Matematik F1

Opgavesæt til besvarelse i 4 timer. Sættet består af 4 opgaver. Alle sædvanlige hjælpemidler, dvs. bøger, notater og lommeregnere kan benyttes.

De stillede opgaver vægtes tilnærmelsesvis ens.

Opgave 1

Lad den komplekse funktion f være givet ved udtrykket

$$f(z) = \frac{1-z^2}{4+z^4}\,.$$

a) Angiv den største delmængde af $\mathbb{C}$, hvori f er analytisk, bestem funktionens poler og nulpunkter, samt disses ordener.

b) Begrund, at f i en omegn af $z=0$ har en potensrækkefremstilling

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\ ,$$

og gør rede for, at

$$a_n = \begin{cases} 0\,, & \text{hvis } n \text{ er ulige,} \\ -(-4)^{-(m+1)}\,, & \text{hvis } n = 4m,\ m = 0,1,2,\ldots \\ (-4)^{-(m+1)}\,, & \text{hvis } n = 4m+2,\ m = 0,1,2,\ldots \end{cases}$$

Bestem endvidere rækkens konvergensradius.

c) Udregn integralet

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1-x^2}{4+x^4}dx\ .$$

Opgave 2

Lad H være et komplekst Hilbert rum med indre produkt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ og $e_1, e_2, \ldots$ en ortonormalbasis for H.

a) Gør rede for, at rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+2} e_n$$

er konvergent i H. Vi kalder dens sum for v.

Opgave 2 fortsættes på side 2

b) Idet $u = e_4 - 2e_{10}$, skal man beregne $\langle u, v\rangle$ og bestemme projektionen af v på (underrummet udspændt af) u.

c) Lad opertoren A på H være givet ved

$$Av = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_{2n}}{n^2 - 7n + 11} e_{2n} \quad \text{for} \quad x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n \in H\ .$$

Begrund, at A er en begrænset og selvadjungeret operator.

d) Vis, at e_1 og u (som givet i b)) er egenvektorer for A og bestem de tilhørende egenværdier.

e) Bestem samtlige egenværdier for A.

Opgave 3

Betragt følgende anden ordens lineære differentialligning

$$(x^2 + 2x)y'' + (3x + 4)y' + y = 0\,.$$

a) Godtgør, at 0 er et singulært punkt for denne differentialligning. Opstil indeksligningen og bestem dens rødder.

b) Bestem en løsning y på formen

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\ ,$$

for hvilken der gælder, at $y(0) = 1$. Bestem endvidere potensrækkens konvergensradius.

Vink. Vis først, at hvis y som angivet er en løsning, da må

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\{(n+1)a_n + 2(n+2)a_{n+1}\}x^n = 0\ .$$

c) Angiv et eksplicit udtryk for løsningen fundet under b) ved at bestemme summen af potensrækken.

Opgave 4

Lad funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være givet ved

$$f(x) = |\sin \frac{1}{2}x|\ , \quad x \in \mathbb{R}.$$

Opgave 4 fortsættes på side 3

a) Vis, at funktionen f er lige og periodisk med periode 2π. Skitsér grafen for f i intervallet $[-2\pi, 2\pi]$.

b) Gør rede for, at Fourier rækken for f er

$$\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{4n^2 - 1}\,.$$

c) Gør rede for, at ovennævnte række er konvergent i alle punkter $x \in \mathbb{R}$, og at dens sum er $f(x)$.

d) Angiv løsningen u til problemet

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = 5\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,, \quad 0 < x < 2\pi\,, \quad t > 0 \\ u(x,0) = |\sin \tfrac{1}{2}x|\,, \quad 0 \le x \le 2\pi \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(2\pi,t) = 0\,, \quad t > 0 \end{cases}$$

på rækkeform. Svaret kræves begrundet.