

Matematik F1

Opgavesæt til besvarelse i 4 timer. Sættet består af 4 opgaver. Alle sædvanlige hjælpemidler, dvs. bøger, notater og lommeregnerne kan benyttes.

De stillede opgaver vægtes tilnærmelsesvis ens.

Opgave 1

Lad den komplekse funktion f være givet ved

$$f(z) = \frac{e^z}{z^2} + \frac{\sin z}{z^2 + 1}.$$

- Angiv den største delmængde af \mathbb{C} , hvori f er analytisk, og bestem de punkter, hvori f har en pol, samt ordenen af polerne.
- Begrund, at f har en potensrækkefremstilling

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-1)^n$$

i en omegn af 1, og bestem rækkens konvergensradius.

- Beregn koefficienterne a_0 , a_1 og a_2 i potensrækken i b).
- Bestem værdien af integralerne

$$\oint_{C(\frac{6}{5})} f(z) dz \quad \text{og} \quad \oint_{C(\frac{3}{2})} f(z) dz,$$

hvor $C(r)$ betegner cirklen med centrum i 1 og radius r , orienteret mod uret.

Opgave 2

For en vilkårlig følge $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ tilhørende Hilbert rummet $\ell^2(\mathbb{N})$ sættes

$$Ax = \left(\frac{2}{1} x_1, \frac{2^2}{\sqrt{2}} x_2, \frac{2^3}{\sqrt{6}} x_3, \dots, \frac{2^n}{\sqrt{n!}} x_n, \dots \right).$$

- Gør rede for, at der herved defineres en begrænset lineær operator på $\ell^2(\mathbb{N})$.
- Vis, at følgen $a = (2^{-\frac{1}{2}}, 2^{-1}, 2^{-\frac{3}{2}}, \dots, 2^{-\frac{n}{2}}, \dots)$ tilhører $\ell^2(\mathbb{N})$ og beregn $\|a\|$ og $\|Aa\|$, hvor $\|\cdot\|$ betegner normen i $\ell^2(\mathbb{N})$.
- Vis, at $\frac{8}{\sqrt{6}}$ er egen værdi for A og find to tilhørende lineært uafhængige egenvektorer.
- Gør rede for, at A er selvadjungeret.

Opgave 3

Betragt følgende anden ordens lineære differentialligning

$$x(2-x)y'' - (2+x)y' + y = 0.$$

- Godtgør, at 0 er et singulært punkt for denne differentialligning. Opstil indeks-
ligningen og bestem dens rødder.
- Bestem en ikke trivial løsning y angivet på formen

$$y(x) = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

hvor potensrækken har positiv konvergensradius. Bestem rækkens konvergensra-
dius.

- Angiv et eksplicit udtryk for løsningen fundet under b) ved at bestemme summen
af potensrækken.

Opgave 4

Lad funktionen $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ være givet ved

$$f(x) = |\sin 2x|, \quad x \in [0, \pi].$$

- Skitsér grafen for den ulige periodiske udvidelse af f med periode 2π i intervallet
 $[-3\pi, 3\pi]$.
- Gør rede for, at Fourier sinus-rækken for f er

$$\frac{8}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)(2n+3)} \sin(2n+1)x.$$

- Gør rede for, at ovennævnte række er konvergent i alle punkter $x \in \mathbb{R}$ og bestem
rækkens sum for hvert $x \in \mathbb{R}$.
- Angiv løsningen u til problemet

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = 3 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0 < x < \pi, \quad t > 0 \\ u(x, 0) = |\sin 2x|, & 0 \leq x \leq \pi \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, & t \geq 0 \end{cases}$$

på rækkeform.