Handelshøjskolen i København
Eksamen ved HA(mat.), Juli 2006

Lineær algebra og funktioner af flere variable

Erhvervsøkonomi-matematik studiet

3 timers skriftlig prøve.

Alle sædvanlige hjælpemidler er tilladt.
Sættet er på 2 sider og består af 4 opgaver.

Opgave 1 (Vægt ca. 25 %)

Betragt vektorerne $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3 \in \mathbf{R}^4$ givet ved

$$\underline{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \ \underline{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \underline{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix},$$

og lad $U = \operatorname{span}\{\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3\}$ være underrummet af $\mathbf{R}^4$ udspændt af de tre vektorer.

(a) Find $\dim U$ og angiv en ortonormal basis for U.

(b) Afgør hvilken af vektorerne

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \underline{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 11 \\ -7 \end{pmatrix},$$

der tilhører U, og hvilken der ikke tilhører U.

(c) Bestem en basis for det ortogonale komplement $U^\perp$ til U.

(d) Lad $\underline{c}$ være vektoren

$$\underline{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Bestem den ortogonale projektion af $\underline{c}$ på U og den ortogonale projektion af $\underline{c}$ på $U^\perp$.

Opgave 2 (Vægt ca. 25 %)

Betragt matricen

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} -2 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Opgave 2 fortsættes på side 2

(a) Find egenværdierne for $\underline{\underline{A}}$.

(b) Bestem de tilhørende egenrum og angiv en basis for hvert af dem.

(c) Gør rede for, at der findes en regulær matrix $\underline{\underline{S}}$, så $\underline{\underline{S}}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{S}}^{-1}$ er en diagonalmatrix, og bestem en sådan matrix $\underline{\underline{S}}$.

(d) Kan man finde en ortogonal matrix $\underline{\underline{S}}$ så $\underline{\underline{S}}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{S}}^{-1}$ er en diagonalmatrix?

Opgave 3 (Vægt ca. 25 %)

(a) Skitsér området

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq 1\}.$$

(b) Udregn dobbeltintegralerne

$$\iint_\Omega xy^4\,dx\,dy, \qquad \iint_\Omega x^4 y\,dx\,dy.$$

Opgave 4 (Vægt ca. 25 %)

Betragt funktionerne

$$f(x, y, z) = 1 - x^2 - y^2 - z^2, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,$$

$$g(x, y, z) = \ln f(x, y, z) - x - y - z, \quad (x, y, z) \in S,$$

hvor

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 < 1\}.$$

(a) Gør rede for, at g er veldefineret og bestem gradienten $\nabla g(x, y, z)$ for $(x, y, z) \in S$.

(b) Vis, at hvis $(x, y, z) \in S$ er et stationært punkt for g, så må $x = y = z$. Vis dernæst, at g kun har ét stationært punkt i S og bestem dette.

(c) Vis, at f er konkav på $\mathbb{R}^3$, og at g er konkav på S.

(d) Vis, at g har globalt maksimum i S og find maksimumsværdien $\max_S g$.