Besvarelse af Eksamensopgaver Juli 2005 i Matematik H1

Opgave 1

De fire vektorer stilles op i en matrix som reduceres:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Der er 4 ledende et-taller så vektorerne er lineært uafhængige og dermed en basis.

(b) Vi skal vise at hvis $\varphi(\mathbf{x}) = 0$ så må $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Da vektorerne $\mathbf{a}_i, i = 1, \dots, 4$ er lineært uafhængige kan ligningen $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ kun gælde for

$$x_1 = 0, \quad x_1 - x_2 = 0, \quad x_1 - x_3 = 0, \quad x_2 + x_3 = 0,$$

men dette ligningssystem har klart kun løsningerne $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$, og derfor er φ injektiv.

(c) Vi finder

$$\varphi(\mathbf{e}_1) = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \varphi(\mathbf{e}_2) = -\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi(\mathbf{e}_3) = -\mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

De 3 fundne søjler er søjlerne i $\underline{\underline{A}}$ som altså er

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(d) Det første ligningssystems totalmatrix (en 4×4 matrix) reduceres til

$$\underline{\underline{T_1}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

så vi finder $x_1 = 1, x_2 = -3, x_3 = 2$.

Det andet ligningssystems totalmatrix reduceres til

$$\underline{\underline{T_2}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

og den sidste række viser, at der ikke er nogen løsning.

Opgave 2

(a) Vi opstiller det karakteristiske polynomium

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 1-\lambda & 6 \\ 2 & 6 & -2-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)((1-\lambda)(-2-\lambda) - 36) + 2(-2(1-\lambda)),$$

idet vi har udviklet efter første række. Ovenstående reduceres til $(1-\lambda)(\lambda^2+\lambda-42)$ som har rødderne

$$\lambda = 1, \quad \lambda = 6, \quad \lambda = -7,$$

hvilket er de tre egenværdier. Da de er forskellige er der 3 endimensionale egenrum, som vi finder ved i ovenstående matrix at sætte λ lig med de tre værdier successivt og finde de tilhørende kerner, hvilket gøres ved at reducere matricerne.

For $\lambda = 1$ finder vi

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \\ 2 & 6 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Heraf ses at x_2 er en fri variabel og sættes $x_2 = t$ fås løsningen $x_1 = -3t, x_2 = t, x_3 = 0$ hvilket viser at

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

er en basis for egenrummet V_1. På tilsvarende måde findes baserne

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ for } V_6, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} \text{ for } V_{-7}.$$

(b) Den symmetriske matrix $\underline{\underline{A}}$ har 2 positive egenværdier og en negativ, altså er matricen indefinit.

(c) De fundne egenværdier er ortogonale da de hører til 3 forskellige egenværdier. Vi skal derfor blot normalisere dem ved at dividere med deres længder for at få en ortonormal basis. De tre vektorers længder er henholdsvis $\sqrt{10}, \sqrt{65}, \sqrt{26}$. Opstilles de tre fundne ortonormale egenvektorer som søjler i en matrix fås matricen $\underline{\underline{S}}^{-1}$, altså

$$\underline{\underline{S}}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-3}{\sqrt{10}} & \frac{2}{\sqrt{65}} & \frac{1}{\sqrt{26}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{6}{\sqrt{65}} & \frac{3}{\sqrt{26}} \\ 0 & \frac{5}{\sqrt{65}} & -\frac{4}{\sqrt{26}}, \end{pmatrix}$$

og matricen $\underline{\underline{S}}$ er den transponerede. Vi får desuden

$$\underline{\underline{SAS^{-1}}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}.$$

Opgave 3

(a) Man finder

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2xy^2 - ze^{z-x}, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2x^2y, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = (1+z)e^{z-x}.$$

Desuden ses $F(1,0,1) = 1$ og ved at sætte $x = 1, y = 0, z = 1$ fås

$$\frac{\partial F}{\partial x}(1,0,1) = -1, \quad \frac{\partial F}{\partial y}(1,0,1) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial z}(1,0,1) = 2.$$

(b) Vi ved ([MA1, p. 428]) at

$$f'_x = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}, \quad f'_y = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

og idet vi bruger værdierne ovenfra får vi:

$$f'_x(1,0) = \tfrac{1}{2}, \quad f'_y(1,0) = 0.$$

(c) Ligningen er [MA1, p. 435]

$$F'_1(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F'_2(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F'_3(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$$

og med $(x_0, y_0, z_0) = (1, 0, 1)$ og udregningerne i (a) fås

$$(-1)(x - 1) + 0(y - 0) + 2(z - 1) = 0$$

altså $x - 2z + 1 = 0$.

Opgave 4

(a) Lagrangefunktionen er

$$L(x, y) = \sqrt{x^2 + y} - \lambda(x - y + 1)$$

og de partielle afledede med hensyn til x, y findes og sættes lig med 0:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y}} - \lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y}} + \lambda = 0.$$

Heraf fås

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + y}} = \lambda = -\frac{1}{2\sqrt{x^2 + y}},$$

og ganges med nævneren $\sqrt{x^2 + y}$, der aldrig er nul da $y > 0$ er forudsat, fås $x = -1/2$ og indsættes dette i bibetingelsen $x - y + 1 = 0$ fås $y = 1/2$. Dermed har vi fundet, at punktet $(-1/2, 1/2) \in M$ opfylder Lagranges betingelse. Den tilhørende værdi af λ er $\lambda = -1/\sqrt{3}$.

(b) Geometrisk begrundelse: Niveaukurverne $\sqrt{x^2 + y} = c$ for f kan også beskrives ved $y = c^2 - x^2$, som fremstiller parabler med benene nedad. Når $c = 1$ skærer parablen linjen $y = x + 1$ (bibetingelsen) i to punkter og når c gøres mindre sker det samme indtil c bliver så lille at parablen netop tangerer linjen. Når c bliver endnu mindre holder parablen op med at skære linjen, og der er altså ingen punkter på linjen, hvor f antager den c-værdi. Der er altså minimum netop når parablen tangerer linjen, medens der ikke er maksimum, da vi kan få vilkårligt store værdier af c ved at rykke parablen opad.

Analytisk begrundelse: Sættes $y = x + 1$ ind i udtrykket for f fås

$$g(x) := f(x, x + 1) = \sqrt{x^2 + x + 1},$$

og vi skal altså begrunde, at funktionen g har lokalt minimum for $x = -1/2$. Det er det sammen som at vise, at $g(x)^2 = x^2 + x + 1$ har lokalt minimum i dette punkt, men da g er konveks (en parabel) har den (endda globalt) minimum i det stationære punkt $x = -\frac{1}{2}$.

Opgave 5

(a) Vi opstiller den 4×3 matrix, der har søjlerne $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ og reducerer den:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Da slutmatricen har 3 ledende et-taller er de tre vektorer lineært uafhængige.

(b) Specielt er $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ lineært uafhængige og dermed har U dimension 2. For at finde den ortogonale projektion kan vi i henhold til [LA] side 122 gøre én af to ting: Erstatte $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ med en ortonormal basis ved Gram-Schmidt metoden og bruge Sætning 7.3.4 eller også bruge Gram-matricen og ligningssystemet (*). Det sidste er nok det nemmeste og (*) bliver

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Løsningen hertil findes nemt til $x_1 = -1, x_2 = 2$ og dermed bliver den ortogonale projektion af $\mathbf{a}_3$ på U lig med

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(c) Vi får $\dim(U^\perp) = 4 - \dim(U) = 4 - 2 = 2$. Først bestemmes $U^\perp$, som består af de vektorer $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$ for hvilke

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{a}_1 = 0, \quad \mathbf{x} \cdot \mathbf{a}_2 = 0,$$

hvilket netop giver ligningerne

$$x_1 + x_3 = 0, \quad x_1 + x_3 + x_4 = 0,$$

altå $x_4 = 0$ og x_2, x_3 er frie variable. Sættes $x_2 = s, x_3 = t$ fås

$$U^\perp = \{\begin{pmatrix} -t \\ s \\ t \\ 0 \end{pmatrix} \mid s, t \in \mathbb{R}\} \text{ med basis } \mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Vektorerne $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ er klart ortogonale og dermed fås en ortonormal basis for $U^\perp$ til

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Opgave 6

(a) Differentieres funktionen $f(x) = \frac{1}{2}(\ln x)^2$ fås

$$f'(x) = \frac{1}{2}2(\ln x)\frac{1}{x} = \frac{\ln x}{x},$$

hvilket viser det ønskede.

(b) På intervallet $[1, e]$ vokser $\frac{\ln x}{x}$ fra 0 til $\frac{1}{e}$ medens $\frac{1}{x}$ aftager fra 1 til $\frac{1}{e}$. Området B ligger mellem disse to kurver over intervallet fra 1 til e.

Arealet er derfor

$$\int_1^e \left(\int_{\frac{\ln x}{x}}^{\frac{1}{x}} dy \right) dx = \int_1^e \left(\tfrac{1}{x} - \tfrac{\ln x}{x} \right) dx = \left[\ln x - \frac{1}{2}(\ln x)^2 \right]_1^e = \frac{1}{2},$$

idet vi har brugt (a) til udregning af det sidste integral.

(c) Det angivne dobbeltintegral udregnes som

$$\int_1^e \left(\int_{\frac{\ln x}{x}}^{\frac{1}{x}} e^{xy}\, dy \right) dx = \int_1^e \left[\frac{e^{xy}}{x} \right]_{\frac{\ln x}{x}}^{\frac{1}{x}} dx = \int_1^e \frac{e - x}{x}\, dx$$

$$= [e \ln x - x]_1^e = (e \ln e - e) - (e \ln 1 - 1) = 1.$$