# Matematik F1

Opgavesæt til besvarelse i 4 timer. Sættet består af 4 opgaver. Alle sædvanlige hjælpemidler, d.v.s. bøger, notater og lommeregnere kan benyttes.

De stillede opgaver vægtes tilnærmelsesvis ens.

## Opgave 1

Lad den komplekse funktion $f$ være givet ved udtrykket

$$f(z) = \frac{1 - \cos z}{i + z} .$$

a) Angiv den største delmængde af $\mathbb{C}$, hvori $f$ er analytisk, og bestem $f$'s poler og nulpunkter samt deres orden.

b) Gør rede for, at $f$ har en potensrækkefremstilling

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

i en omegn af $z = 0$ og bestem rækkens konvergensradius.

c) Bestem koefficienterne $a_0, a_1$ og $a_2$ i ovennævnte potensrække.

d) Bestem værdien af kurveintegralet

$$\oint_C \frac{f(z)}{z^3} dz ,$$

hvor $C$ betegner cirklen med centrum i 0 og radius 2, orienteret mod uret.

## Opgave 2

Lad afbildningen $A : \ell_2(\mathbb{N}) \to \ell_2(\mathbb{N})$ være givet ved

$$A(x_1, x_2, x_3, x_4, \dots) = (x_2, x_4, x_6, x_8, \dots) ,$$

d.v.s. for $x = (x_1, x_2, \dots) \in \ell_2(\mathbb{N})$ er det $n$'te element i følgen $Ax$ givet ved

$$(Ax)_n = x_{2n} , \quad n \in \mathbb{N} .$$

a) Gør rede for, at $A$ er en begrænset lineær operator på $\ell_2(\mathbb{N})$ (med det sædvanlige indre produkt), og bestem $\|A\|$.

b) Eftervis, at 0 er en egenværdi for $A$ og bestem det tilhørende egenrum.

c) Gør rede for, at den adjungerede operator $A^*$ til $A$ er givet ved

$$A^*(x_1, x_2, x_3, \dots) = (0, x_1, 0, x_2, 0, x_3, \dots)$$

for $(x_1, x_2, x_3, \dots) \in \ell_2(\mathbb{N})$.

d) Gør rede for, at hvis $a$ er en egenværdi for $A$, da er $|a| < 1$.
*Vink:* Vis og udnyt, at der for en egenvektor $(x_1, x_2, \dots)$ gælder, at $x_{2^k n} = a^k x_n$ for $k, n \in \mathbb{N}$.

 Opgavesættet fortsættes på side 2

## Opgave 3

Betragt følgende anden ordens lineære differentialligning

$$4xy'' + (1-4x)y' - y = 0 \, .$$

a) Gør rede for, at 0 er et singulært punkt for denne differentialligning. Opstil indeksligningen og find dens rødder.

b) Bestem to lineært uafhængige løsninger af formen

$$y(x) = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \, ,$$

og find de tilsvarende potensrækkers konvergensradier.

## Opgave 4

Lad funktionen $f : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ være givet ved

$$f(x) = \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \sin x \quad \text{for} \quad x \in [0,\pi] \, .$$

a) Gør rede for, at Fourier sinus rækken for $f$ er

$$\frac{4}{\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(1+(-1)^n)}{(n^2-1)^2} \sin nx \, .$$

b) Begrund, at ovennævnte række er konvergent for alle $x \in \mathbb{R}$ og bestem rækkens sum for hvert $x \in \mathbb{R}$.

c) Lad $u(x,t)$ være løsningen (i generaliseret forstand) til følgende problem:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \, , \quad 0 < x < \pi \, , \quad t \in \mathbb{R}$$

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \, , \quad t \in \mathbb{R}$$

$$u(x,0) = \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \sin x \, , \quad 0 \le x \le \pi$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 \, , \quad 0 \le x \le \pi \, .$$

Gør rede for, at der for $n = 2, 3, \dots$ gælder, at

$$\int_0^{\pi} u(x,1) \sin nx dx = \frac{2n(1+(-1)^n)}{(n^2-1)^2} \cos n \, .$$

d) Bestem $u(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4})$.