

## Konkret Matematik

Opgavesæt til besvarelse i 4 timer. Sættet består af 8 opgaver og er på 3 sider. Alle sædvanlige hjælpemidler, d.v.s. bøger, notater og lommeregnere kan benyttes.

### Opgave 1

For ligningssystemet

$$\begin{aligned}3x_1 + 8x_2 - 18x_3 + x_4 &= 35 \\x_1 + 2x_2 - 4x_3 &= 11 \\x_1 + 3x_2 - 7x_3 + x_4 &= 0\end{aligned}$$

skal man angive den tilhørende (udvidede) matrix og ved rækkeoperationer omforme denne til en echelonmatrix.  
Bestem herefter samtlige løsninger til ligningssystemet.

### Opgave 2

For vektorerne  $v_1 = (1, 1, 1)$ ,  $v_2 = (0, 1, 1)$  og  $v_3 = (2, 3, 3)$  i  $\mathbb{R}^3$  ønskes følgende besvaret:

- Er  $\{v_1, v_2, v_3\}$  er et lineært uafhængigt sæt ?
- Udspænder sættet  $\{v_1, v_2, v_3\}$  hele  $\mathbb{R}^3$  ?
- Bestem en basis for  $\text{span}\{v_1, v_2, v_3\}$ .

### Opgave 3

Begrund, at matricen

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

er invertibel og bestem den inverse matrix.

### Opgave 4

Antag, at tallene  $a_1, a_2, a_3, \dots$  opfylder  $a_1 = 1$  og

$$a_n = 2a_{n-1} + (-1)^n \quad \text{for } n \geq 2.$$

Vis ved induktion, at

$$a_n = \frac{1}{3}(2^{n+1} + (-1)^n) \quad \text{for } n \geq 1.$$

### Opgave 5

På hvor mange måder kan man udtage fire kort fra et sædvanligt kortspil med 52 kort i følgende tre tilfælde:

- De fire kort har forskellig farve.
- Der er to klør, en ruder og en hjerter.
- De fire kort har samme farve.

### Opgave 6

Tegn et træ, hvis knuder er nummereret fra 0 til og med 10, og hvis Prüfer kode er

1 1 2 8 2 8 5 5

Du kan selv vælge, om du bruger definitionen af Prüfer kode fra AC eller fra DM.

Hvor mange nummererede træer med samme antal knuder, som det givne træ, findes der?

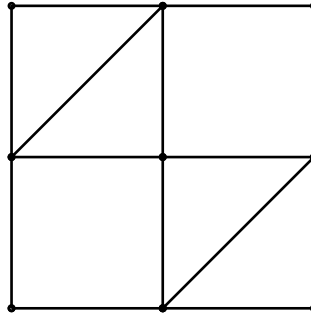
### Opgave 7

I en gruppe af datalogistuderende er der 52, der har en PC, 65 har et stereoanlæg, 53 har et TV, 25 har PC og stereo, 16 har PC og TV, 31 har stereo og TV og 12 har alle tre ting.

Hvor mange havde mindst en af de tre ting?

Opgave 8

Betragt nedenstående graf  $G$ :



Begrund, at  $G$  er en Eulergraf og angiv en Eulerkreds i  $G$ .  
Er  $G$  en Hamiltongraf ?