Matematik F1

Opgavesæt til besvarelse i 4 timer. Sættet består af 4 opgaver. Alle sædvanlige hjælpemidler, d.v.s. bøger, notater og lommeregnere kan benyttes.

De stillede opgaver vægtes tilnærmelsesvis ens.

Opgave 1

Lad den komplekse funktion f være givet ved udtrykket

$$f(z) = \frac{1+e^{i\pi z}}{1+z^3} \; .$$

a) Bestem polerne og nulpunkterne for funktionen f samt deres orden.

b) Gør rede for, at f har en potensrækkefremstilling i en omegn af $z = 0$ og bestem rækkens konvergensradius.

c) Bestem de første tre led i ovennævnte potensrække.

d) Udregn

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+\cos(\pi x)}{1+x^3} dx \; .$$

Opgave 2

Lad afbildningen $A : \ell^2(\mathbb{N}) \to \ell^2(\mathbb{N})$ være givet ved

$$A(x_1, x_2, x_3, x_4, \dots) = (x_2, -x_1, x_4, -x_3, \dots) \; .$$

a) Gør rede for, at $\|Ax\| = \|x\|$ for alle $x \in \ell^2(\mathbb{N})$, hvor $\|\cdot\|$ betegner den sædvanlige norm på $\ell^2(\mathbb{N})$.

b) Vis, at A er en begrænset lineær operator på $\ell^2(\mathbb{N})$ og bestem $\|A\|$.

c) Vis, at A har $\pm i$ som eneste egenværdier.

d) Vis. at mængden $\{A, A^2, A^3, I\}$ med sammensætning af afbildninger som kompositionsregel er en cyklisk gruppe af orden fire.

Opgave 3

Betragt følgende anden ordens lineære differentialligning

$$4x^2y'' + 10xy' + (2+x)y = 0 \; .$$

 Opgave 3 fortsættes på side 2

a) Gør rede for, at 0 er et singulært punkt for denne differentialligning. Opstil indeksligningen og find dens rødder.

b) Bestem en (ikke triviel) løsning y på formen

$$y(x) = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n ,$$

og begrund, at den er defineret på $]0, \infty[$.

c) Bestem samtlige løsninger til differentialligningen på $]0, \infty[$.

Opgave 4

Lad funktionen $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ være givet ved

$$f(x) = x \sin(\pi x) \text{ for } x \in [0, 1] .$$

a) Skitser grafen for den ulige periodiske udvidelse af f med periode 2 i intervallet $[-3, 3]$.

b) Bestem koefficienterne b_n, $n \in \mathbb{N}$, i Fourier sinus rækken for f.

c) Gør rede for, at ovennævnte række er konvergent for alle $x \in \mathbb{R}$ og bestem rækkens sum for $x = \frac{1}{2}$ og for $x = -\frac{5}{2}$.

d) Angiv på rækkeform løsningen u til følgende problem:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 5 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1, \ t > 0$$

$$u(x, 0) = x \sin(\pi x), \quad 0 \le x \le 1$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad t \ge 0 .$$