Regneregler for reelle tal

Mængden af reelle tal betegnes $\mathbb{R}$. Som bekendt kan elementer $x, y, z \in \mathbb{R}$ adderes og multipliceres, og der gælder reglerne:

Regneregler for reelle tal

Mængden af reelle tal betegnes $\mathbb{R}$. Som bekendt kan elementer $x, y, z \in \mathbb{R}$ adderes og multipliceres, og der gælder reglerne:

1. $x + y = y + x$ (plus (addition) er kommutativ).

Regneregler for reelle tal

Mængden af reelle tal betegnes $\mathbb{R}$. Som bekendt kan elementer $x, y, z \in \mathbb{R}$ adderes og multipliceres, og der gælder reglerne:

1. $x + y = y + x$ (plus (addition) er kommutativ).
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$ (plus er associativ).

Regneregler for reelle tal

Mængden af reelle tal betegnes $\mathbb{R}$. Som bekendt kan elementer $x, y, z \in \mathbb{R}$ adderes og multipliceres, og der gælder reglerne:

1. $x + y = y + x$ (plus (addition) er kommutativ).
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$ (plus er associativ).
3. $x + 0 = 0 + x = x$ (nul er neutralt for addition).

Regneregler for reelle tal

Mængden af reelle tal betegnes $\mathbb{R}$. Som bekendt kan elementer $x, y, z \in \mathbb{R}$ adderes og multipliceres, og der gælder reglerne:

1. $x + y = y + x$ (plus (addition) er kommutativ).
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$ (plus er associativ).
3. $x + 0 = 0 + x = x$ (nul er neutralt for addition).
4. $x + (-x) = (-x) + x = 0$ ($-x$ er invers for addition).

Regneregler for reelle tal

Mængden af reelle tal betegnes $\mathbb{R}$. Som bekendt kan elementer $x, y, z \in \mathbb{R}$ adderes og multipliceres, og der gælder reglerne:

1. $x + y = y + x$ (plus (addition) er kommutativ).
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$ (plus er associativ).
3. $x + 0 = 0 + x = x$ (nul er neutralt for addition).
4. $x + (-x) = (-x) + x = 0$ ($-x$ er invers for addition).
5. $x \cdot y = y \cdot x$ (gange (multiplikation) er kommutativ).

Regneregler for reelle tal

Mængden af reelle tal betegnes $\mathbb{R}$. Som bekendt kan elementer $x, y, z \in \mathbb{R}$ adderes og multipliceres, og der gælder reglerne:

1. $x + y = y + x$ (plus (addition) er kommutativ).
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$ (plus er associativ).
3. $x + 0 = 0 + x = x$ (nul er neutralt for addition).
4. $x + (-x) = (-x) + x = 0$ ($-x$ er invers for addition).
5. $x \cdot y = y \cdot x$ (gange (multiplikation) er kommutativ).
6. $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ (gange er associativ).

Regneregler for reelle tal

Mængden af reelle tal betegnes $\mathbb{R}$. Som bekendt kan elementer $x, y, z \in \mathbb{R}$ adderes og multipliceres, og der gælder reglerne:

1. $x + y = y + x$ (plus (addition) er kommutativ).
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$ (plus er associativ).
3. $x + 0 = 0 + x = x$ (nul er neutralt for addition).
4. $x + (-x) = (-x) + x = 0$ ($-x$ er invers for addition).
5. $x \cdot y = y \cdot x$ (gange (multiplikation) er kommutativ).
6. $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ (gange er associativ).
7. $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$ (1 er neutralt element for gange).

Regneregler for reelle tal

Mængden af reelle tal betegnes $\mathbb{R}$. Som bekendt kan elementer $x, y, z \in \mathbb{R}$ adderes og multipliceres, og der gælder reglerne:

1. $x + y = y + x$ (plus (addition) er kommutativ).
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$ (plus er associativ).
3. $x + 0 = 0 + x = x$ (nul er neutralt for addition).
4. $x + (-x) = (-x) + x = 0$ ($-x$ er invers for addition).
5. $x \cdot y = y \cdot x$ (gange (multiplikation) er kommutativ).
6. $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ (gange er associativ).
7. $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$ (1 er neutralt element for gange).
8. $xx^{-1} = x^{-1}x = 1$ hvis $x \neq 0$ (x^{-1} er invers for multiplikation).

Regneregler for reelle tal

Mængden af reelle tal betegnes $\mathbb{R}$. Som bekendt kan elementer $x, y, z \in \mathbb{R}$ adderes og multipliceres, og der gælder reglerne:

1. $x + y = y + x$ (plus (addition) er kommutativ).
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$ (plus er associativ).
3. $x + 0 = 0 + x = x$ (nul er neutralt for addition).
4. $x + (-x) = (-x) + x = 0$ ($-x$ er invers for addition).
5. $x \cdot y = y \cdot x$ (gange (multiplikation) er kommutativ).
6. $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ (gange er associativ).
7. $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$ (1 er neutralt element for gange).
8. $xx^{-1} = x^{-1}x = 1$ hvis $x \neq 0$ (x^{-1} er invers for multiplikation).
9. $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ (den distributive lov).

Regneregler for reelle tal

Mængden af reelle tal betegnes $\mathbb{R}$. Som bekendt kan elementer $x, y, z \in \mathbb{R}$ adderes og multipliceres, og der gælder reglerne:

1. $x + y = y + x$ (plus (addition) er kommutativ).
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$ (plus er associativ).
3. $x + 0 = 0 + x = x$ (nul er neutralt for addition).
4. $x + (-x) = (-x) + x = 0$ ($-x$ er invers for addition).
5. $x \cdot y = y \cdot x$ (gange (multiplikation) er kommutativ).
6. $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ (gange er associativ).
7. $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$ (1 er neutralt element for gange).
8. $xx^{-1} = x^{-1}x = 1$ hvis $x \neq 0$ (x^{-1} er invers for multiplikation).
9. $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ (den distributive lov).

Spørgsmål

Hvilke af reglerne gælder for $\mathbb{N}$? For $\mathbb{Z}$? For $\mathbb{Q}$?

Spørgsmål

Hvilke af reglerne gælder for $\mathbb{N}$? For $\mathbb{Z}$? For $\mathbb{Q}$?

1. $x + y = y + x$ (plus (addition) er kommutativ).

Spørgsmål

Hvilke af reglerne gælder for $\mathbb{N}$? For $\mathbb{Z}$? For $\mathbb{Q}$?

1. $x + y = y + x$ (plus (addition) er kommutativ).
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$ (plus er associativ).

Spørgsmål

Hvilke af reglerne gælder for $\mathbb{N}$? For $\mathbb{Z}$? For $\mathbb{Q}$?

1. $x + y = y + x$ (plus (addition) er kommutativ).
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$ (plus er associativ).
3. $x + 0 = 0 + x = x$ (nul er neutralt for addition).

Spørgsmål

Hvilke af reglerne gælder for $\mathbb{N}$? For $\mathbb{Z}$? For $\mathbb{Q}$?

1. $x + y = y + x$ (plus (addition) er kommutativ).
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$ (plus er associativ).
3. $x + 0 = 0 + x = x$ (nul er neutralt for addition).
4. $x + (-x) = (-x) + x = 0$ ($-x$ er invers for addition).

Spørgsmål

Hvilke af reglerne gælder for $\mathbb{N}$? For $\mathbb{Z}$? For $\mathbb{Q}$?

1. $x + y = y + x$ (plus (addition) er kommutativ).
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$ (plus er associativ).
3. $x + 0 = 0 + x = x$ (nul er neutralt for addition).
4. $x + (-x) = (-x) + x = 0$ ($-x$ er invers for addition).
5. $x \cdot y = y \cdot x$ (gange (multiplikation) er kommutativ).

Spørgsmål

Hvilke af reglerne gælder for $\mathbb{N}$? For $\mathbb{Z}$? For $\mathbb{Q}$?

1. $x + y = y + x$ (plus (addition) er kommutativ).
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$ (plus er associativ).
3. $x + 0 = 0 + x = x$ (nul er neutralt for addition).
4. $x + (-x) = (-x) + x = 0$ ($-x$ er invers for addition).
5. $x \cdot y = y \cdot x$ (gange (multiplikation) er kommutativ).
6. $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ (gange er associativ).

Spørgsmål

Hvilke af reglerne gælder for $\mathbb{N}$? For $\mathbb{Z}$? For $\mathbb{Q}$?

1. $x + y = y + x$ (plus (addition) er kommutativ).
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$ (plus er associativ).
3. $x + 0 = 0 + x = x$ (nul er neutralt for addition).
4. $x + (-x) = (-x) + x = 0$ ($-x$ er invers for addition).
5. $x \cdot y = y \cdot x$ (gange (multiplikation) er kommutativ).
6. $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ (gange er associativ).
7. $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$ (1 er neutralt element for gange).

Spørgsmål

Hvilke af reglerne gælder for $\mathbb{N}$? For $\mathbb{Z}$? For $\mathbb{Q}$?

1. $x + y = y + x$ (plus (addition) er kommutativ).
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$ (plus er associativ).
3. $x + 0 = 0 + x = x$ (nul er neutralt for addition).
4. $x + (-x) = (-x) + x = 0$ ($-x$ er invers for addition).
5. $x \cdot y = y \cdot x$ (gange (multiplikation) er kommutativ).
6. $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ (gange er associativ).
7. $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$ (1 er neutralt element for gange).
8. $xx^{-1} = x^{-1}x = 1$ hvis $x \neq 0$ (x^{-1} er invers for multiplikation).

Spørgsmål

Hvilke af reglerne gælder for $\mathbb{N}$? For $\mathbb{Z}$? For $\mathbb{Q}$?

1. $x + y = y + x$ (plus (addition) er kommutativ).
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$ (plus er associativ).
3. $x + 0 = 0 + x = x$ (nul er neutralt for addition).
4. $x + (-x) = (-x) + x = 0$ ($-x$ er invers for addition).
5. $x \cdot y = y \cdot x$ (gange (multiplikation) er kommutativ).
6. $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ (gange er associativ).
7. $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$ (1 er neutralt element for gange).
8. $xx^{-1} = x^{-1}x = 1$ hvis $x \neq 0$ (x^{-1} er invers for multiplikation).
9. $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ (den distributive lov).

Ordning

De reelle tal har som bekendt en naturlig ordning, "mindre end eller lig med", betegnet $\leq$. Der gælder følgende regler:

1. $x \leq x$ (refleksivitet).

Ordning

De reelle tal har som bekendt en naturlig ordning, “mindre end eller lig med”, betegnet $\leq$. Der gælder følgende regler:

1. $x \leq x$ (refleksivitet).
2. Hvis $x \leq y$ og $y \leq z$ sågælder $x \leq z$ (transitivitet).

Ordning

De reelle tal har som bekendt en naturlig ordning, “mindre end eller lig med”, betegnet $\leq$. Der gælder følgende regler:

1. $x \leq x$ (refleksivitet).
2. Hvis $x \leq y$ og $y \leq z$ sågælder $x \leq z$ (transitivitet).
3. Hvis $x \leq y$ og $y \leq x$ da er $x = y$ (antisymmetri).

Ordning

De reelle tal har som bekendt en naturlig ordning, "mindre end eller lig med", betegnet $\leq$. Der gælder følgende regler:

1. $x \leq x$ (refleksivitet).
2. Hvis $x \leq y$ og $y \leq z$ sågælder $x \leq z$ (transitivitet).
3. Hvis $x \leq y$ og $y \leq x$ da er $x = y$ (antisymmetri).
4. Enten $x \leq y$ eller $y \leq x$ eller $x = y$ (total ordning).

Ordning

De reelle tal har som bekendt en naturlig ordning, "mindre end eller lig med", betegnet $\leq$. Der gælder følgende regler:

1. $x \leq x$ (refleksivitet).
2. Hvis $x \leq y$ og $y \leq z$ sågælder $x \leq z$ (transitivitet).
3. Hvis $x \leq y$ og $y \leq x$ da er $x = y$ (antisymmetri).
4. Enten $x \leq y$ eller $y \leq x$ eller $x = y$ (total ordning).
5. Hvis $x \leq y$ så er $x + z \leq y + z$ (harmoni med $+$).

Ordning

De reelle tal har som bekendt en naturlig ordning, “mindre end eller lig med”, betegnet $\leq$. Der gælder følgende regler:

1. $x \leq x$ (refleksivitet).
2. Hvis $x \leq y$ og $y \leq z$ sågælder $x \leq z$ (transitivitet).
3. Hvis $x \leq y$ og $y \leq x$ da er $x = y$ (antisymmetri).
4. Enten $x \leq y$ eller $y \leq x$ eller $x = y$ (total ordning).
5. Hvis $x \leq y$ så er $x + z \leq y + z$ (harmoni med $+$).
6. Hvis $x \leq y$ og $0 \leq z$ så er $xz \leq yz$. (harmoni med $\cdot$).

Ordning

De reelle tal har som bekendt en naturlig ordning, “mindre end eller lig med”, betegnet $\leq$. Der gælder følgende regler:

1. $x \leq x$ (refleksivitet).
2. Hvis $x \leq y$ og $y \leq z$ sågælder $x \leq z$ (transitivitet).
3. Hvis $x \leq y$ og $y \leq x$ da er $x = y$ (antisymmetri).
4. Enten $x \leq y$ eller $y \leq x$ eller $x = y$ (total ordning).
5. Hvis $x \leq y$ så er $x + z \leq y + z$ (harmoni med $+$).
6. Hvis $x \leq y$ og $0 \leq z$ så er $xz \leq yz$. (harmoni med $\cdot$).
7. $0 \leq 1$.

Ordning

De reelle tal har som bekendt en naturlig ordning, "mindre end eller lig med", betegnet $\leq$. Der gælder følgende regler:

1. $x \leq x$ (refleksivitet).
2. Hvis $x \leq y$ og $y \leq z$ sågælder $x \leq z$ (transitivitet).
3. Hvis $x \leq y$ og $y \leq x$ da er $x = y$ (antisymmetri).
4. Enten $x \leq y$ eller $y \leq x$ eller $x = y$ (total ordning).
5. Hvis $x \leq y$ så er $x + z \leq y + z$ (harmoni med $+$).
6. Hvis $x \leq y$ og $0 \leq z$ så er $xz \leq yz$. (harmoni med $\cdot$).
7. $0 \leq 1$.

Spørgsmål

Hvilke af ordensreglerne gælder for $\mathbb{Z}$? $\mathbb{N}$? $\mathbb{Q}$?

1. $x \leq x$ (refleksivitet).

Spørgsmål

Hvilke af ordensreglerne gælder for $\mathbb{Z}$? $\mathbb{N}$? $\mathbb{Q}$?

1. $x \leq x$ (refleksivitet).
2. Hvis $x \leq y$ og $y \leq z$ sågælder $x \leq z$ (transitivitet).

Spørgsmål

Hvilke af ordensreglerne gælder for $\mathbb{Z}$? $\mathbb{N}$? $\mathbb{Q}$?

1. $x \leq x$ (refleksivitet).
2. Hvis $x \leq y$ og $y \leq z$ sågælder $x \leq z$ (transitivitet).
3. Hvis $x \leq y$ og $y \leq x$ da er $x = y$ (antisymmetri).

Spørgsmål

Hvilke af ordensreglerne gælder for $\mathbb{Z}$? $\mathbb{N}$? $\mathbb{Q}$?

1. $x \leq x$ (refleksivitet).
2. Hvis $x \leq y$ og $y \leq z$ sågælder $x \leq z$ (transitivitet).
3. Hvis $x \leq y$ og $y \leq x$ da er $x = y$ (antisymmetri).
4. Enten $x \leq y$ eller $y \leq x$ eller $x = y$ (total ordning).

Spørgsmål

Hvilke af ordensreglerne gælder for $\mathbb{Z}$? $\mathbb{N}$? $\mathbb{Q}$?

1. $x \leq x$ (refleksivitet).
2. Hvis $x \leq y$ og $y \leq z$ sågælder $x \leq z$ (transitivitet).
3. Hvis $x \leq y$ og $y \leq x$ da er $x = y$ (antisymmetri).
4. Enten $x \leq y$ eller $y \leq x$ eller $x = y$ (total ordning).
5. Hvis $x \leq y$ så er $x + z \leq y + z$ (harmoni med $+$).

Spørgsmål

Hvilke af ordensreglerne gælder for $\mathbb{Z}$? $\mathbb{N}$? $\mathbb{Q}$?

1. $x \leq x$ (refleksivitet).
2. Hvis $x \leq y$ og $y \leq z$ sågælder $x \leq z$ (transitivitet).
3. Hvis $x \leq y$ og $y \leq x$ da er $x = y$ (antisymmetri).
4. Enten $x \leq y$ eller $y \leq x$ eller $x = y$ (total ordning).
5. Hvis $x \leq y$ så er $x + z \leq y + z$ (harmoni med $+$).
6. Hvis $x \leq y$ og $0 \leq z$ så er $xz \leq yz$. (harmoni med $\cdot$).

Spørgsmål

Hvilke af ordensreglerne gælder for $\mathbb{Z}$? $\mathbb{N}$? $\mathbb{Q}$?

1. $x \leq x$ (refleksivitet).
2. Hvis $x \leq y$ og $y \leq z$ sågælder $x \leq z$ (transitivitet).
3. Hvis $x \leq y$ og $y \leq x$ da er $x = y$ (antisymmetri).
4. Enten $x \leq y$ eller $y \leq x$ eller $x = y$ (total ordning).
5. Hvis $x \leq y$ så er $x + z \leq y + z$ (harmoni med $+$).
6. Hvis $x \leq y$ og $0 \leq z$ så er $xz \leq yz$. (harmoni med $\cdot$).
7. $0 \leq 1$.

Supremum

Definition

(A) En delmængde $X \subseteq \mathbb{R}$ er *opadtil begrænset* hvis der findes $y \in \mathbb{R}$ så at $x \leq y$ for alle $x \in X$. Tallet y kaldes da en *øvre begrænsning* for X.

Supremum

Definition

(A) En delmængde $X \subseteq \mathbb{R}$ er *opadtil begrænset* hvis der findes $y \in \mathbb{R}$ så at $x \leq y$ for alle $x \in X$. Tallet y kaldes da en *øvre begrænsning* for X.

(B) y (som ovenfor) kaldes en *mindste øvre grænse* (eller et *supremum*) hvis intet $y' < y$ er en øvre grænse for X.

Supremum

Definition

(A) En delmængde $X \subseteq \mathbb{R}$ er *opadtil begrænset* hvis der findes $y \in \mathbb{R}$ så at $x \leq y$ for alle $x \in X$. Tallet y kaldes da en *øvre begrænsning* for X.

(B) y (som ovenfor) kaldes en *mindste øvre grænse* (eller et *supremum*) hvis intet $y' < y$ er en øvre grænse for X.

"Fuldstændighedaksiomet for $\mathbb{R}$": Enhver ikke-tom (!) delmængde $X \subseteq \mathbb{R}$ som er opadtil begrænset har et supremum.

Opgave

1. Vis at hvis $d|a$ så vil $d|-a$, $-d|a$ og $-d|-a$.
2. Vis at hvis $d|a$ og $d|b$ og $c \in \mathbb{Z}$, da gælder at $d|(a+b)$ og $d|ac$
3. Vis at hvis $a|b$ og $b|c$ så $a|c$.
4. Vis at hvis $a > 0$ og $d|a$ så er $|d| \leq |a|$. Konkluder at et helt tal kun har endeligt mange divisorer.
5. Vis at ethvert helt tal a har de *trivielle divisorer* $\pm a$, og ± 1.

Opgave

1. Vis at hvis $d|a$ så vil $d|-a$, $-d|a$ og $-d|-a$.
2. Vis at hvis $d|a$ og $d|b$ og $c \in \mathbb{Z}$, da gælder at $d|(a+b)$ og $d|ac$
3. Vis at hvis $a|b$ og $b|c$ så $a|c$.
4. Vis at hvis $a > 0$ og $d|a$ så er $|d| \leq |a|$. Konkluder at et helt tal kun har endeligt mange divisorer.
5. Vis at ethvert helt tal a har de *trivielle divisorer* $\pm a$, og ± 1.

Velordningsprincippet på $\mathbb{N}$

Velordningsaxiomet: Hvis $X \subseteq \mathbb{N}$ er en ikke-tom delmængde af $\mathbb{N}$, så indeholder X et mindste element, dvs.:

Velordningsprincippet på $\mathbb{N}$

Velordningsaxiomet: Hvis $X \subseteq \mathbb{N}$ er en ikke-tom delmængde af $\mathbb{N}$, så indeholder X et mindste element, dvs.:

Der findes $x \in X$ så at for alle $y \in X$ gælder $x \leq y$.

Opgave

Vi har nu bevist sætningen for $a > 0$. Færdiggør beviset ved også at vise det for $a \leq 0$.