Konkret Matematik

Opgavesæt til besvarelse i 4 timer. Sættet består af 8 opgaver og er på 3 sider. Alle sædvanlige hjælpemidler, d.v.s. bøger, notater og lommeregnere kan benyttes. Det er tilladt at skrive med blyant, når blot skriften er tydeligt læsbar.
De stillede opgaver vægtes som angivet.

Opgave 1(15%)

For ligningssystemet

$$\begin{aligned} 6x_1 + \ x_2 \ + \ x_3 &= -8 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= \ 3 \\ 4x_1 - 3x_2 - 7x_3 &= -14 \end{aligned}$$

ønskes følgende besvaret:

a) Opskriv den tilhørende udvidede koefficientmatrix A.

b) Omform A ved brug af rækkeoperationer til reduceret echelonform og bestem rangen af A (d.v.s. rank A).

c) Find samtlige løsninger til ligningssystemet.

Opgave 2(10%)

Lad V betegne underrummet af $\mathbb{R}^4$ givet ved

$$V = \text{span}\{(1,1,0,0),(0,1,1,0),(0,0,1,1),(0,1,0,-1)\} .$$

a) Vis, at $((1,1,0,0),(0,1,1,0),(0,0,1,1))$ er en basis for V.

b) Begrund, at der findes en og kun en lineær afbildning $T : V \to \mathbb{R}^2$, der opfylder

$$T(1,1,0,0) = (2,0), \quad T(0,1,1,0) = (1,1), \quad T(0,0,1,1) = (0,2) .$$

c) Beregn $T(0,1,0,-1)$, hvor T er den lineære afbildning fra spørgsmål b).

Opgave 3(10%)

Begrund, at matricen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ -a & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

er invertibel for alle $a \in \mathbb{R}$ og bestem, for ethvert $a \in \mathbb{R}$, den inverse matrix. Svaret kræves begrundet.
Angiv specielt den inverse matrix for $a = 2$.

Opgave 4(15%)

For matrien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

skal det vises ved induktion, at

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{1}{2}n(n+1) \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{for} \quad n \in \mathbb{N}\ .$$

Gælder formlen også for $n = -1$?

Opgave 5(10%)

På en boghylde skal der opstilles 10 forskellige bøger skrevet af 3 forskellige forfattere, A, B og C (hver bog har en og kun en forfatter).

a) Bestem antallet af forskellige rækkefølger, i hvilke bøgerne kan opstilles.

b) Idet det antages, at A, B og C har forfattet henholdsvis n_A, n_B og n_C af de 10 bøger, skal antallet af mulige talsæt (n_A, n_B, n_C) bestemmes.

c) For $n_A = 3$, $n_B = 3$, $n_C = 4$ ønskes antallet af mulige rækkefølger af forfatternavne, der kan forekomme ved opstillingen, bestemt.

Opgave 6(15%)

a) Tegn et træ med 9 knuder, nummereret fra 1 til 9, således at valensen ("degree") d_i af knude i er givet ved

$$d_1 = 3,\ d_2 = 3,\ d_3 = 4,\ d_i = 1 \text{ for } i = 4, ..., 9.$$

b) Hvor mange forskellige træer af denne slags kan man tegne?

c) Opskriv Prüferkoden for træet fra a), idet du selv afgør, om du vil bruge definitionen af Prüferkode fra AC eller fra DM.

d) Hvor mange træer med 9 knuder, numereret fra 1 til 9, er der ialt?

Opgave 7(15%)

Lad G være en sammenhængende graf, hvis knuder alle har valens 2 eller 3, og lad n og m betegne antallet af henholdsvis knuder og kanter i G.

a) Begrund, at G ikke kan være et træ.

b) Afgør, under hvilke omstændigheder G er en Eulergraf og angiv samtlige sådanne grafer G.

c) Giv et eksempel på en graf G af den givne slags, som er en Hamiltongraf men ikke en Eulergraf. Giv også et eksempel på en graf af den givne slags, som hverken er en Hamiltongraf eller en Eulergraf.

d) Vis, at der gælder $m \leq \frac{3}{2}n$.

Opgave 8(10%)

a) Bestem grænseværdierne

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2 - n + 2}{5n^2 + 3n + 1} \qquad \text{og} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{2n^2 - n + 2}$$

b) Hvilke af følgende fire påstande er sande?

i) $2n^2 - n + 2 = \Theta(5n^2 + 3n + 1)$

ii) $\sqrt{n} = \mathrm{o}(2n^2 - n + 2)$

iii) $5n^2 + 3n + 1 = \mathrm{O}(\sqrt{n})$

iv) $5n^2 + 3n + 1 = \mathrm{O}(2n^2 - n + 2)$.