

Konkret Matematik

Opgavesæt til besvarelse i 4 timer. Sættet består af 8 opgaver.

Opgave 1 (15%)

For ligningssystemet

$$\begin{aligned}4x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 - x_5 &= -3 \\3x_1 + 2x_2 - x_3 + x_5 &= 1\end{aligned}$$

ønskes følgende besvaret:

- (1) Angiv den tilhørende (udvidede) matrix.
- (2) Omform denne matrix ved brug af rækkeoperationer til en matrix på reduceret echelonform. Angiv antal frie variable.
- (3) Bestem herefter samtlige løsninger til ligningssystemet.

Opgave 2 (10%)

For en lineær afbildning $T : R^3 \rightarrow R^4$ gælder, at

$$T(1, 0, 2) = (2, 0, 0, 1), \quad T(0, 1, 2) = (2, 1, 1, 1), \quad T(1, 1, 1) = (0, 0, 1, 1).$$

- (1) Vis, at $(0, 3, 0)$ tilhører $\text{span}\{(1, 0, 2), (0, 1, 2), (1, 1, 1)\}$.
- (2) Vis, at $T(0, 3, 0) = (-2, 1, 3, 1)$.
- (3) Angiv en basis for underrummet $\text{span}\{(2, 0, 0, 1), (2, 1, 1, 1), (0, 0, 1, 1)\}$ af R^4 .

Opgave 3 (10%)

Gør rede for, at matricen

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

er invertibel og bestem den inverse matrix. Svaret kræves begrundet.

Opgave 4 (15%)

Matricen A er givet ved

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Vis ved induktion, at

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 3^n - 1 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$$

for alle naturlige tal n .

Gælder ligningen også for $n = -1$?

Opgave 5 (10%)

I et hestevæddeløb deltager 6 heste.

- (1) Hvor mange mulige udfald af løbet findes der, når der ses bort fra muligheden for, at to eller flere heste bruger samme tid?

Antag fra nu af, at muligheden for samme tidsforbrug for to eller flere heste er tilstede.

- (2) Hvor mange mulige udfald af løbet findes der, hvor netop tre heste deler førstepladsen, men ingen andre delte pladser forekommer?
(3) Hvor mange mulige udfald findes der, i hvilke der noteres netop to forskellige tider?

Opgave 6 (15%)

Et nummereret træ har Prüfer koden

2 2 2 1 6 6 6 1 .

Tegn træet, idet du selv afgør, om du vil bruge definitionen af Prüfer kode fra AC eller fra DM.

Hvor mange nummererede træer findes der med samme antal knuder som det fundne træ (og samme mængde af knudenumre)?

Opgave 7 (15%)

Vi betragter ord bestående af tre x 'er, tre y 'er og tre z 'er, f.eks.

$xyxzxyyz$.

Bestem antallet af sådanne ord.

Bestem også antallet af sådanne ord, i hvilke hverken tre på hinanden følgende x 'er, tre på hinanden følgende y 'er eller tre på hinanden følgende z 'er forekommer. (Benyt f.eks. inklusion-eksklusionsprincippet.)

Opgave 8 (10%)

Antag, at grafen G har $2n$ knuder, af hvilke n har valens ("degree") k og de andre n har valens 1. Her er n og k naturlige tal.

- (1) Bestem antallet af kanter i G udtrykt ved n og k .
(2) Begrund, at n må være lige, hvis k er lige.
(3) Vis, at G kun kan være et træ såfremt enten $n = k = 1$ eller $n = k = 2$.