Matematik F1

Opgavesæt til besvarelse i 4 timer. Sættet består af 4 opgaver og er på 3 sider. Alle sædvanlige hjælpemidler, d.v.s. bøger, notater og lommeregnere kan benyttes. Det er tilladt at skrive med blyant, når blot skriften er tydeligt læsebar.
De stillede opgaver vægtes tilnærmelsesvis ens.

Opgave 1

Lad den komplekse funktion f være givet ved udtrykket

$$f(z) = \frac{e^z}{1 - \cosh z} .$$

a) Begrund, at $z = 0$ er en pol af orden 2 for f.

b) Bestem samtlige poler for f samt deres orden, og gør rede for, at der findes et $R > 0$, således at f har en Laurent række fremstilling

$$f(z) = \frac{a_{-2}}{z^2} + \frac{a_{-1}}{z} + a_0 + a_1 z + \dots$$

for $0 < |z| < R$. Angiv den størst mulige værdi af R.

c) Gør rede for, at $a_{-2} = -2$ og $a_{-1} = -2$.

d) Bestem værdien af kurveintegralet

$$\oint_C f(z)dz ,$$

hvor C betegner cirklen med centrum i 0 og radius 1, orienteret mod uret.

Opgave 2

Lad afbildningen $A : \ell_2(\mathbb{N}) \to \ell_2(\mathbb{N})$ være givet ved

$$A(x_1, x_2, x_3, x_4, \dots) = (x_2, \frac{1}{2}x_3, \frac{1}{3}x_4, \dots) ,$$

d.v.s. for $x = (x_1, x_2, \dots) \in \ell_2(\mathbb{N})$ er det n'te element i følgen Ax givet ved

$$(Ax)_n = \frac{1}{n}x_{n+1} , \quad n \in \mathbb{N} .$$

a) Gør rede for, at A er en begrænset lineær operator på $\ell_2(\mathbb{N})$ (med det sædvanlige indre produkt), og vis, at $\|A\| \leq 1$.

b) Find samtlige vektorer $x \in \ell_2(\mathbb{N})$, for hvilke $\|Ax\| = \|x\|$ og bestem herved $\|A\|$.

c) Gør rede for, at den adjungerede operator A^* er givet ved

$$(A^*x)_n = \begin{cases} 0 & \text{for } n = 1 \\ \frac{1}{n-1}\, x_{n-1} & \text{for } n \geq 2\ . \end{cases}$$

d) Vis, at 0 er den eneste egenværdi for A og bestem samtlige tilhørende egenvektorer.

Opgave 3.

Betragt følgende anden ordens lineære differentialligning

$$(1-x^2)y'' - 6xy' - 4y = 0\ . \qquad (*)$$

a) Gør rede for, at hvis

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\ ,$$

er en løsning til $(*)$, da opfylder koefficienterne a_n rekursionsformlen

$$(n+2)a_{n+2} = (n+4)a_n \quad \text{for} \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

b) Find to lineært uafhængige potensrækkeløsninger til $(*)$ og bestem de respektive potensrækkers konvergensradier.

Opgave 4.

Lad funktionen $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ være givet ved

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{for } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{for } \frac{\pi}{2} < x \leq \pi\ . \end{cases}$$

a) Gør rede for, at Fourier cosinus rækken for f er

$$\frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\cos x + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{1-4k^2} \cos 2kx\ .$$

b) Begrund, at ovennævnte række er konvergent for alle $x \in \mathbb{R}$ og skitser grafen for sumfunktionen i intervallet $[-2\pi, 2\pi]$.

c) Vis, at

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{1-4k^2} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\,.$$

d) Lad $u(x,t)$ være løsningen til følgende problem:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,, & 0 < x < \pi\,, \quad t > 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(\pi,t) = 0\,, & t > 0 \\ u(x,0) = \cos x & 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \\ u(x,0) = 0 & \frac{\pi}{2} < x \le \pi\,. \end{cases}$$

Angiv et udtryk for $u(x,t)$ på rækkeform.