Handelshøjskolen i København
Eksamen ved HA(mat.), April 2006

Lineær algebra og funktioner af flere variable

Erhvervsøkonomi-matematik studiet

3 timers skriftlig prøve.

Alle sædvanlige hjælpemidler er tilladt.
Sættet er på 2 sider og består af 4 opgaver.

Opgave 1 (Vægt ca. 25 %)

Betragt vektorerne $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3, \underline{a}_4 \in \mathbf{R}^4$ givet ved

$$\underline{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \underline{a}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \ \underline{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \underline{a}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ 13 \end{pmatrix}$$

og lad $U = \text{span}\{\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3, \underline{a}_4\}$ være underrummet af $\mathbf{R}^4$ udspændt af de fire vektorer.

(a) Vis, at $\dim U = 3$ og angiv en basis for U.

(b) Bestem det ortogonale komplement $U^\perp$ til U og angiv en ortonormal basis for $U^\perp$.

(c) Bestem den ortogonale projektion af vektoren $\underline{a}$ på $U^\perp$, idet $\underline{a}$ er givet ved

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(d) Lad $\underline{\underline{A}}$ være matricen

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & 13 \end{pmatrix}.$$

Bestem $\text{rg}\,\underline{\underline{A}}$.

Opgavesættet fortsættes på side 2

Opgave 2 (Vægt ca. 25 %)

Betragt matricen

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Find egenværdierne for $\underline{\underline{A}}$.

(b) Bestem de tilhørende egenrum og angiv en basis for hvert af dem.

(c) Afgør om $\underline{\underline{A}}$ er diagonaliserbar.

Opgave 3 (Vægt ca. 25 %)

Betragt funktionen

$$f(x, y, z) = xyz(4 - x - y - z), \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

(a) Udregn gradienten $\nabla f(x, y, z)$ og bestem derefter den retningsafledede af f i punktet $(1, 1, 0)$ i retningen $(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$.

(b) Vis at funktionen har et stationært punkt i $(1, 1, 1)$.

(c) Afgør om punktet $(1, 1, 1)$ er lokalt maksimum, lokalt minimum eller et sadelpunkt for f.

Opgave 4 (Vægt ca. 25 %)

Betragt funktionen

$$f(x, y) = e^{x^2+2y^2}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

(a) Vis, at funktionen f er konveks.

(b) Vis, at f har globalt minimum og find det eller de punkter, hvor minimumsværdien antages.

(c) Undersøg om funktionen

$$f(x, y) = e^{x^2+2y^2} - \ln x + 3x + 4y - 3$$

er konveks på mængden $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$.