Københavns Universitet
Prøve ved Det naturvidenskabelige Fakultet vinteren 2002/03

Matematik F1

Opgavesæt til besvarelse i 4 timer. Sættet består af 4 opgaver. Alle sædvanlige hjælpemidler, dvs. bøger, notater og lommeregnere kan benyttes.

De stillede opgaver vægtes tilnærmelsesvis ens.

Opgave 1

Lad den komplekse funktion f være givet ved udtrykket

$$f(z) = \frac{z-3}{(z-i)^2(z+2i)} \ .$$

a) Angiv den største delmængde af den komplekse plan, hvori f er analytisk, og bestem funktionens poler og nulpunkter samt disses ordener.

b) Begrund, at f i en omegn af $z = 1$ har en potensrækkefremstilling

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-1)^n \ ,$$

og bestem rækkens konvergensradius.

c) Vis, at der for hvert reelt tal x gælder, at realdelen af $f(x)$ er givet ved

$$\mathrm{Re} f(x) = \frac{(x-3)(x^3+3x)}{(x^2+1)^2(x^2+4)}$$

og udregn integralet

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-3)(x^3+3x)}{(x^2+1)^2(x^2+4)} dx \ .$$

Opgave 2

Lad H være et komplekst Hilbert rum med indre produkt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ og tilhørende norm $\| \cdot \|$, og lad $(e_1, e_2, e_3, \dots)$ være en ortonormalbasis for H.

a) Gør rede for, at rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1} e_n$$

er konvergent i H. Vi kalder dens sum for v.

b) Bestem projektionen af v på underrummet $\mathrm{span}\{e_1 + e_2, e_3\}$.

Opgave 2 fortsættes på side 2

c) Lad afbildningen $A : H \to H$ være givet ved

$$Ax = \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_{n-1} + 2\lambda_n + \lambda_{n+1}) e_n \quad \text{for} \quad x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n \in H \ ,$$

hvor vi bruger konventionen $\lambda_0 = 0$.
Vis, at

$$|\lambda_{n-1} + 2\lambda_n + \lambda_{n+1}|^2 \leq 6(|\lambda_{n-1}|^2 + |\lambda_n|^2 + |\lambda_{n+1}|^2) \ ,$$

og benyt dette til at redegøre for, at A er en begrænset lineær operator, hvis norm opfylder $\|A\| \leq \sqrt{18}$.

d) Gør rede for, at A er selvadjungeret.

Opgave 3

Betragt følgende anden ordens lineære differentialligning

$$4x^2 y'' + 2x^2 y' - (x+3) y = 0 \, .$$

a) Gør rede for, at 0 er et singulært punkt for denne differentialligning. Opstil indeksligningen og bestem dens rødder.

b) Bestem en (ikke-triviel) løsning y på formen

$$y(x) = x^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \ ,$$

og begrund, at den er veldefineret for $x \in]0, \infty[$.

Opgave 4

Lad funktionen f være defineret på intervallet $[0, \pi]$ ved

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{for} \quad 0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2} \\ (\pi - x)^2 & \text{for} \quad \dfrac{\pi}{2} \leq x \leq \pi \ . \end{cases}$$

a) Vis, at Fourier rækken for udvidelsen af f til en ulige periodisk funktion med periode 2π er

$$4 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} - \frac{2}{\pi (2n+1)^3} \right) \sin{(2n+1)x} \, .$$

b) Afgør, for hvilke reelle tal x denne række er konvergent og bestem dens sum for alle sådanne x.

Opgave 4 fortsættes på side 3

c) Lad $u(x,t)$ være løsningen til problemet

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,, \quad 0 < x < \pi\,, \quad t > 0 \\ u(x,0) = \begin{cases} x^2 & \text{for} \quad 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2} \\ (\pi - x)^2 & \text{for} \quad \dfrac{\pi}{2} \le x \le \pi \end{cases} \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0\,, \quad t > 0\,. \end{cases}$$

Bestem Fourier sinus rækken for funktionen $x \to u(x, \frac{1}{2})$.