Besvarelse af Eksamensopgaver Juni 2005 i Matematik H1

Opgave 1

De fire vektorer stilles op i en matrix som reduceres:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 0 & 6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 2 \\ 0 & 4 & -8 & 4 \\ 0 & 6 & -12 & 6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Der er 2 ledende et-taller så $\dim U = 2$. Som basis kan f.eks. bruges $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$, jfr. [LA] 4.6.

(b) $\mathrm{rg}(f) = \dim f(\mathbb{R}^4) = \dim U = 2$.

(c) Af dimensionssætningen må $\dim \ker(f) = 4 - 2 = 2$ og af reduktionen ovenfor ses at x_3, x_4 er frie variable. Sættes $x_3 = s, x_4 = t$ fås $x_1 = -s - t$ og $x_2 = 2s - t$, altså

$$\ker(f) = \left\{ \begin{pmatrix} -s-t \\ 2s-t \\ s \\ t \end{pmatrix} \mid s,t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ s \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid s,t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Sættet af de to søjler ovenfor er en af de mange mulige baser for $\ker(f)$.

(d) Da $f(\mathbf{e}_3) = \mathbf{a}_3$ er den fuldstændige løsning

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid s,t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Opgave 2

(a) Egenrummet V_2 er det samme som mængden af løsninger til matrixligningen

$$(\underline{\underline{A}} - 2\underline{\underline{E}})\underline{\underline{X}} = \underline{\underline{O}},$$

men vi har

$$\underline{\underline{A}} - 2\underline{\underline{E}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix},$$

som klart har rangen 1, da alle tre rækker er proportionale. Derfor har V_2 dimensionen 2 og er givet som

$$V_2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = x_2 + x_3\}$$

(Vi får den samme ligning for hver af matricens rækker). De variable x_2, x_3 er frie og dermed får vi f.eks følgende basis for V_2:

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Det er imidlertid ikke en ortonormal basis og vi må bruge Gram-Schmidt, hvorved man får f. eks. følgende ortonormale basis (men den er jo ikke entydigt bestemt)

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

(b) Den symmetriske matrix $\underline{\underline{A}}$ har tre egenværdier talt med multiplicitet ifølge den generelle teori. Vi har fundet at egenværdien 2 har multiplicitet 2 og derfor kan der kun være endnu en egenværdi, og den må have multiplicitet 1. Det tilhørende egenrum må være det ortogonale komplement til V_2 (Sætning 7.4.3). Vi skal altså finde $V_2^{\perp}$, dvs de vektorer der har indre produkt 0 med en basis for V_2. Det giver os ligningerne

$$x_1 + x_2 = 0, x_1 + x_3 = 0$$

som har løsningsmængden

$$\left\{ s \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \mid s \in \mathbb{R} \right\}$$

Ganges søjlen ovenfor på matricen $\underline{\underline{A}}$ fås -1 gange søjlen, og derfor er -1 den anden egenværdi og rummet ovenfor er egenrummet. Ved normalisering ses at

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

er en ortonormal basis for egenrummet V_{-1}.

En alternativ måde at regne spørgsmålet på er at opstille det karakteristiske polynomium for $\underline{\underline{A}}$, og da vi ved at 2 er en dobbeltrod heri (fra (a)), kan vi finde den sidste rod ved at dividere det karakteristiske polynomium med $(\lambda - 2)^2$, hvorved vi får et første grads polynomium med roden -1. Det tilhørende egenrum kan så bestemmes på sædvanlig måde.

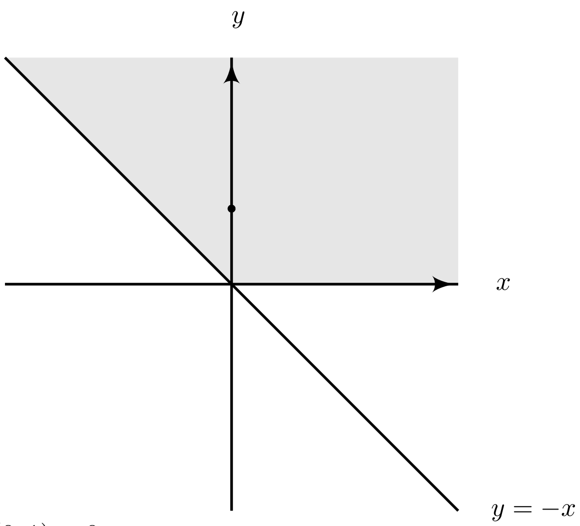
(c) Opstilles de tre fundne ortonormale egenvektorer som søjler i en matrix fås matricen $\underline{\underline{S}}^{-1}$, altså

$$\underline{\underline{S}}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}}, \end{pmatrix}$$

og matricen $\underline{\underline{S}}$ er den transponerede.

Opgave 3

(a) Da logaritmefunktionen kun er defineret for positive værdier er kravet at $y > 0, x + y > 0$ som er skitseret nedenfor:



(b) Vi har $f(0,1) = 0$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^x \ln y + \frac{2\ln(x+y)}{x+y}, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(0,1) = 0.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{e^x}{y} + \frac{2\ln(x+y)}{x+y}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,1) = 1.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = e^x \ln y + \frac{2}{(x+y)^2} - \frac{2\ln(x+y)}{(x+y)^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,1) = 2.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\frac{e^x}{y^2} + \frac{2}{(x+y)^2} - \frac{2\ln(x+y)}{(x+y)^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,1) = 1.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{e^x}{y} + \frac{2}{(x+y)^2} - \frac{2\ln(x+y)}{(x+y)^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,1) = 3.$$

Derfor finder vi Taylorpolynomiet af grad 2 ud fra $(0,1)$ til

$$P(x,y) = 0 + 0(x-0) + 1(y-1) + \frac{1}{2}(x, y-1)\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y-1 \end{pmatrix},$$

som reduceres til

$$P(x,y) = y - 1 + x^2 + \frac{1}{2}(y-1)^2 + 3x(y-1) = -\frac{1}{2} - 3x + x^2 + \frac{1}{2}y^2 + 3xy.$$

Opgave 4

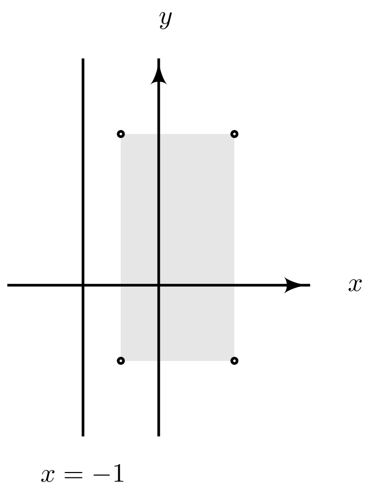
Vi finder

$$\frac{\partial h}{\partial x} = -\frac{1}{(x+1)^2} + y^2, \quad \frac{\partial h}{\partial y} = 2xy$$

(a) De stationære punkter er så enten $x = 0$, som giver $y = \pm 1$, eller $y = 0$ men så skal $-1/(x+1)^2 = 0$, hvilket ikke er muligt. De stationære punkter er altså $(0,1),(0,-1)$ som begge tilhører S.

(b) Hessematricen bliver
$$H(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{2}{(x+1)^3} & 2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}$$
altså
$$H(0,1) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad H(0,-1) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$
For begge matricer er $D_1 = 2, D_2 = -4$, så de er begge indefinite og begge punkter er sadelpunkter.

(c)



(d) Da A er afsluttet og begrænset, og da h er kontinuert i S, og dermed på A, giver ekstremværdisætningen, at h har maksimum og minimum på A. Disse punkter kan ikke findes i det indre af A, da h kun har et stationært punkt der, nemlig $(0,1)$, men det er et sadelpunkt. Altså må maks/min findes på randen af rektanglet. Vi laver derfor en randundersøgelse: $h(-\frac{1}{2}, y) = 2 - \frac{1}{2}y^2$ har på intervallet $y \in [-1,2]$ et stationært punkt for $y = 0$, så vi ser på værdierne i de tre punkter:
$$h(-\tfrac{1}{2}, -1) = \tfrac{3}{2}, \quad h(-\tfrac{1}{2}, 0) = 2, \quad h(-\tfrac{1}{2}, 2) = 0.$$
$h(1,y) = \frac{1}{2} + y^2$ har på intervallet $y \in [-1,2]$ et stationært punkt $y = 0$, så vi ser på værdierne i de tre punkter
$$h(1,-1) = \tfrac{3}{2}, \quad h(1,0) = \tfrac{1}{2}, \quad h(1,2) = \tfrac{9}{2}.$$
$h(x,-1) = x + 1/(x+1)$ har på intervallet $x \in [-\frac{1}{2}, 1]$ et stationært punkt $x = 0$, og da vi allerede har fundet værdierne i de fire hjørner, er det nok at kigge på $h(0,-1) = 1$.

$h(x,2) = 4x + 1/(x+1)$ har på intervallet kun det stationære punkt $x = -\frac{1}{2}$, som er et intervalendepunkt.

Ser vi på værdierne ovenfor slutter vi:

$h(1,2) = \frac{9}{2}$ er **maksimum** og $h(-\frac{1}{2}, 2) = 0$ er **minimum**.

Opgave 5

(a) Gram matricen af de de to vektorer (2×2 matricen af deres indre produkter) er

$$G = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Vi søger projektionen $\mathbf{p}$ af $\mathbf{e}_1$ på formen $\mathbf{p} = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2$, og ønsker altså at bestemme x_1, x_2 så

$$\mathbf{e}_1 - x_1\mathbf{a}_1 - x_2\mathbf{a}_2 \perp \mathbf{a}_i = 0$$

for $i = 1, 2$. Dette giver ligningssystemet

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{a}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

som har løsningen $x_1 = -\frac{1}{6}, x_2 = \frac{1}{2}$ og dermed bliver projektionen

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} \\ -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

(b) Da $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ er lineært uafhængige (de er ikke proportionale), har vi $\dim U = 2$, men så må $\dim U^\perp = 3 - 2 = 1$ og da $\mathbf{q} = \mathbf{e}_1 - \mathbf{p}$ er ortogonal på U er $\mathbf{q}$ en basis for $U^\perp$. Vi finder

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

og normaliseres denne til en enhedsvektor, ser vi at

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} \\ -\frac{\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix}$$

er en ortonormal basis for $U^\perp$.

bf Opgave 6

(a) Vi finder de partielle afledede:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2(x+y)e^{(x+y)^2} - 3, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2(x+y)e^{(x+y)^2}.$$

Den sidste partielle afledede er kun 0 når $x = -y$, men så er den første partielle afledede $= -3$ og derfor er der ingen stationære punkter.

(b) Spørgsmålet kan regnes ved at finde Hessematricen, som bliver

$$(2 + 4(x+y)^2)e^{(x+y)^2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

og da der står en positiv faktor foran den semidefinite matrix med 1 på alle fire pladser, er den positivt semidefinit, og altså er f konveks.

Nemmere er at bemærke, at $e^{(x+y)^2}$ og $-3x$ begge er konvekse. Den første pga sætning 4.5.4 (b) i [MA2], da e^x er voksende og konveks, og da $(x+y)^2$ er konveks.

(c) Hvis der var globalt minimum måtte dette være i et stationært punkt, men sådanne findes ikke.