Københavns Universitet
Prøve ved Det naturvidenskabelige Fakultet sommer 2002

Matematik F1

Opgavesæt til besvarelse i 4 timer. Sættet består af 4 opgaver. Alle sædvanlige hjælpemidler, dvs. bøger, notater og lommeregnere kan benyttes.

De stillede opgaver vægtes tilnærmelsesvis ens.

Opgave 1

Lad den komplekse funktion f være givet ved udtrykket

$$f(z) = \frac{2i + e^{iz}}{z^2 + z + 1} \ .$$

a) Begrund, at f er analytisk i hele den komplekse plan pånær i to punkter a og b. Bestem a og b og begrund, at de er simple poler for f.

b) Gør rede for, at f har en potensrækkefremstilling

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

i en omegn af $z = 0$ og bestem rækkens konvergensradius.

c) Udregn integralet

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2 + \sin x}{x^2 + x + 1} dx \ .$$

Opgave 2

Lad afbildningen $A : \ell_2(\mathrm{N}) \to \ell_2(\mathrm{N})$ være givet ved

$$A(x_1, x_2, x_3, x_4, \dots) = (x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_3 + x_4, \dots) \ ,$$

d.v.s. for $x = (x_1, x_2, x_3, \dots) \in \ell_2(\mathrm{N})$ er det n'te element i følgen Ax givet ved

$$(Ax)_n = x_n + x_{n+1} \ , \quad n \in \mathrm{N} \ .$$

a) Gør rede for, at A er en begrænset lineær operator på $\ell_2(\mathrm{N})$ (med det sædvanlige indre produkt), og vis, at $\|A\| \leq 2$.

b) Gør rede for, at den adjungerede operator A^* til A er givet ved

$$A^*(x_1, x_2, x_3, x_4, \dots) = (x_1, x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_3 + x_4, \dots)$$

for $(x_1, x_2, x_3, x_4, \dots) \in \ell_2(\mathrm{N})$.

c) Vis, at A hverken er selvadjungeret eller unitær.

d) Vis, at hvis $x = (x_1, x_2, x_3, \dots) \in \ell_2(\mathrm{N})$ er en egenvektor for A med egenværdi a, da gælder

$$x_{n+1} = (a - 1)x_n \ , \quad n \in \mathrm{N} \ .$$

Bestem herudfra samtlige egenværdier for A.

Opgavesættet fortsættes på side 2

Opgave 3

Betragt følgende anden ordens lineære differentialligning

$$x^2y'' + x(2x-5)y' + 9y = 0\,. \qquad (*)$$

a) Gør rede for, at $(*)$ har en løsning af formen

$$y(x) = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\,, \qquad (**)$$

bestem r og vis, at koefficienterne a_n opfylder rekursionsformlen

$$n^2 a_n + 2(n+2)a_{n-1} = 0 \quad \text{for} \quad n \geq 1\,.$$

b) Vis, at

$$a_n = \frac{(-2)^n(n+2)(n+1)}{n!}\,, \quad n \geq 0\,,$$

(hvor 0!=1) tilfredsstiller førnævnte rekursionsformel, og bestem definitionsintervallet for den derved fremkomne løsning $(**)$.

Opgave 4

Lad funktionen $f : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ være givet ved

$$f(x) = |\cos x|\,, \quad x \in \mathrm{R}\,.$$

a) Vis, at funktionen f er lige og periodisk med periode π. Skitsér grafen for f i intervallet $[-2\pi, 2\pi]$.

b) Gør rede for, at Fourier rækken for f er

$$\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2-1}\cos 2nx\,.$$

c) Gør rede for, at ovennævnte række er konvergent i alle punkter $x \in \mathrm{R}$, og at dens sum er $f(x)$.

d) Angiv løsningen u til problemet

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = 3\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,, \quad 0 < x < \pi\,, \quad t > 0 \\ u(x,0) = |\cos x|\,, \quad 0 \leq x \leq \pi \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(\pi,t) = 0\,, \quad t > 0 \end{cases}$$

på rækkeform. Svaret kræves begrundet.