Besvarelse af Eksamensopgaver Juli 2006 i Lineær algebra og funktioner af flere variable

Opgave 1

(a) De tre vektorer stilles op i en 4×3 matrix som reduceres:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Der er 2 ledende et-taller i de to første søjler, så $\underline{a}_1, \underline{a}_2$ er et lineeært uafhængigt sæt og $\underline{a}_3 = 2\underline{a}_1 - \underline{a}_2$. Altså er $\dim U = 2$ og som basis kan f.eks. bruges $\underline{a}_1, \underline{a}_2$. Vi skal imidlertid angive en ortonormal basis for U, så vi udfører Gram-Schmidt på $\underline{a}_1, \underline{a}_2$.

Sæt $\underline{b}_1 = \underline{a}_1$,

$$\underline{b}_2 = \underline{a}_2 - \frac{\underline{a}_2 \cdot \underline{b}_1}{\underline{b}_1 \cdot \underline{b}_1}\underline{b}_1 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 8 \\ -11 \end{pmatrix}.$$

Altså er

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 8 \\ -11 \end{pmatrix}$$

en ortogonal basis for U. Ved normering fås så at

$$\underline{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{30}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \underline{e}_2 = \frac{1}{3\sqrt{30}}\begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 8 \\ -11 \end{pmatrix}$$

er en ortonormal basis for U.

(b) Vi danner matricen hvis søjler er $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}, \underline{b}$ og reducerer:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 7 \\ 2 & 3 & 1 & 9 \\ 3 & 4 & 1 & 11 \\ 4 & 1 & 1 & -7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dette viser, at der er ledende et-taller i de tre første søjler, så disse er lineært uafhængige. Derimod er $\underline{b} = -3\underline{a}_1 + 5\underline{a}_2$. Altså har vi $\underline{a} \notin U; \underline{b} \in U$.

(c) Vi har per definition

$$U^{\perp} = \{\underline{x} \mid \underline{x} \cdot \underline{a}_1 = \underline{x} \cdot \underline{a}_2 = 0\},$$

så $U^{\perp}$ består af løsningerne til ligningssystemet

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0, \quad 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 0.$$

Da $\dim U + \dim U^{\perp} = 4$ må $\dim U^{\perp} = 2$. Ligningssystemets matrix er

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix},$$

som reduceres til

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -10 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \end{pmatrix},$$

hvilket viser, at x_3, x_4 er frie variable. Sættes disse til $x_3 = s, x_4 = t$ fås de bundne variable til $x_1 = s + 10t,\ x_2 = -2s - 7t$. Altså

$$U^\perp = \left\{ \begin{pmatrix} s+10t \\ -2s-7t \\ s \\ t \end{pmatrix} \mid s,t \in \mathbb{R} \right\},$$

så en basis for $U^\perp$ er

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 10 \\ -7 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(d) Vi finder

$$\mathrm{proj}_U(\underline{c}) = (\underline{c} \cdot \underline{e}_1)\underline{e}_1 + (\underline{c} \cdot \underline{e}_2)\underline{e}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{13}{18} \\ \frac{17}{18} \\ \frac{1}{18} \end{pmatrix}.$$

Videre fås

$$\mathrm{proj}_{U^\perp}(\underline{c}) = \underline{c} - \mathrm{proj}_U(\underline{c}) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{5}{18} \\ \frac{1}{18} \\ -\frac{1}{18} \end{pmatrix}.$$

Opgave 2

(a) Det karakteristiske polynomium bliver

$$p(\lambda) = (-2-\lambda)^2(1-\lambda),$$

som har rødderne $\lambda = -2$ (dobbeltrod) og $\lambda = 1$. Dette er egenværdierne.

(b) Egenrummet V_1 er løsningsrummet til det homogene ligningssystem med matrix

$$\underline{\underline{A}} - \underline{\underline{E}} = \begin{pmatrix} -3 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

som reduceres til

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

med x_3 som fri variabel, de øvrige som bundne. Altså er $\dim V_1 = 1$ og

$$V_1 = \left\{ t \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\},$$

som har $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ som basis.

Egenrummet V_{-2} er løsningsrummet til det homogene ligningssystem med matrix

$$\underline{\underline{A}} + 2\underline{\underline{E}} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

som reduceres til

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

med x_1, x_3 som frie variable. Altså er $\dim V_{-2} = 2$ og

$$V_{-2} = \left\{ \begin{pmatrix} s \\ t \\ t \end{pmatrix} \mid s, t \in \mathbb{R} \right\},$$

som har $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ som basis.

(c) Da $\dim V_1 + \dim V_{-2} = 3$ er matricen $\underline{\underline{A}}$ diagonaliserbar ifølge Sætning 6.3.1 i [LA], så der findes en regulær matrix $\underline{\underline{S}}$ med

$$\underline{\underline{S}}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{S}}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

nemlig

$$\underline{\underline{S}}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Heraf findes

$$\underline{\underline{S}} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(d) Svaret er nej for ellers skulle $\underline{\underline{A}}$ være symmetrisk.

Opgave 3

(a) Området Ω ligger over intervallet $[-1, 1]$ mellem kurverne $y = x^2$ og $y = 1$.

(b) Vi finder

$$\iint_\Omega xy^4\,dx\,dy = \int_{-1}^{1} \left(x \int_{x^2}^{1} y^4\,dy \right) dx = \int_{-1}^{1} \frac{x}{5}\left(1 - x^{10}\right)\,dx = 0$$

og

$$\iint_\Omega x^4 y\,dx\,dy = \int_{-1}^{1} \left(x^4 \int_{x^2}^{1} y\,dy \right) dx = \int_{-1}^{1} \frac{x^4}{2}\left(1 - x^4\right)\,dx$$
$$= \int_{0}^{1} \left(x^4 - x^8\right)\,dx = \frac{1}{5} - \frac{1}{9} = \frac{4}{45}.$$

Opgave 4

(a) På den konvekse mængde S er $f(x, y, z) > 0$ og dermed er dens logaritme veldefineret. Altså er g veldefineret på S.

Gradienten består af de 3 partielle afledede af g. Vi finder

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-2x}{1 - x^2 - y^2 - z^2} - 1,$$

og analoge udtryk for de to andre partielle afledede.

(b) Hvis $(x,y,z) \in S$ er et stationært punkt gælder

$$-2x = 1 - x^2 - y^2 - z^2, \quad -2y = 1 - x^2 - y^2 - z^2, \quad -2z = 1 - x^2 - y^2 - z^2$$

altså $-2x = -2y = -2z$, hvilket viser, at $x = y = z$. Indsat giver det $-2x = 1 - 3x^2$ og denne andengradsligning har rødderne $x = 1$ og $x = -\frac{1}{3}$. De mulige stationære punkter er altså $(1,1,1)$ og $(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$, men da det første ligger udenfor S har vi netop et stationært punkt.

(c) Da $1 - x^2 - y^2 - z^2$ er konkav (dens Hessematrix er en diagonalmatrix med -2 i diagonalen, altså negativt definit), og da $\ln(x)$ er voksende og konkav bliver $\ln f(x,y,z)$ konkav ifølge Sætning 4.5.4 i [MA]. Når der hertil lægges den lineære funktion $-x - y - z$ fås, at g er konkav på S.

(d) Da der er et stationært punkt og g er konkav, er der globalt maksimum i $(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$, jfr. Sætning 8.1.1 i [MA]. Man finder

$$\max_S g = g(-\tfrac{1}{3}, -\tfrac{1}{3}, -\tfrac{1}{3}) = \ln(1 - \tfrac{3}{9}) + 1 = 1 + \ln \tfrac{2}{3}.$$