Konkret Matematik

Opgavesæt til besvarelse i 4 timer. Sættet består af 8 opgaver og er på 3 sider. Alle sædvanlige hjælpemidler, d.v.s. bøger, notater og lommeregnere kan benyttes. Det er tilladt at skrive med blyant, når blot skriften er tydeligt læsbar.
De stillede opgaver vægtes som angivet.

Opgave 1(15%)

Lad matricen A være givet ved

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & -6 & 1 \\ 6 & 13 & -17 & 4 \end{pmatrix}$$

a) Omform A ved brug af rækkeoperatoner til en matrix på reduceret (række-)echelonform.

b) Bestem rangen af A (d.v.s. rank A).

c) Opskriv det homogene lineære ligningssystem, hvis koefficientmatrix er A. Bestem samtlige løsninger til dette.

Opgave 2(10%)

Lad basen (v_1, v_2, v_3) for $\mathbb{R}^3$ være givet ved

$$v_1 = (1,2,0)\ , \quad v_2 = (1,3,0) \quad v_3 = (0,0,1)\ ,$$

og lad $w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{R}^3$ være givet ved

$$w_1 = v_1 + v_2\ , \quad w_2 = 2v_1 - v_3\ , \quad w_3 = v_2 + v_3\ .$$

a) Vis, at (w_1, w_2, w_3) er en basis for $\mathbb{R}^3$.

Lad den lineære afbildning $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ være givet ved

$$T(v_1) = w_1,\ \ T(v_2) = w_2,\ \ T(v_3) = w_3\ .$$

b) Angiv matricen, der repræsentærer T m.h.t. basen (v_1, v_2, v_3).

c) Begrund, at der findes en vektor $v_0 \in \mathbb{R}^3$, således at $T(v_0) = (0,1,0)$. (Det kræves ikke, at du bestemmer vektoren v_0.)

Opgave 3(10%)

Afgør, for hvilke værdier af $a \in \mathbb{R}$ matricen

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

er invertibel. Bestem den inverse matrix for $a = -1$. Svaret kræves begrundet.

Opgave 4(15%)

Lad A_n være $n \times n$-matricen, hvis elementer i diagonalen, i n'te række og i n'te søjle alle er lig med 1, mens alle øvrige elementer er 0. Således er f.eks.

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Vis, at

$$\det A_n = 2 - n \quad \text{for alle} \quad n \in \mathbb{N} .$$

Opgave 5(10%)

En studiefond uddeler hvet år ialt 10000 kr til betrængte studerende. Alle uddelte beløb er multipla af 1000 kr.

a) Sidste år var der 5 ansøgninger om støtte. Hvor mange mulige fordelinger af midlerne var der ialt, når der tages hensyn til, at nogle ansøgninger muligvis ikke kunne imødekommes?

b) Det viste sig, at fonden besluttede at imødekomme netop tre af ansøgningerne. På hvor mange måder kunne beløbet fordeles på disse tre ansøgere?

Opgave 6(15%)

a) Bestem antallet af Prüfer koder for nummererede træer med 10 knuder, hvori der forekommer netop tre 1-taller, netop tre 5-taller og resten er 7-taller.

b) Hvilke valenser ("degrees") forekommer der i træer med Prüfer koder, som angivet i spørgsmål a)?

c) Bestem antallet af nummererede træer med 10 knuder, hvori der forekommer mindst to knuder med valens 4.

Opgave 7(15%)

Antag, at grafen G er sammenhængende og har $n+2$ knuder ialt, af hvilke 2 har valens k og n har valens 4. Her er $n \geq 0$ og $k \geq 1$ hele tal, og $k \neq 4$.

a) Bestem antallet af kanter i G udtrykt ved n og k.

b) For hvilke n og k er G et træ?

c) For hvilke n og k er G en Eulergraf?

d) Vis strukturen af G (f. eks. med en tegning) i tilfældet $k = 2$ og $n = 4$.

Opgave 8(10%)

a) Bestem grænseværdierne

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3 - 2n^2 + 1}{3n^3 + n^2 + n} \qquad \text{og} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{n^3 - 2n^2 + 1}{\sqrt{n!}}$$

b) Hvilke af følgende tre påstande er sande?

i) $n^3 - 2n^2 + 1 = \Theta(3n^3 + n^2 + n)$

ii) $n^3 - 2n^2 + 1 = \mathrm{o}(\sqrt{n!})$

iii) $\sqrt{n!} = \mathrm{O}(3n^3 + n^2 + n)$