Matematik F1

Opgavesæt til besvarelse i 4 timer. Sættet består af 4 opgaver og er på 3 sider. Alle sædvanlige hjælpemidler, d.v.s. bøger, notater og lommeregnere kan benyttes.
De stillede opgaver vægtes tilnærmelsesvis ens.

Opgave 1

Lad den komplekse funktion f være givet ved udtrykket

$$f(z) = \frac{\sin \pi z}{z^2(16z^2 - 16z + 3)} \ .$$

a) Angiv den største delmængde af $\mathbb{C}$, hvori f er analytisk, og begrund, at f har netop tre poler, samt at disse alle er simple, d.v.s. af orden 1.

b) Begrund, at f i en omegn af $z = \frac{1}{2}$ har en potensrækkefremstilling

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - \tfrac{1}{2})^n$$

og bestem rækkens konvergensradius.

c) Bestem koefficienterne a_0 og a_1 i ovennævnte potensrække.

Lad C betegne kurven, der afgrænser kvadratet med hjørner $\pm\frac{1}{2} \pm \frac{i}{2}$, altså kvadratet $\{x + iy \in \mathbb{C} \mid -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{1}{2}\}$, gennemløbet en gang mod uret.

d) Bestem værdien af kurveintegralet

$$\oint_C f(z)dz \ .$$

Opgave 2

Lad afbildningen $A : \ell_2(\mathbb{N}) \to \ell_2(\mathbb{N})$ være givet ved

$$A(x_1, x_2, x_3, x_4, \dots) = (ix_2, i(x_3 - x_1), i(x_4 - x_2), \dots) \ ,$$

d.v.s. for $x = (x_1, x_2, \dots) \in \ell_2(\mathbb{N})$ er det n'te element i følgen Ax givet ved

$$(Ax)_n = i(x_{n+1} - x_{n-1}) \ , \quad n \in \mathbb{N} \ ,$$

hvor vi bruger konventionen $x_0 = 0$.

a) Gør rede for, at A er en begrænset lineær operator på $\ell_2(\mathbb{N})$ (med det sædvanlige indre produkt), og vis, at $\|A\| \leq 2$.

b) Gør rede for, at følgen $z = (-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots)$, hvis n'te element er $\frac{(-1)^n}{n}$, tilhører $\ell_2(\mathbb{N})$ og beregn Az.

c) Bestem den ortogonale projektion af Az på (underrummet udspændt af) vektoren $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$, hvor ε_i betegner talfølgen, hvis i'te element er 1 og hvis øvrige elementer er 0.

d) Gør rede for, at operatoren A er selvadjungeret.

Opgave 3.

Betragt følgende anden ordens lineære differentialligning

$$16x^2y'' + (3 - 8x^2)y = 0 \ .$$

a) Gør rede for, at 0 er et singulært punkt for denne differentialligning. Opstil indeksligningen og find dens rødder.

b) Bestem to lineært uafhængige løsninger af formen

$$y(x) = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \ ,$$

og begrund, at de er veldefinerede for $x \in]0, +\infty[$.

Opgave 4.

Lad funktionen $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ være givet ved

$$f(x) = x^2(1-x) \quad \text{for} \quad x \in [0,1] \ .$$

a) Gør rede for, at Fourier sinus rækken for f er

$$\frac{4}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1} - 1}{n^3} \sin n\pi x \ .$$

b) Begrund, at ovennævnte række er konvergent for $x = \frac{1}{2}$, bestem rækkens sum i dette punkt, og brug dette til at vise, at

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3} = \frac{\pi^3}{32} \ .$$

c) Lad $u(x,t)$ være løsningen (i generaliseret forstand) til følgende problem:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0\,, & 0 < x < 1\,, \quad t \in \mathbb{R} \\ u(0,t) = u(1,t) = 0\,, & t \in \mathbb{R} \\ u(x,0) = x^2(1-x)\,, & 0 \le x \le 1 \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0\,, & 0 \le x \le 1\,. \end{cases}$$

Angiv et udtryk for $u(x,t)$ på rækkeform.

d) Bestem $u(\frac{1}{4}, \frac{5}{4})$.