovennævnte række er konvergent for alle $x \in \mathbb{R}$ og skitser grafen for sumfunktionen i intervallet $[-2\pi, 2\pi]$.

c) Lad $u(x,t)$ være løsningen (i generaliseret forstand) til følgende problem:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0\,, & 0 < x < \pi\,,\quad t \in \mathbb{R} \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0\,, & t \in \mathbb{R} \\ u(x,0) = \sin 2x\,, & 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \\ u(x,0) = 0\,, & \frac{\pi}{2} < x \le \pi \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0\,, & 0 < x < \pi\,. \end{cases}$$

Angiv et udtryk for $u(x,t)$ på rækkeform.

d) Bestem $u(\frac{\pi}{2}, \frac{\sqrt{3}\pi}{4})$.