Besvarelse af Eksamensopgaver April 2006 i Lineær algebra og funktioner af flere variable

Opgave 1

(a) De fire vektorer stilles op i en 4×4 matrix som reduceres:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 1 & 13 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Der er 3 ledende et-taller i de tre første søjler så $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3$ er et lineeært uafhængigt sæt og $\underline{a}_4 = 6\underline{a}_1 + 5\underline{a}_2 - 8\underline{a}_3$. Altså er $\dim U = 3$ og som basis kan f.eks. bruges $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3$.

(b) Da $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3$ er en basis for U er $U^\perp$ lig med mængden af $\underline{x} \in \mathbb{R}^4$ så

$$\underline{a}_1 \cdot \underline{x} = \underline{a}_2 \cdot \underline{x} = \underline{a}_3 \cdot \underline{x} = 0,$$

altså de $\underline{x}$ som løser ligningssystemet

$$x_1 + x_3 + x_4 = 0, \quad -x_1 + 2x_2 + 3x_4 = 0, \quad x_2 + x_3 + x_4 = 0,$$

som har matricen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Denne reduceres til

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

som viser, at x_4 er en fri variabel og at de øvrige er bundne. Sættes $x_4 = t$ fås løsningerne

$$\begin{pmatrix} -3t \\ -3t \\ 2t \\ t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R},$$

som udgør $U^\perp$, der altså er af dimension 1 med

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

som basis. En ortonormal basis er

$$\underline{e} = \frac{1}{\sqrt{23}} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(c) Den ortogonale projektion af $\underline{a}$ på $U^\perp$ er givet som

$$(\underline{a} \cdot \underline{e})\underline{e} = \frac{1}{23} \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

(d) Man bemærker, at $\underline{\underline{A}}$ er den transponerede til matricen opstillet under (a) og hvis rang er 3, da $\dim U = 3$. Da en matrix og dens transponerede har samme rang ([LA]: Sætning 4.8.9) er $\operatorname{rg} \underline{\underline{A}} = 3$.

Opgave 2

(a) Det karakteristiske polynomium bliver

$$p(\lambda) = -(\lambda - 2)(\lambda - 1)^2,$$

som har rødderne $\lambda = 1$ (dobbeltrod) og $\lambda = 2$. Dette er egenværdierne.

(b) Egenrummet V_1 er løsningsrummet til det homogene ligningssystem med matrix

$$\underline{\underline{A}} - \underline{\underline{E}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

som reduceres til

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

med x_2 som fri variabel, de øvrige som bundne. Altså er $\dim V_1 = 1$ og

$$V_1 = \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\},$$

som har $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ som basis. Egenrummet V_2 er løsningsrummet til det homogene ligningssystem med matrix

$$\underline{\underline{A}} - 2\underline{\underline{E}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

som reduceres til

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

med x_3 som fri variabel, de øvrige som bundne. Altså er $\dim V_2 = 1$ og

$$V_2 = \left\{ t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\},$$

som har $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ som basis.

(c) Da egenværdien 1 har rodmultiplicitet 2 med egenværdimultipliciteten 1 ($= \dim V_1$), er $\underline{\underline{A}}$ ikke diagonaliserbar ifølge Sætning 6.2.3 i [LA].

Opgave 3

(a) Gradienten består af de 3 partielle afledede med hensyn til x, y, z, så man får

$$\nabla f(x, y, z) = (4yz - 2xyz - y^2z - yz^2,\ 4xz - x^2z - 2xyz - xz^2,\ 4xy - x^2y - xy^2 - 2xyz)$$

specielt $\nabla f(1,1,0) = (0,0,2)$, hvorefter den retningsafledede bliver

$$\nabla f(1,1,0) \cdot (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}) = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

(b) $\nabla f(1,1,1) = (0,0,0)$, altså er $(1,1,1)$ et stationært punkt.

(c) Man finder følgende Hessematrix

$$H_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} -2yz & 4z - 2xz - 2yz - z^2 & 4y - 2xy - y^2 - 2yz \\ 4z - 2xz - 2yz - z^2 & -2xz & 4x - x^2 - 2xy - 2xz \\ 4y - 2xy - y^2 - 2yz & 4x - x^2 - 2xy - 2xz & -2xy \end{pmatrix}$$

specielt

$$H_f(1,1,1) = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Man finder de ledende principale underdeterminanter $D_1 = -2, D_2 = 3, D_3 = -4$. Dette viser, at matricen er negativt definit. Alternativt kan man udregne det karakteristiske polynomium

$$p(\lambda) = -\lambda^3 - 6\lambda^2 - 9\lambda - 4 = -(\lambda+1)^2(\lambda+4),$$

som har rødderne -1 (dobbelt) og -4. Da de er negative, er matricen negativt definit. Af kriteriet i Sætning 8.3.1 i [MA] fås, at der er (strengt) lokalt maksimum i $(1,1,1)$.

Opgave 4

(a) Da $x^2 + 2y^2$ er konveks og da e^x er voksende og konveks bliver f konveks ifølge Sætning 4.5.4 i [MA]

(b) Man finder

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xe^{x^2+2y^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 4ye^{x^2+2y^2},$$

så $(0,0)$ er eneste stationære punkt. Da f er konveks, er der altså globalt minimum i $(0,0)$, jfr. Sætning 8.1.1 i [MA].

(c) Mængden H er en halvplan altså konveks og til den konvekse funktion fra (a) adderes $3x + 4y - 3$ som er affin (både konveks og konkav i $\mathbb{R}^2$) samt $-\ln x$, som er konveks på $]0, \infty[$, da den dobbelte afledede er $1/x^2 > 0$. Altså er den angivne funktion konveks på H.