

Konkret Matematik

Opgavesæt til besvarelse i 4 timer. Sættet består af 8 opgaver og er på 3 sider. Alle sædvanlige hjælpemidler, d.v.s. bøger, notater og lommeregnere kan benyttes.

De stillede opgaver vægtes som angivet.

Opgave 1(15%)

For ligningssystemet

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= -5 \\2x_1 + 4x_2 - 6x_3 + x_4 &= -8 \\6x_1 + 13x_2 - 17x_3 + 4x_4 &= -21\end{aligned}$$

ønskes følgende besvaret:

- Angiv den tilhørende (udvidede) matrix.
- Omform denne matrix ved brug af rækkeoperationer til en echelonmatrix.
- Bestem herefter samtlige løsninger til ligningssystemet.

Opgave 2(10%)

For en lineær afbildning $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ gælder, at

$$T(1, 0, 0) = (2, 0, 5), \quad T(0, 1, 0) = (1, 2, 7), \quad T(0, 0, 1) = (2, -4, -4).$$

- Beregn $T(2, 3, -1)$.
- Bestem matricen hørende til T (m.h.t. den naturlige basis for \mathbb{R}^3).
- Find en basis for $\text{span}\{(2, 0, 5), (1, 2, 7), (2, -4, -4)\}$.

Opgave 3(10%)

Gør rede for, at matricen

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

er invertibel og bestem den inverse matrix. Svaret kræves begrundet.

Opgave 4(15%)

Antag, at tallene a_1, a_2, a_3, \dots opfylder $a_1 = 3$ og

$$a_n = 3a_{n-1} - 2n + 5 \quad \text{for } n \geq 2.$$

Vis ved induktion, at

$$a_n = 3^n + n - 1 \quad \text{for } n \geq 1.$$

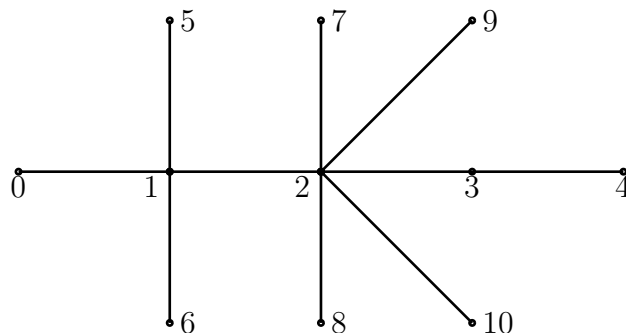
Opgave 5(10%)

I en blomsterbutik forhandles 5 forskellige slags roser, lad os kalde typerne A, B, C, D og E.

- En kunde ønsker en buket bestående af 12 roser. Hvor mange muligheder har blomsterhandleren for sammensætning af en sådan buket?
- Antag, at kunden køber en buket med 3 roser af type A, 2 af type B, 5 af type C, 1 af type D og 1 af type E, og at hun/han uddeler roserne som gave til 12 af sine venner, 1 rose til hver. Hvor mange forskellige sådanne fordelinger af roserne mellem de 12 personer findes der?

Opgave 6(15%)

Opskriv Prüfer koden for følgende nummererede træ, idet du selv afgør, om du vil bruge definitionen af Prüfer kode fra AC eller fra DM :



Opgave 7(15%)

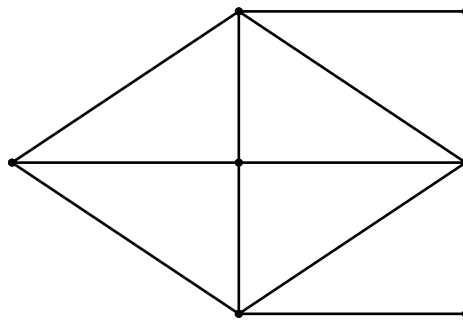
En mængde A er givet som foreningsmængde af fire mængder A_1, A_2, A_3 og A_4 , om hvilke der gælder følgende:

Hver af dem indeholder 8 elementer, fællesmængden af vilkårlige to af dem indeholder 4 elementer, fællesmængden af vilkårlige tre af dem indeholder 2 elementer, og alle fire mængder har netop ét element tilfælles.

Bestem antallet af elementer i A .

Opgave 8(10%)

Betragt nedenstående graf G :



- Begrund, at G ikke er en Eulergraf.
- Begrund, at G har en Eulervej, dvs. en (ikke lukket) vej der indeholder hver kant i G netop én gang.
- Afgør, hvorvidt G er en Hamiltongraf.