Opgave 1

Den udvidede matrix til ligningssystemet

$$\begin{aligned} 3x_1 + 8x_2 - 18x_3 + x_4 &= 35 \\ x_1 + 2_2 - 4x_3 &= 11 \\ x_1 + 3x_2 - 7x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

bliver

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 8 & -18 & 1 & 35 \\ 1 & 2 & -4 & 0 & 11 \\ 1 & 3 & -7 & 1 & 0 \end{array}\right) .$$

Denne kan ved en serie rækkeoperationer føres på rækkeechelon for, f.eks. på følgende måde:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 8 & -18 & 1 & 35 \\ 1 & 2 & -4 & 0 & 11 \\ 1 & 3 & -7 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{-2R_3+R_1 \to R_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -4 & -1 & 35 \\ 1 & 2 & -4 & 0 & 11 \\ 1 & 3 & -7 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{-1R_1+R_2 \to R_2}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -4 & -1 & 35 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -24 \\ 1 & 3 & -7 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{-1R_1+R_3 \to R_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -4 & -1 & 35 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -24 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & -35 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -4 & -1 & 35 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & -35 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -24 \end{array}\right) \xrightarrow{-2R_3+R_2 \to R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -4 & -1 & 35 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -24 \end{array}\right) \xrightarrow{1R_3+R_1 \to R_1}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -4 & 0 & 11 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -24 \end{array}\right) \xrightarrow{-2R_2+R_1 \to R_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & -15 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -24 \end{array}\right)$$

Herefter bestemmes samtlige løsninger til ligningssystemet. Tredie søjle indeholder ikke et ledende 1-tal, så x_3 er fri. Denne kalder vi r. Vi har da

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 2r &= -15 \\ x_2 - 3r &= 13 \\ x_4 &= -24 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} x_1 &= -15 - 2r \\ x_2 &= 13 + 3r \\ x_4 &= -24 \end{aligned}\right.$$

Da vi husker, at $x_3 = 0 + r$, kan samtlige løsninger skrives som

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-15, 13, 0, -24) + r(-2, 3, 1, 0), \quad r \in \mathbb{R}$$

Opgave 2

$$v_1 = (1,1,1),\ v_2 = (0,1,1),\ v_3 = (2,3,3), \quad S = \{v_1, v_2, v_3\}$$

(1) Er S et lineært uafhængigt sæt? Vi forsøger, at løse ligningen $av_1 + bv_2 + cv_3 = 0$, for at se, om der er andre løsninger end $a = b = c = 0$. Det giver os følgende matrix:

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

som vi reducerer:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{-1R_2+R_3 \to R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Her behøver vi ikke reducere ydderligere, thi vi har opnået en nulrække. Der er således uendeligt mange løsninger til ligningen, specielt er der andre løsninger end den trivielle. Så de tre vektorer i S er *ikke* lineært uafhængige.

(2) Udspænder S hele $\mathbb{R}^3$? Nej, $\mathbb{R}^3$ ved vi er et 3-dimensionalt vektorrum; vi kender en basis med 3 vektorer. S indeholder højest 2 lineært uafhængige vektorer.

(3) Bestem en basis for span(S). Vi fører M på echelonforn:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{-1R_2+R_3 \to R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{-1R_1+R_2 \to R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

og ser, at 1. og 2. kollonne har ledende ettaller. Altså udgør $\{v_1, v_2\}$ en basis for span(S).

Opgave 3

Matricen

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

er invertibel, hvis vi kan invertere den. Så det prøver vi:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-1R_3+R_1 \to R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-2R_1+R_3 \to R_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{-2R_1+R_2 \to R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{-1R_2+R_3 \to R_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Det kunne vi godt, så matricen er invertibel, og den inverse er

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Opgave 4

$$a_1 = 1, \quad \forall n > 1 : a_n = 2a_{n-1} + (-1)^n$$

Vi skal ved induktion vise, at

$$a_n = \frac{1}{3}(2^{n+1} + (-1)^n)$$

Induktionsstart

Passer formlen for $n = 1$?

$$a_1 = \frac{1}{3}(2^{1+1} + (-1)^1) = \frac{1}{3}(2^2 - 1) = \frac{1}{3}3 = 1$$

Det passer, hip hurra.

Induktionsskridt

Hvis vi nu antager, at formlen holder for a_n, hvordan ser så a_{n+1} ud?

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &= 2a_{(n+1)-1} + (-1)^{n+1} \\
&= 2a_n - (-1)^n \\
&= 2(\tfrac{1}{3}(2^{n+1} + (-1)^n)) - (-1)^n \\
&= \tfrac{2}{3}(2^{n+1} + (-1)^n) - (-1)^n \\
&= \tfrac{2}{3}2^{n+1} + \tfrac{2}{3}(-1)^n - (-1)^n \\
&= \tfrac{1}{3}2^{(n+1)+1} + \tfrac{2}{3}(-1)^n - (-1)^n \\
&= \tfrac{1}{3}2^{(n+1)+1} - \tfrac{1}{3}(-1)^n \\
&= \tfrac{1}{3}2^{(n+1)+1} + \tfrac{1}{3}(-1)^{n+1} \\
&= \tfrac{1}{3}(2^{(n+1)+1} + (-1)^{n+1})
\end{aligned}$$

Formlen holder også for a_{n+1}. Herved er den bevist for alle n.

Opgave 5

På hvor mange måder kan man udtage 4 kort fra et kortspil, når

(1) de fire kort har forskellig farve. Der er da et kort i hver farve, og følgelig tretten muligheder for hvert kort:

$$13^4.$$

(2) der er 2 klør, 1 ruder og 1 hjerter. De to klør kan vælges på $\binom{13}{2}$ måder, mens de sidste to kort, som før, har tretten muligheder hver:

$$\binom{13}{2}13^2.$$

(3) de fire kort har samme farve. Der er her fire valg af farve, og for hvert af disse valg $\binom{13}{4}$ muligheder:

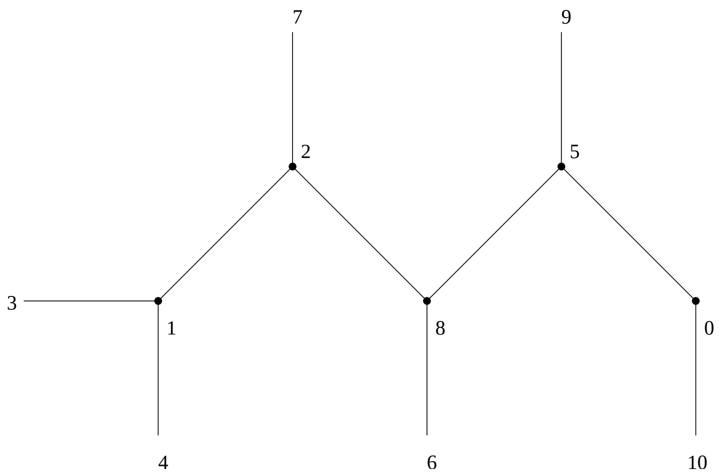
$$4\binom{13}{4}.$$

Opgave 6

Vi afkoder koden: 1 1 2 8 2 8 5 5 0, med metoden fra AC:

$\cancel{1}\ 1\ 2\ 8\ 2\ 8\ 5\ 5\ 0$	$0\ 1\ 2\ \cancel{3}\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10$	kant(1, 3)
$\cancel{1}\ 2\ 8\ 2\ 8\ 5\ 5\ 0$	$0\ 1\ 2\ \cancel{4}\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10$	kant(1, 4)
$\cancel{2}\ 8\ 2\ 8\ 5\ 5\ 0$	$0\ \cancel{1}\ 2\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10$	kant(2, 1)
$\cancel{8}\ 2\ 8\ 5\ 5\ 0$	$0\ 2\ 5\ \cancel{6}\ 7\ 8\ 9\ 10$	kant(8, 6)
$\cancel{2}\ 8\ 5\ 5\ 0$	$0\ 2\ 5\ \cancel{7}\ 8\ 9\ 10$	kant(2, 7)
$\cancel{8}\ 5\ 5\ 0$	$0\ \cancel{2}\ 5\ 8\ 9\ 10$	kant(8, 2)
$\cancel{5}\ 5\ 0$	$0\ 5\ \cancel{8}\ 9\ 10$	kant(5, 8)
$\cancel{5}\ 0$	$0\ 5\ \cancel{9}\ 10$	kant(5, 9)
$\cancel{0}$	$0\ \cancel{5}\ 10$	kant(0, 5)
	$0\ 10$	kant(0, 10)

Med de herved opsamlede kanter, får vi følgende træ:



Opgave 7

Egenskab 1 = at have en PC
Egenskab 2 = at have et stereoanlæg
Egenskab 3 = at have et TV

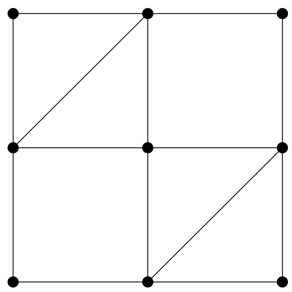
Vi har da følgende

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{N}(1) &&= 52\\
&\mathrm{N}(2) &&= 65\\
&\mathrm{N}(3) &&= 53\\
&\mathrm{N}(1,\ 2) &&= 25\\
&\mathrm{N}(1,\ 3) &&= 16\\
&\mathrm{N}(2,\ 3) &&= 31\\
&\mathrm{N}(1,\ 2,\ 3) &&= 12
\end{aligned}
$$

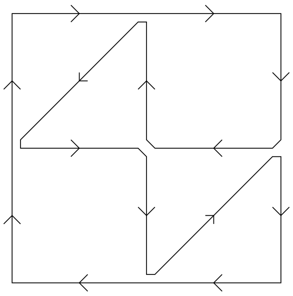
Ved inklusin/eksklusionsprincippet kan vi nu let regne ud, hvormange der har mindst een af de tre ting:

$$
\begin{aligned}
\text{datalogistuderende, der har mindst en ting} &= N(1)+N(2)+N(3)\\
&\quad -N(1,2)-N(1,3)-N(2,3)\\
&\quad +N(1,2,3)\\
&= 52+65+53\\
&\quad -25-16-31\\
&\quad +12\\
&= 170-72+12\\
&= 110
\end{aligned}
$$

Opgave 8

$G =$ 

Da alle knuder i G har lige valens, er G en Eulergraf. En Eulervej er f.eks.



G kan ikke være en Hamiltongraf. En Hamiltonkreds ville skulle passere den midterste knude. En vej, der passerer den midterste knude, deler grafen i to delkomponenter, der ikke kan bindes sammen, så en sådan vej kan ikke være en kreds.