Matematik 211, 1975

Anders Thorup

Kategorier

Håndskrevne noter fra algebranoterne

KATEGORIER

KATEGORIER

1. Kategoribegrebet.

1.1. BESKRIVELSE. I en <u>kategori</u> $\mathcal{C}$ indgår følgende tre bestanddele:

i) <u>Objekterne i $\mathcal{C}$.</u> At A er objekt i $\mathcal{C}$ skrives ofte $A \in \mathcal{C}$. I en given kategori $\mathcal{C}$ ligger en afgrænsning af hvilke objekter den beskæftiger sig med. Vi vil ikke nærmere komme ind på hvad der forstås ved en sådan afgrænsning, men det fremhæves, at vi ikke forudsætter, at kategoriens objekter udgør en mængde.

ii) <u>Morfierne i $\mathcal{C}$.</u> Til hvert par A, B af objekter i $\mathcal{C}$ er der knyttet en mængde, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B)$, hvis elementer kaldes morfier (eller homomorfier eller pile) fra A til B. At $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B)$ skrives ofte $f: A \to B$ eller $A \xrightarrow{f} B$. Det er ofte bekvemt at antage, at mængderne $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B)$ og $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A',B')$, svarende til to forskellige par (A,B) og (A',B') af objekter i $\mathcal{C}$, er disjunkte.

iii) <u>Sammensætningen i $\mathcal{C}$.</u> Til hvert tripel A, B, C af objekter i $\mathcal{C}$ er der knyttet en afbildning:

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B,C) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,C)$$

kaldet sammensætning og betegnet

$$(f,g) \longmapsto g \circ_{\mathcal{C}} f.$$

Sammensætningen knytter altså til en morfi $f: A \to B$ og en morfi $g: B \to C$ en morfi $g \circ_{\mathcal{C}} f : A \to C$. Hvis misforståelser er udelukket, skrives

$$g \circ_{\mathcal{C}} f = gf.$$

Det forudsættes, at følgende axiomer er opfyldt:

<u>Axiom I (associativitet)</u>: For morfier

$$A \xrightarrow{f} B \;,\; B \xrightarrow{g} C \;,\; C \xrightarrow{h} D$$

gælder $$h(gf) = (hg)f.$$

<u>Axiom II (identiteter)</u>: Til hvert objekt A findes en morfi $1_A : A \to A$, således at vi for alle morfier
$$X \xrightarrow{f} A \quad \text{har} \quad 1_A f = f$$
og alle morfier
$$A \xrightarrow{g} Y \quad \text{har} \quad g 1_A = g.$$

Det er let at se, at en morfi i $Hom_{\mathcal{C}}(A,A)$ med den i axiom II nævnte egenskab er entydigt bestemt. Morfien 1_A kaldes <u>identiteten</u> på A.

1.2. DEFINITION. En morfi $A \xrightarrow{f} B$ i kategorien $\mathcal{C}$ kaldes en <u>isomorfi</u>, hvis der findes en morfi $B \xrightarrow{g} A$, således at
$$gf = 1_A \quad \text{og} \quad fg = 1_B .$$
En sådan morfi g er da entydigt bestemt, thi er $g' : B \to A$ endnu en morfi, som opfylder $g'f = 1_A$ og $fg' = 1_B$, så finder vi $g' = 1_A g' = (gf)g' = g(fg') = g 1_B = g$.
Morfien g kaldes den inverse til f, og den betegnes f^{-1}.

1.3. DEFINITION. En morfi $A \xrightarrow{f} A$ i kategorien $\mathcal{C}$ fra et objekt A til sig selv kaldes også en <u>endomorfi i A</u>. Vi sætter
$$End_{\mathcal{C}}(A) = Hom_{\mathcal{C}}(A,A).$$

En endomorfi $A \xrightarrow{f} A$, der er en isomorfi, kaldes en <u>automorfi i A</u>. Mængden af automorfier i A betegnes $Aut_{\mathcal{C}}(A)$. Sammensætningen i $\mathcal{C}$ giver for hvert objekt A en afbildning
$$End_{\mathcal{C}}(A) \times End_{\mathcal{C}}(A) \to End_{\mathcal{C}}(A),$$
altså en komposition i $End_{\mathcal{C}}(A)$, og axiomerne I og II

medfører specielt, at denne komposition er associativ med neutralt element. $\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(A)$ er altså et monoid (= semigruppe med neutralt element), og det ses, at $\mathrm{Aut}_{\mathcal{C}}(A)$ netop er gruppen af invertible elementer heri.

1.4. Eksempel. I kategorien (Sets) er objekterne vilkårlige mængder, morfierne er vilkårlige afbildninger, og sammensætningen er sædvanlig sammensætning. Bemærk, at den tomme mængde $\emptyset$ er et objekt i (Sets). Hvad er $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sets}}(\emptyset, Y)$ og $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sets}}(X, \emptyset)$?

1.5. Eksempel. I kategorien (Gr) er objekterne grupper, morfierne er homomorfier af grupper, og sammensætningen er den sædvanlige.

1.6. Beskriv tilsvarende kategorierne

(Ab) af kommutative grupper

(L-vect) af vektorrum over et givet legeme L

(Rings) af ringe

(R-alg) af algebraer over en given kommutativ ring R.

1.7. I kategorien (Top) er objekterne topologiske rum og morfierne er kontinuerte afbildninger. For mange formål er det tilstrækkeligt at betragte kategorien (Metr, cont) af metriske rum med kontinuerte afbildninger som morfier. Også kategorien (Metr, $\mathrm{dist}_{\leq}$) af metriske rum, med (svagt) afstandsformindskende afbildninger som morfier, har interesse.

1.8. I kategorien (Trip) er objekterne tripler (Q, q_1, φ) bestående af en mængde Q, et udvalgt element $q_1 \in Q$, og en afbildning $\varphi : Q \to Q$. Morfierne defineres på oplagt måde.

1.9. Eksempel. I kategorien (Top_0) er objekterne par (X, x_0) bestående af et topologisk rum X samt et udvalgt element $x_0 \in X$. Oplagte morfier. Tilsvarende kategorien (Metr_0, cont).

1.10. Er M et givet monoid, kan vi definere en kategori $\mathcal{C} = \mathrm{Cat}(M)$, således at $\mathcal{C}$ har ét objekt $*$, og således at $\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(*) = M$.

1.11. Er $T, \leq$ en mængde med en refleksiv, transitiv relation $\leq$, kan vi definere en kategori $\mathcal{C} = \mathrm{Cat}(T)$, således at objekterne i $\mathcal{C}$ er elementerne i T, og således at

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(s,t) \begin{cases} \text{har ét element, hvis } s \leq t. \\ \text{er tom ellers.} \end{cases}$$

Hvis relationen er $=$, får vi en <u>diskret kategori</u>, d.v.s. en kategori, hvori de eneste morfier er identiteterne.

1.12. I visse forbindelser er det hensigtsmæssigt at betragte kategorier, hvis objekter er visse afbildninger (eller, mere generelt; visse morfier i andre kategorier).

F. eks. kan vi for en given kategori $\mathcal{C}$ betragte kategorien $\mathcal{C}^{\cdot\to\cdot}$, hvori <u>objekterne</u> er morfier $A \xrightarrow{f} B$ i $\mathcal{C}$, hvori <u>morfierne</u> fra et objekt $A \xrightarrow{f} B$ til et objekt $A' \xrightarrow{f'} B'$ er par (α, β) bestående af morfier $\alpha : A \to A'$, $\beta : B \to B'$, således at vi har $f'\alpha = \beta f$.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\alpha} & A' \\ f\downarrow & & \downarrow f' \\ B & \xrightarrow{\beta} & B', \end{array}$$

og hvori <u>sammensætning</u> defineres på oplagt måde.

Er H en kommutativ semigruppe, og $S \subseteq H$ en ikke tom stabil delmængde, kan vi betragte kategorien $\mathcal{M}_{H,S}$, hvori <u>objekterne</u> er afbildninger $H \xrightarrow[\varphi]{} M$, hvor M er et monoid og $\varphi : H \to M$ er en homomorfi, således at elementerne $\varphi(s)$, $s \in S$, er invertible i M, hvori <u>morfierne</u> fra et objekt $H \xrightarrow{\varphi} M$ til et objekt $H \xrightarrow{\varphi'} M'$ er en homomorfi $f : M \to M'$ således at $f \circ \varphi = \varphi'$

$$\begin{array}{ccc} & H & \\ \varphi\swarrow & & \searrow\varphi' \\ M & \xrightarrow[f]{} & M' \end{array}$$

og hvori <u>sammensætning</u> defineres på oplagt måde.

1.13. Er $\mathcal{C}$ en given kategori, kan vi definere en ny kategori $\mathcal{C}^{op}$, kaldet <u>den modsatte kategori</u>, på følgende måde: i) Objekterne i $\mathcal{C}^{op}$ er de samme som objekterne i $\mathcal{C}$. ii) Morfierne i $\mathcal{C}^{op}$ fra A til B defineres ved

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{op}}(A,B) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B,A)$$

iii) Sammensætningen i $\mathcal{C}^{op}$ defineres ved at vi for $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{op}}(A,B)$, $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{op}}(B,C)$ sætter

$$g \underset{\mathcal{C}^{op}}{\circ} f = fg \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{op}}(A,C).$$

Axiomerne ses let at være opfyldte.

1.14. Ofte betragtes i en kategori $\mathcal{C}$ systemer bestående af visse objekter $\mathcal{O}$ fra $\mathcal{C}$, og visse morfier $\mathcal{M}$ mellem objekterne i $\mathcal{O}$. Et sådant system kaldes et <u>diagram</u> i $\mathcal{C}$. Eksempler på diagrammer er

① $A \xrightarrow{f} B$

②
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "h"'] & B \arrow[d, "g"] \\ & C \end{tikzcd}$$

③
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "a"'] & B \arrow[d, "b"] \\ A' \arrow[r, "f'"] & B' \end{tikzcd}$$

④
$$\begin{tikzcd} A \arrow[loop left, "1_A"] \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \arrow[loop right, "1_B"] \end{tikzcd}$$

⑤
$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "b"] \arrow[dr, "g"] & C \arrow[r, "c"] & D \arrow[d, "d"] \\ A \arrow[u, "a"] \arrow[r, "f"'] & F \arrow[r, "e"'] & E \end{tikzcd}$$

⑥
$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & A_{-2} \arrow[r, "d_{-2}"] \arrow[d, "a_{-2}"'] & A_{-1} \arrow[r, "d_{-1}"] \arrow[d, "a_{-1}"'] & A_0 \arrow[r, "d_0"] \arrow[d, "a_0"'] & A_1 \arrow[r, "d_1"] \arrow[d, "a_1"'] & \cdots \\ \arrow[r] & A'_{-2} \arrow[r, "d'_{-2}"] & A'_{-1} \arrow[r, "d'_{-1}"] & A'_0 \arrow[r, "d'_0"] & A'_1 \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

Et sådant diagram $(\mathcal{O}, \mathcal{M})$ i $\mathcal{C}$ kaldes <u>kommutativt</u>, hvis man for alle $A, B \in \mathcal{O}$ højst kan få en morfi fra A til B ved at sammensætte morfier fra $\mathcal{M}$. Diagrammerne ovenfor er således kommutative, når ① altid! ② $gf = h$ ③ $bf = f'a$ ④ f er isomorfi med g som invers ⑤ $ga = f$, $eg = dcb$ (som medfører, at $ef = ega = dcba$) ⑥ $a_{i+1} d_i = d_i' a_i$, $i \in \mathbb{Z}$.

2. Funktorer

2.1. BESKRIVELSE. En <u>funktor</u> $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ fra en kategori $\mathcal{C}$ til en kategori $\mathcal{D}$ knytter til hvert

$$\text{objekt } A \in \mathcal{C} \quad \text{et objekt } F(A) \in \mathcal{D}$$

og til hver

$$\text{morfi } A \xrightarrow{f} B \text{ i } \mathcal{C} \quad \text{en morfi } F(A) \xrightarrow{F(f)} F(B) \text{ i } \mathcal{D},$$

således at der for morfier $A \xrightarrow{f} B$, $B \xrightarrow{g} C$ i $\mathcal{C}$ gælder

$$F(gf) = F(g)F(f) : F(A) \to F(C),$$

og for objekter A i $\mathcal{C}$ gælder

$$F(1_A) = 1_{F(A)} : F(A) \to F(A).$$

2.2. Det følger let, at <u>en funktor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ afbilder isomorfi på isomorfi og kommutativt diagram på kommutativt diagram</u>.

2.3. DEFINITION. En funktor $F : \mathcal{C}^{op} \to \mathcal{D}$ fra den modsatte kategori af $\mathcal{C}$ til en kategori $\mathcal{D}$ kaldes også en <u>kontravariant funktor</u> $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$. Den knytter altså til hvert objekt $A \in \mathcal{C}^{op}$, d.v.s. til hvert

$$\text{objekt } A \in \mathcal{C} \quad \text{et objekt } F(A) \in \mathcal{D},$$

og til hver morfi $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{op}}(A, B)$, d.v.s. til hver

$$\text{morfi } B \xrightarrow{f} A \text{ i } \mathcal{C} \quad \text{en morfi } F(B) \xleftarrow{F(f)} F(A) \text{ i } \mathcal{D},$$

således at vi for morfier $B \xrightarrow{f} A$, $C \xrightarrow{g} B$ i $\mathcal{C}$ har

$$F(fg) = F(g)F(f) : F(A) \to F(C)$$

og for objekter A i $\mathcal{C}$ har

$$F(1_A) = 1_{F(A)} : F(A) \to F(A).$$

En kontravariant funktor $F: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ "vender" altså pilene. En funktor $F: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ som beskrevet i 2.1 kaldes også en <u>kovariant funktor</u>

2.4. Funktorer spiller en vigtig rolle. Dels viser det sig, at en lang række fænomener mest naturligt beskrives ved hjælp af funktorer, dels kan man ved studiet af en given kategori $\mathcal{C}$ forsøge at finde funktorer $F: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ind i simplere (eller mere velkendte) kategorier $\mathcal{D}$, og herved løse problemer i $\mathcal{C}$.

2.5. Eksempel. Funktoren $(\ )^*: (L\text{-vect})^{op} \to (L\text{-vect})$ knytter til hvert vektorrum V over L det duale vektorrum V^*, og til hver lineær afbildning $f: V \to W$ den duale afbildning $f^*: W^* \to V^*$.

2.6. Eksempel. Lad os et øjeblik med (Diff_0) betegne følgende kategori: <u>Objekterne</u> er par (U,a), hvor U er en åben mængde i et talrum $\mathbb{R}^k$, og hvor $a \in U$ er et udvalgt element. <u>Morfierne</u> fra (U,a) til (V,b) er C^∞-afbildninger $f: U \to V$, således at $f(a) = b$. <u>Sammensætningen</u> er den sædvanlige.

En funktor

$$T: (\mathrm{Diff}_0) \to (\mathbb{R}\text{-vekt})$$

defineres ved at vi for $(U,a) \in (\mathrm{Diff}_0)$, hvor $U \subseteq \mathbb{R}^k$ sætter

$$T(U,a) = \mathbb{R}^k$$

og for en morfi $f: (U,a) \to (V,b)$, hvor $V \subseteq \mathbb{R}^p$ sætter

$$T(f) = df_a : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^p.$$

2.7. Eksempler. En lang række tidligere omtalte konstruktioner kan med fordel opfattes som funktorer.
Således har vi funktorer

① $H \mapsto \tilde{H}$, : (comm. semigr) $\to$ (Ab), der til hver kommutativ semigruppe H knytter brøkgruppen $\tilde{H}$.

② $R \mapsto \tilde{R}$: (Int. dom) $\to$ (fields), der til hvert kommutativt integritetsområde R knytter brøklegemet $\tilde{R}$ (Hvad er morfierne i kategorien (Int. dom)?).

③ $G \mapsto \hat{G}$: (ord. gr) $\to$ (compl. ord. gr), der til hver kommutativ ordnet gruppe G knytter kompletionen $\hat{G}$ (Hvad er morfierne i kategorien (Ord. gr)?).

④ $\Lambda \mapsto \Lambda[X]$: (Rings) $\to$ (Rings), der til hver ring Λ knytter polynomiumsringen $\Lambda[X]$.

⑤ $\Lambda \longmapsto \Lambda^*$: (Rings) $\to$ (Gr), der til hver ring Λ knytter gruppen Λ^* af invertible elementer i Λ.

⑥ $M \longmapsto \mathbb{Z}^{(M)}$: (Sets) $\to$ (Ab), der til hver mængde M knytter den fri kommutative gruppe frembragt af M.

⑦ $(M,\sim) \longmapsto M/\sim$: (Equiv) $\to$ (Sets), der til hver mængde M med en ækvivalensrelation $\sim$ knytter kvotienten $M/\sim$.

2.8. Eksempel. Er M et monoid, kan vi betragte kategorien $\mathrm{Cat}(M)$, jfr. 1.10. Det ses, at en funktor $F: \mathrm{Cat}(M) \to \mathcal{D}$ er det samme som et objekt $D \in \mathcal{D}$ forsynet med en monoidhomomorfi $F: M \to \mathrm{End}_{\mathcal{D}}(D)$.
Er M' endnu et monoid, ser vi, at en funktor $F: \mathrm{Cat}(M) \to \mathrm{Cat}(M')$ er det samme som en monoidhomomorfi : $F: M \to M'$.

2.9. Er T en mængde med en refleksiv, transitiv relation $\leqslant$, kan vi betragte kategorien $Cat(T)$, jfr. 1.11. Vi ser, at en funktor $F: Cat(T) \to \mathcal{D}$ er det samme som en tilordning, der til hvert $t \in T$ knytter

$$F_t \in \mathcal{D}$$

og for hvert $s \leqslant t$ knytter en morfi

$$F_s \xrightarrow{f_{st}} F_t \quad \text{i } \mathcal{D}$$

således at $f_{ss} = 1_{F_s}$, og således at vi for $s \leqslant t \leqslant u$ har $f_{su} = f_{tu} f_{st}$. Vi har altså et kommutativt diagram

$$\begin{tikzcd} F_s \arrow[r, "f_{st}"] \arrow[dr, "f_{su}"'] & F_t \arrow[d, "f_{tu}"] \\ & F_u \end{tikzcd} .$$

Er T' endnu en mængde med en refleksiv, transitiv relation $\leqslant'$, ser vi, at en funktor $F: Cat(T) \to Cat(T')$ er det samme som en ordenstro afbildning $F: T \to T'$.

Hvis relationen i T er $=$ (således at $Cat(T)$ er en diskret kategori, jfr. 1.11), ser vi, at en funktor $F: Cat(T) \to \mathcal{D}$ blot er en afbildning, der til hvert element $t \in T$ knytter et objekt $F_t \in \mathcal{D}$.

Er derimod $\mathcal{D}$ en diskret kategori og $\mathcal{C}$ en vilkårlig kategori, ser vi, at en funktor $F: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, er en "afbildning", der til hvert objekt $A \in \mathcal{C}$ knytter et objekt $F(A) \in \mathcal{D}$ på en sådan måde, at vi har $F(A) = F(B)$, hvis der findes en morfi $: A \xrightarrow{f} B$ i $\mathcal{C}$.

2.10. Eksempel. Lad X være et topologisk (eller et metrisk) rum. Med $Open(X)$ betegner vi kategorien hørende til mængden af åbne delmængder af X, med inklusionen $\subseteq$ som relation (jfr. 1.11 og 2.9). En kontravariant funktor $F : \mathrm{Open}(X) \to (\mathrm{Sets})$ kaldes et **præ-knippe af mængder på X**. Et sådant er altså givet ved, at der til hver åben delmængde $U \subseteq X$ er knyttet en mængde $F(U)$, og til åbne delmængder $V \subseteq U$ er knyttet en afbildning

$$f_{VU} : F(U) \longrightarrow F(V)$$

[kaldet *restriktionen*], således at $f_{VW}\, f_{UV} = f_{UW}$ når $W \subseteq V \subseteq U$, og $f_{U,U} = 1_{F(U)}$.

Tilsvarende defineres præknipper af grupper (resp. abelske grupper, resp. ringe) som kontravariante funktorer: $\mathrm{Open}(X) \to (\mathrm{Gr})$ (resp.: $\mathrm{Open}(X) \to (\mathrm{Ab})$, resp.: $\mathrm{Open}(X) \to (\mathrm{Rings})$) [Eks. præ-knippet $\mathscr{C}^\infty_{\mathbb{R}^k}$ af C^∞-funktioner på $\mathbb{R}^k$].

2.11. Enhver kategori $\mathscr{C}$ er "født" med en række vigtige funktorer: Til hvert objekt $A \in \mathscr{C}$ svarer en funktor: $\mathscr{C} \to (\mathrm{Sets})$, som til et

objekt $X \in \mathscr{C}$ knytter mængden $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,X)$

og til en

morfi $X \xrightarrow{f} Y$ i $\mathscr{C}$ knytter afbildningen

$$f_* : \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,X) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,Y), \quad \varphi \mapsto f_*(\varphi) = f\varphi$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "f_*(\varphi)=f\varphi"'] & X \arrow[d, "f"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

Det er let at se, at der herved er defineret en funktor. Den betegnes $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,-)$.

Tilsvarende kan vi definere en kontravariant funktor: $\mathscr{C} \to (\mathrm{Sets})$ ved til et objekt $X \in \mathscr{C}$ at knytte mængden $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X,A)$, og til en morfi $X \xrightarrow{f} Y$ i $\mathscr{C}$ at knytte afbildningen

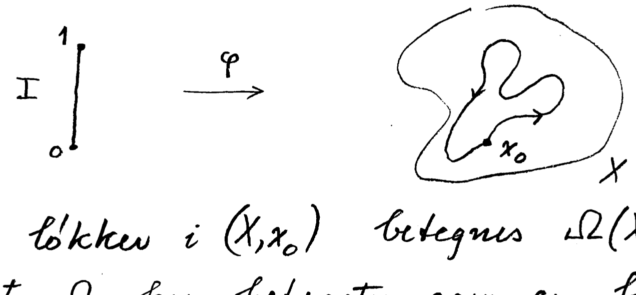
$$\begin{array}{ccc} f^*: \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(Y,A) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X,A) \\ \psi & & \psi \\ \psi & \longmapsto & \psi f \end{array}$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, "\psi f"] & \\ Y \arrow[r, "\psi"'] & A \end{tikzcd}$$

Denne funktor betegnes $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(-,A)$. Vi siger også, at $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(-,-)$ er en funktor $\mathscr{C} \times \mathscr{C} \to (\mathrm{Sets})$, kontravariant i første variabel, kovariant i anden variabel.

2.12. Som eksempel på hvorledes funktorer kan anvendes til at studere en given katigori, kan vi betragte kategorien (Top_0) af topologiske rum med udvalgt element. (Eller kategorien af metriske rum med udvalgt element (og kontinuerte afbildninger som morfier)). Idet $I = [0,1]$ betegner enhedsintervallet, defineres en <u>løkke</u> i (X, x_0) som en kontinuert afbildning

$$\varphi: I \to X, \text{ således at } \varphi(0) = \varphi(1) = x_0 .$$



Mængden af løkker i (X,x_0) betegnes $\Omega(X,x_0)$. Det er let at se, at Ω kan betragtes som en funktor

$$\Omega: (\mathrm{Top}_0) \to (\mathrm{Sets}).$$

To løkker φ', φ'' i $\Omega(X,x_0)$ kaldes <u>homotope</u>, og vi skriver $\varphi' \simeq \varphi''$, hvis der findes en kontinuert familie af løkker $\varphi_t \in \Omega(X,x_0)$, $0 \leq t \leq 1$, således at $\varphi_0 = \varphi'$, $\varphi_1 = \varphi''$. [En familie φ_t, $0 \leq t \leq 1$ af løkker i (X,x_0) kaldes kontinuert, hvis den ved $(s,t) \mapsto \varphi_t(s)$ definerede afbildning: $I \times I \to X$ er kontinuert]. Videre kan vi definere en komposition $*$ i $\Omega(X,x_0)$, idet vi for løkker φ, ψ definerer $\varphi * \psi$ ved

$$\varphi * \psi(t) = \begin{cases} \varphi(2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \psi(2t-1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Det er ikke svært at vise, at $\simeq$ er en ækvivalensrelation i $\Omega(X,x_0)$, som harmonerer med $*$, og at kvotienten med den inducerede komposition er en gruppe. Denne gruppe kaldes <u>fundamentalgruppen</u> for (X,x_0), og den betegnes $\pi(X,x_0)$. Vi kan opfatte π som en funktor

$$\pi : (Top_0) \to (Gr).$$

Lad D være cirkelskiven $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$, og lad S være periferien $S = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. For D finder vi let

$$\pi(D,1) = (0) \quad (= \text{gruppen med ét element})$$

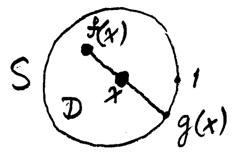
idet vi for en løkke φ i $(D,1)$ kan definere en homotopi med den konstante løkke ved

$$(s,t) \longmapsto 1 + t(\varphi(s) - 1).$$

For S kan man vise, at

$\pi(S,1) \cong \mathbb{Z}$ (= cyklisk gruppe frembragt af homotopiklassen der indeholder løkken $t \mapsto e^{2\pi i t}$). [Omløbstal]. Som anvendelse vises Brouwers fixpunktssætning. <u>Enhver kontinuert afbildning $f: D \to D$ har et fixpunkt</u>. Bevis. Antag, at der findes en kontinuert afbildning $f: D \to D$ uden fixpunkter. Vi kunne da definere en kontinuert af-

bildning $g: D \to S$ ved at
$g(x)$ = skæringspunktet mellem S og halvlinien fra $f(x)$ gennem x.



Vi har $g(x) = x$ for $x \in S$, altså et kommutativt diagram i (Top_0):

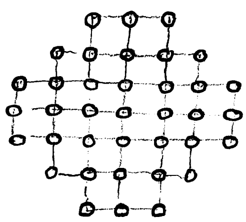
$$\begin{tikzcd} (S,1) \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "1_S"'] & (D,1) \arrow[d, "g"] \\ & (S,1) \end{tikzcd}$$

hvor i er inklusionsafbildningen, og hvor 1_S er identiteten. Anvender vi funktoren $\pi : (Top_0) \to (Gr)$ får vi et kommutativt diagram i (Gr):

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[dr, "1_{\mathbb{Z}}"'] & (0) \arrow[d] \\ & \mathbb{Z} \end{tikzcd}$$

men dette er en modstrid ▨

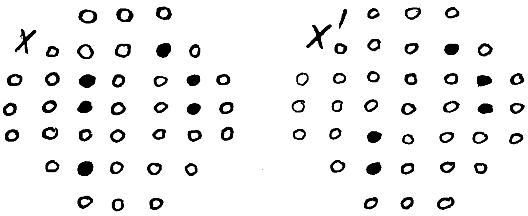
2.13. Lad der være givet en endelig delmængde $B \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. [Vi tænker på B som et brædt, hvori der er boret huller svarende til elementerne i B. Eksempel



]

Hertil definerer vi en kategori (Sol_B), kaldet solitairespillet på B, på følgende måde.

Objekterne i (Sol_B), kaldet stillinger, er de endelige delmængder af B [Vi tænker på stillingen X ved at sætte pinde i de huller på brædtet, der svarer til elementer i X. Eksempler



]

Ved et solitairetræk fra en stilling X til en stilling X' forstås et sæt $t=(b_1, b_2, b_3)$ af tre på hinanden følgende elementer i B, således at

$$X \setminus X' = \{b_1, b_2\} \qquad X' \setminus X = \{b_3\}.$$

(Elementer $b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ kaldes på hinanden følgende, hvis der for den ene af de to projektioner $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ gælder, at b_1, b_2, b_3 har samme koordinat, og for den anden, at koordinaterne er tre på hinanden følgende (aftagende eller voksende) hele tal.) For givne stillinger X og X' er der højst et solitairetræk t fra X til X'. Er dette tilfældet skriver vi $X \xrightarrow{t} X'$. [Solitairetrækket fra X til X' tænkes udført ved at vi lader pinden i hul b_1 springe over pinden i hul b_2 ned i det tomme hul b_3, og dernæst fjerner pinden i hul b_2. I eksemplet er vist et solitairetræk fra X til X'].

Morfierne i (Sol_B) fra X til Y defineres som endelige følger $(t_1, \dots, t_r)$, $r \geq 0$ af solitairetræk $X \xrightarrow{t_1} Y_1$, $Y_1 \xrightarrow{t_2} Y_2$, $\dots$, $Y_{r-1} \xrightarrow{t_r} Y_r$.

Og sammensætningen af $(t_1, \dots, t_r) : X \to Y$ og $(s_1, \dots, s_p) : Y \to Z$ defineres ved

$$(t_1, \dots, t_r)(s_1, \dots, s_p) = (t_1, \dots, t_r, s_1, \dots, s_p).$$

Idet vi med $(\mathbb{Z}/2)^3$ betegner den diskrete kategori, hvis objekter er de 8 elementer i $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$ defineres en funktor

$$F : (Sol_B) \to (\mathbb{Z}/2)^3$$

på følgende måde: For $i = 1,2,3$ betegner vi for en stilling X med X_i antallet af elementer $x \in X$, hvis koordinater (x', x'') opfylder $x' + x'' \equiv i$ (modulo 3). Vi sætter

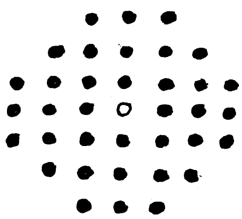
$$F(X) = \left(X_2 - X_3 \, , X_3 - X_1 \, , X_1 - X_2 \right) \in (\mathbb{Z}/2)^3.$$

hvor $\bigcirc$ er den kanoniske homomorfi: $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2$.

At der herved defineres en funktor : $(Sol_B) \to (\mathbb{Z}/2)^3$, altså at der gælder $F(X) = F(Y)$, hvis der findes en morfi $X \to Y$, indses let ved at betragte et solitairetræk : $X \to X'$.

[Eksempel. For en stilling med kun ét element finder vi $F(Y) = (0,1,1)$ eller $(1,0,1)$ eller $(1;1,0)$. For stillingen X angivet ved

X



har vi $F(X) = (0,0,0)$. Der findes altså ingen morfier fra denne stilling til en stilling med kun ét element!].

2.14. I en lang række af de nævnte eksempler på kategorier har objekterne været mængder forsynet med en eller anden form for struktur (F.eks. et udvalgt element, en (eller flere) indre komposition(er), andre former for kompositioner (f.eks. en metrik), visse udvalgte delmængder ...), morfierne har været afbildninger, der har bevaret denne struktur, og sammensætningen har været sædvanlig sammensætning af afbildninger.

Fra sådanne kategorier kan vi definere "glemsomme" funktorer, der til hvert objekt glemmer strukturen (eller blot noget af strukturen).

F. eks. har vi glemsomme funktorer:

$(\mathrm{Sets}_0) \to (\mathrm{Sets})$	"glem det udvalgte element"
$(\mathrm{Gr}) \to (\mathrm{Sets})$	"glem kompositionen"
$(\mathrm{Top}) \to (\mathrm{Sets})$	"glem topologien"
$(\mathrm{Trip}) \to (\mathrm{Sets}_0)$	"glem endomorfien"
$(\mathrm{Rings}) \to (\mathrm{Ab})$	"glem multiplikationen"
$(\mathrm{Rings}) \to (\mathrm{Monoids})$	"glem additionen"
$(\mathrm{Rings}) \to (\mathrm{Sets}_0)$	"glem multiplikation og addition, men husk ét-elementet"
$(\mathrm{Rings}) \to (\mathrm{Sets})$	"glem alt".

2.15. BESKRIVELSE. En delkategori $\mathcal{D}$ af en kategori $\mathcal{C}$ opfylder, at objekterne i $\mathcal{D}$ er objekter i $\mathcal{C}$, at vi for morfierne i $\mathcal{D}$ mellem objekter A, B i $\mathcal{D}$ har

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(A,B) \subseteq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B),$$

at sammensætningen i $\mathcal{D}$ af morfier $A \xrightarrow{f} B$ og $B \xrightarrow{g} C$ i $\mathcal{D}$ er den samme som sammensætningen i $\mathcal{C}$, samt at identiteterne i $\mathcal{D}$ er identiteter i $\mathcal{C}$.

Vi skriver i så fald

$$\mathcal{D} \subseteq \mathcal{C},$$

og vi kan betragte inklusionsfunkoren: $\mathcal{D} \hookrightarrow \mathcal{C}$.

Hvis vi for alle objekter A, B i $\mathcal{D}$ har

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(A,B) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B),$$

kaldes $\mathcal{D}$ en fuld delkategori af $\mathcal{C}$. En sådan er helt bestemt ved en beskrivelse af hvilke objekter fra $\mathcal{C}$, som tilhører $\mathcal{D}$.

2.16. Eksempler. I kategorien $\mathcal{K}$ af mængder med en komposition har vi delkategorierne

$$\mathcal{K} \supseteq (\text{Semigr}) \supseteq (\text{Monoids}) \supseteq (\text{Gr}) \supseteq (\text{Ab}).$$

Bemærk, at (Monoids) ikke er en fuld delkategori.

3. Kategoriske definitioner.

3.1. En definition vedrørende et system af objekter og morfier i en kategori $\mathcal{C}$ kaldes en <u>kategorisk</u> (eller universel) <u>definition</u>, hvis der i definitionen kun indgår kategoriens grundbestanddele (objekter, morfier, sammensætning). En således defineret egenskab kaldes en universel egenskab.

3.2. DEFINITION. Et objekt $\emptyset$ i kategorien $\mathcal{C}$ kaldes et <u>initialobjekt</u>, hvis der til ethvert objekt $Y \in \mathcal{C}$ findes netop én morfi

$$\emptyset \to Y.$$

Et objekt $*$ i $\mathcal{C}$ kaldes et <u>finalobjekt</u>, hvis der til ethvert objekt $X \in \mathcal{C}$ findes netop én morfi

$$X \to *.$$

3.3. SÆTNING. Hvis $\emptyset$ og $\tilde{\emptyset}$ er initialobjekter i en kategori $\mathcal{C}$, så findes netop én morfi : $\emptyset \to \tilde{\emptyset}$, og denne morfi er en isomorfi.

Bevis. Da $\emptyset$ er et initialobjekt i $\mathcal{C}$ findes netop en morfi: $\emptyset \xrightarrow{\varphi} \tilde{\emptyset}$. Vi skal vise, at φ er en isomorfi. Da $\tilde{\emptyset}$ er et initialobjekt, findes en morfi $\tilde{\varphi} : \tilde{\emptyset} \to \emptyset$. Nu er $\tilde{\varphi}\varphi$ og $1_\emptyset$ morfier : $\emptyset \to \emptyset$. Da $\emptyset$ er initialobjekt, slutter vi udfra entydigheden af morfier fra $\emptyset$, at $\tilde{\varphi}\varphi = 1_\emptyset$. Tilsvarende får vi $\varphi\tilde{\varphi} = 1_{\tilde{\emptyset}}$, men dette betyder, at φ er en isomorfi (med $\varphi^{-1} = \tilde{\varphi}$) ▨

Hvis en kategori $\mathcal{C}$ har initialobjekter, tænkes ofte udvalgt et bestemt, kaldet <u>initialobjektet</u>.

Tilsvarende vises, at to finalobjekter i en kategori er kanonisk isomorfe.

3.4. I kategorien (Sets) er den tomme mængde $\emptyset$ initialobjekt, og enhver mængde med netop ét element er finalobjekt.

I kategorien (trip) (jfr. 1.8). gælder, at $(\mathbb{N}, 1, \varepsilon)$ er initialobjekt. Dette er som bekendt den universelle egenskab ved de naturlige tal. Kategorien (trip) har trivielt et final objekt.

Følgende kategorier har både initialobjekt og finalobjekt:

(Sets), (Gr), (Ab), (L-vect), (Rings), (R-alg), (Top), (Metr, cont), (Metr, $\mathrm{dist}_{\leq}$).

Det samme gælder for følgende kategorier "med udvalgt element"

(Sets_0), (Semigr_0), (Gr_0), (Ab_0), ($L\text{-}\mathrm{vect}_0$), (Rings_0) ($R\text{-}\mathrm{alg}_0$), (Top_0), (Metr_0, cont), (Metr_0, $\mathrm{dist}_{\leq}$).

Præcisér selv disse kategorier, og deres initial- og finalobjekt.

Også kategorien (Arch_0) af arkimedisk ordnede kommutative grupper med et udvalgt positivt element har et initial- og et finalobjekt.

Initial- og finalobjekt i en kategori Cat(T) hørende til en partielt ordnet mængde $T, \leq$ er et velkendt begreb.

Kategorien $\mathcal{M}_{H,S}$ (jfr. 1.12) har initialobjektet $H \xrightarrow{\square} H[S^{-1}]$ (og finalobjektet $H \to \{1\}$). Definér for en multiplikativ delmængde S i en kommutativring R en kategori $\mathcal{R}_{R,S}$, hvori

$$R \xrightarrow{\square} R[S^{-1}]$$

er initialobjekt.

Og definér for en kommutativ ordnet gruppe G en kategori $\mathcal{K}_G$, hvori

$$G \xrightarrow{\square} \hat{G}$$

er initialobjekt.

Et objekt $*$ i kategorien $\mathcal{C}$ kan også opfattes som objekt i den duale kategori $\mathcal{C}^{op}$. Vi ser, at $*$ er finalobjekt i $\mathcal{C}$, hvis og kun hvis $*$ er initialobjekt i $\mathcal{C}^{op}$.

3.5. DEFINITION. Lad A_1 og A_2 være objekter i en kategori $\mathcal{C}$. Ved et **produkt** af A_1 og A_2 forstås et diagram i $\mathcal{C}$:

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] & \\ A_1 & & A_2 \end{tikzcd}$$

med følgende egenskab: For hvert objekt $X \in \mathcal{C}$ og hvert par af morfier $f_1 : X \to A_1$, $f_2 : X \to A_2$ findes netop én morfi $f : X \to P$, således at $p_1 f = f_1$ og $p_2 f = f_2$. Definitionen udsiger altså, at der for hvert andet diagram

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "f_1"'] \arrow[dr, "f_2"] & \\ A_1 & & A_2 \end{tikzcd}$$

findes netop én morfi $f : X \to P$, så at diagrammet

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[ddl, "f_1"'] \arrow[d, dashed, "f"] \arrow[ddr, "f_2"] & \\ & P \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] & \\ A_1 & & A_2 \end{tikzcd}$$

er kommutativt.

3.6. SÆTNING. *To produkter af A_1 og A_2 er kanonisk isomorfe i følgende forstand:* Er

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & P \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] & \\ A_1 & & A_2 \end{tikzcd} \quad \text{og} \quad \begin{tikzcd}[column sep=small] & \overline{P} \arrow[dl, "\overline{p}_1"'] \arrow[dr, "\overline{p}_2"] & \\ A_1 & & A_2 \end{tikzcd}$$

produkter, så findes netop en morfi $\varphi : \overline{P} \to P$, således at $p_1 \circ \varphi = \overline{p}_1$, $p_2 \circ \varphi = \overline{p}_2$, og denne morfi er en isomorfi $\square$

3.7. For givne objekter A_1 og A_2 i en kategori $\mathcal{C}$ findes ikke nødvendigvis et produkt. Hvis produkter findes, tænkes ofte udvalgt et bestemt. Det betegnes

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & A_1 \sqcap A_2 \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] & \\ A_1 & & A_2 , \end{tikzcd}$$

og kaldes *produktet* af A_1 og A_2; morfierne $p_1 : A_1 \sqcap A_2 \to A_1$ og $p_2 : A_1 \sqcap A_2 \to A_2$ kaldes *projektionerne* (Ofte siger vi, at objektet $A_1 \sqcap A_2$ er produktet af A_1 og A_2, idet projektionerne underforstås).

3.8. Eksempler. For mængder A_1 og A_2 i kategorien (Sets), er det sædvanlige kartesiske produkt $A_1 \times A_2$ med projektionerne

$$p_1 : (a_1, a_2) \longmapsto a_1$$

og

$$p_2 : (a_1, a_2) \longmapsto a_2$$

et produkt i kategorien (Sets). Den universelle egenskab udsiger blot, at afbildninger $f : X \to A_1 \times A_2$ er af formen

$$x \longmapsto (f_1(x), f_2(x))$$

med (entydigt bestemte) afbildninger $f_1 : X \to A_1$, $f_2 : X \to A_2$.

Objekter i hver af følgende kategorier:

(Sets$_0$), (Gr), (L-vect), (Rings), (R-alg), (Top)
(Met, dist$_{\leq}$), (Monoids), (Semigr), (Ab)

er mængder med en vis struktur. For objekter A_1 og A_2 i en af disse kategorier gælder, at produktmængden $A_1 \times A_2$ kan organiseres med en sådan struktur, at den bliver et produkt i den pågældende kategori. Hvad bliver disse "produktstrukturer"?

3.9. Til hver kategorisk definition hører en **dual definition**, der løst sagt fremkommer ved at "vende alle pilene". Til initialobjekt svarer således finalobjekt. Dualt svarer til produkt den såkaldte **sum** af objekter A_1 og A_2 i kategorien $\mathcal{C}$: Vi skal her betragte diagrammer

$$\begin{tikzcd} & S & \\ A_1 \arrow[ur, "i_1"] & & A_2 \arrow[ul, "i_2"'] \end{tikzcd},$$

og den universelle egenskab er: For hvert andet diagram

$$\begin{tikzcd} & Y & \\ A_1 \arrow[ur, "g_1"] & & A_2 \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

findes netop en morfi $g : S \to Y$, så at diagrammet

$$\begin{tikzcd} & Y & \\ & S \arrow[u, dashed, "g"] & \\ A_1 \arrow[uur, "g_1"] \arrow[ur, "i_1"'] & & A_2 \arrow[uul, "g_2"'] \arrow[ul, "i_2"] \end{tikzcd}$$

er kommutativt.

Hvis der findes summer af A_1 og A_2, da er de parvis isomorfe (cfr. sætning 3.6). Ofte tænkes udvalgt en bestemt, kaldet <u>summen</u> af A_1 og A_2 og betegnet

$$\begin{tikzcd} & A_1 \sqcup A_2 & \\ A_1 \arrow[ur, "i_1"] & & A_2 \arrow[ul, "i_2"'] \end{tikzcd}.$$

Morfierne i_1 og i_2 er <u>injektionerne</u>.

3.10. Eksempler. For mængder A_1 og A_2 i kategorien (Sets) er den sædvanlige <u>disjunkte forening</u> $S = A_1 \vee A_2$, med inklusionsafbildningerne

$$i_1 : A_1 \hookrightarrow S$$
$$i_2 : A_2 \hookrightarrow S \qquad \text{som injektionerne}$$

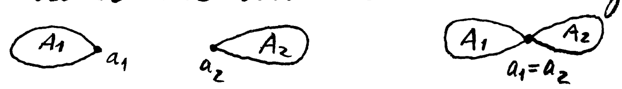
en sum i kategorien (Sets). Den universelle egenskab udsiger, at en afbildning $g : A_1 \vee A_2 \to Y$ er helt bestemt ved sine restriktioner $g_1 = g/A_1 : A_1 \to Y$ og $g_2 = g/A_2 : A_2 \to Y$ (da $A_1 \cup A_2 = S$) og at disse restriktioner kan foreskrives vilkårligt (da $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ i S).

For objekter A_1 og A_2 i kategorien (Ab) (eller i (L-vect)) gælder, at produktet $A_1 \times A_2$ med afbildningerne

$$i_1 : a_1 \longmapsto (a_1, 0)$$
$$i_2 : a_2 \longmapsto (0, a_2) \qquad \text{som injektionerne}$$

er en <u>sum</u>. Ofte skrives $A_1 \oplus A_2$ for $A_1 \times A_2$.

For objekter (A_1, a_1) (A_2, a_2) i kategorien (Sets_0) defineres en sum ved i den disjunkte forening $A_1 \vee A_2$ at identificere elementet a_1 med a_2 og betragte dette element som udvalgt.



Denne sum betegnes $(A_1,a_1) \vee (A_2,a_2)$.

Også i kategorien (Top) findes summer, idet vi for objekter $A_1, A_2 \in$ (Top) kan definere en topologi på <u>mængden</u> $A_1 \vee A_2$; således at det derved fremkomne topologiske rum bliver en sum $A_1 \sqcup A_2$ i kategorien (Top). Tilsvarende med kategorien (Top_0).

For objekter $(A_1, dist_1)$ og $(A_2, dist_2)$ i kategorien $(Metr, dist_\leq)$ findes i almindelighed <u>ikke</u> en sum (betragt f.eks. tilfældet, hvor A_1 og A_2 kun indeholder ét element). [Men summer findes "næsten": Tillader vi afstandsfunktioner, der kan antage værdien ∞, så kan vi definere en afstandsfunktion i <u>mængden</u> $A_1 \vee A_2$, således at det fremkomne "metriske" rum bliver en sum i denne større kategori] Derimod findes der altid summer i kategorien $(Metr_0, dist_\leq)$.

Man kan vise, at der for objekter A_1, A_2 i kategorien (Gr) findes en sum. Den betegnes $A_1 * A_2$.

Ligeledes findes der for objekter A_1, A_2 i kategorien (Comm. R-alg) af kommutative R-algebraer en sum. Den betegnes $A_1 \otimes_R A_2$. Vi skal ikke her komme ind på de to konstruktioner, der ikke er trivielle.

3.11. En funktor $F: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ afbilder i diagram

$$\# \qquad \begin{tikzcd} & P \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ A_1 & & A_2 \end{tikzcd} \qquad i\ \mathcal{C}$$

på et diagram

$$F(\#) \qquad \begin{tikzcd} & F(P) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ F(A_1) & & F(A_2) \end{tikzcd} \qquad i\ \mathcal{D}.$$

DEFINITION. Funktoren $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ siges at *kommutere med produkt* (eller at *respektere produktet*), hvis vi, når $\#$ er et produkt i $\mathcal{C}$ af A_1 og A_2, kan slutte, at $F(\#)$ er et produkt i $\mathcal{D}$ af $F(A_1)$ og $F(A_2)$.

Hvis produkter eksisterer i $\mathcal{C}$ og $\mathcal{D}$ vil en funktor F afbilde

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & A_1 \sqcap A_2 \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ A_1 & & A_2 \end{tikzcd} \quad i\ \mathcal{C} \quad på \quad \begin{tikzcd}[column sep=small] & F(A_1 \sqcap A_2) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ F(A_1) & & F(A_2) \end{tikzcd} \quad i\ \mathcal{D}.$$

Herfra fås en morfi : $F(A_1 \sqcap A_2) \longrightarrow F(A_1) \sqcap F(A_2)$, og vi ser, at F kommuterer med produkt, hvis og kun hvis denne morfi er en isomorfi for alle $A_1, A_2 \in \mathcal{C}$.

Tilsvarende defineres funktorer, der *respekterer summen*.

En kontravariant funktor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ vender pilene og afbilder altså

$$\# \quad \begin{tikzcd}[column sep=small] & P \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ A_1 & & A_2 \end{tikzcd} \quad i\ \mathcal{C} \quad på \quad F(\#) \quad \begin{tikzcd}[column sep=small] & F(P) & \\ F(A_1) \arrow[ur] & & F(A_2) \arrow[ul] \end{tikzcd}.$$

En sådan funktor F siges at *respektere produktet*, hvis vi, når $\#$ er et produkt af A_1 og A_2 i $\mathcal{C}$, kan slutte, at $F(\#)$ er en sum af $F(A_1)$ og $F(A_2)$ i $\mathcal{D}$. [Tilsvarende definition med summen].

3.12. Eksempler. Den kontravariante funktor $V \mapsto V^*$ af $(L\text{-vect}) \to (L\text{-vect})$ respekterer både sum og produkt.

Funktoren $T : (\mathcal{D}iff_0) \to (\mathbb{R}\text{-vect})$ beskrevet i eksempel 2.6 respekterer produkt.

Funktoren $H \mapsto \tilde{H}$: (Comm. semigr) $\to$ (Ab) fra eksempel 2.7 ① respekterer produkt. (øvelse!).

Funktoren $\Lambda \mapsto \Lambda[X]$: (Rings) $\to$ (Rings) fra eksempel 2.7 ④ respekterer produktet.

Funktoren : $\Lambda \mapsto \Lambda^*$: (Rings) $\to$ (Gr) fra eksempel 2.7 ⑤ respekterer produktet.

Funktoren : $M \mapsto \mathbb{Z}^{(M)}$: (Sets) $\to$ (Ab) fra eksempel 2.7 ⑥ respekterer summen (men ikke produktet).

For hvert objekt A i en kategori $\mathcal{C}$ gælder, at funktoren $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,-) : \mathcal{C} \to (\mathrm{Sets})$ respekterer produktet. (At dette gælder for hvert objekt $A \in \mathcal{C}$ <u>er simpelthen definitionen</u> af produkt i $\mathcal{C}$!).

Tilsvarende gælder for hvert objekt A i $\mathcal{C}$, at den kontravariante funktor

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,A) : \mathcal{C} \to (\mathrm{Sets})$$

respekterer summen (dette <u>er</u> definitionen af sum i $\mathcal{C}$).

Funktorerne $\Omega : (\mathrm{Top}_0) \to (\mathrm{Sets})$ og $\pi : (\mathrm{Top}_0) \to (\mathrm{Gr})$ respekterer produkt.

De glemsomme funktorer : $(\mathrm{Sets}_0) \to (\mathrm{Sets})$, $(\mathrm{Gr}) \to (\mathrm{Sets})$, $(\mathrm{Ab}) \to (\mathrm{Sets})$, $(\mathrm{Top}) \to (\mathrm{Sets})$, $(\mathrm{Rings}) \to (\mathrm{Sets})$, jfr. 2.14, vil alle respektere produktet (jfr. eksempel 3.8). De glemsomme funktorer respekterer i almindelighed ikke summen.

[Vis, at de nævnte glemsomme funktorer alle har formen $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,-)$ med et passende objekt A].