Københavns Universitet
Naturvidenskabelig kandidateksamen, januar 2000

MATEMATIK F1

Opgavesæt til besvarelse i 4 timer. Sættet består af 4 opgaver. Alle sædvanlige hjælpemidler, dvs. bøger, noter, notater og lommeregnere kan benyttes.

De stillede *enkelt*spørgsmål vægtes tilnærmelsesvis ens.

Opgave 1

Lad funktionen f være givet ved

$$f(z) = e^{iz}, \text{ for alle } z \in \mathbf{C}.$$

1) Angiv funktionsværdien $f(1)$ både på formen $re^{i\omega}$ og $a + ib$
2) Angiv et punkt $z_0 \neq 1$ for hvilket $f(z_0) = f(1)$
3) Angiv billedet af linien $\{ \frac{\pi}{4} + iy \mid y \in \mathbf{R} \}$

Lad C betegne enhedscirklen $\{ z \in \mathbf{C} \mid |z| = 1 \}$ gennemløbet i positiv omløbsretning.

4) Angiv, med begrundelser, værdierne af

$$\oint_C f(z)dz \text{ og } \oint_C \frac{f(z)}{z}dz.$$

Opgave 2

Som bekendt består gruppen S_3 af de seks elementer

$$\begin{aligned} e &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},\ a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \\ c &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix},\ d = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},\ f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

a) Gør rede for at $ab = e$.
b) Kan man heraf slutte at $ba = e$?
c) Skriv b som et produkt af cykler, og som et produkt af transpositioner.
d) Angiv, med begrundelse, ordenen af b.

(Opgave 3 og 4 på bagsiden)

Opgave 3

Lad $\{e_1, ..., e_n\}$ være en ortonormalbasis for det n-dimensionale Hilbertrum H. Betragt den lineære afbildning S der afbilder e_1 i e_2, altså opfylder $e_1 \curvearrowright e_2$, og som tilsvarende opfylder

$$e_2 \curvearrowright e_3,\ e_3 \curvearrowright e_4, ..., e_{n-1} \curvearrowright e_n,$$

samt

$$e_n \curvearrowright e_1,$$

a) Gør rede for at der for $x = a_1 e_1 + ... + a_n e_n$ gælder at

$$Sx = a_n e_1 + a_1 e_2 + a_2 e_3 ... + a_{n-1} e_n.$$

b) Vis at $\|Sx\| = \|x\|$ for alle $x \in H$.
c) Gør rede for at $Sx = 0$ hvis og kun hvis $x = 0$.

Lad S^* betegne den adjungerede til S.

d) Find $S^* e_1$
e) Find også $S^* e_2, ..., S^* e_n$.

Opgave 4

Betragt problemet

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \text{ for } 0 < x < \pi \text{ og } t > 0,$$

med randbetingelserne $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$ for alle t og begyndelsesbetingelsen

$$u(x, 0) = \sin^2 x \text{ for } 0 \leq x \leq \pi.$$

Det kan i denne opgave tages for givet at dette problem har en kontinuert løsning u på $[0, \pi] \times [0, \infty[$. Endvidere oplyses det at

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin^2 x \sin nx dx = \left\{ \begin{array}{c} -\frac{8}{\pi n(n^2-4)}, \text{ når } n \text{ er ulige} \\ 0, \text{ når } n \text{ er lige.} \end{array} \right\}, \ n = 1, 2, ..$$

a) Opskriv et rækkeudtryk for løsningen u
b) Gør rede for at rækkeudtrykket for u er uniformt konvergent på $[0, \pi] \times [0, \infty[$.

Betragt nu $g(x) = u(x, 1)$ og lad $b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi g(x) \sin nx dx$, $n = 1, 2, ..$

c) Gør rede for at

$$b_n = \left\{ \begin{array}{c} -\frac{8}{\pi n(n^2-4)} e^{-n^2}, \text{ når } n \text{ er ulige} \\ 0, \text{ når } n \text{ er lige.} \end{array} \right\}, \ n = 1, 2, ..$$

(Opgavesættet er slut)