Bedes gennemlæst
venlig hilsen H.R.

§ 8. Differentiable mangfoldigheder.

I de foregående afsnit har vi udelukkende studeret "konkrete" differentialgeometriske objekter, d.v.s. kurver og flader i planen eller i rummet. Ligesom i mange andre matematiske teorier kan man imidlertid også i differentialgeometrien med fordel studere mere "abstrakte" objekter. I denne paragraf skal vi definere begrebet differentiabel mangfoldighed, som er den grundlæggende begrebsdannelse i den generelle differentialgeometri.

Af hensyn til det følgende bliver det nødvendigt at forudskikke nogle (tildels velkendte) bemærkninger om reelle funktioner i talrummet R^n. Lad $X \subseteq R^n$ være en åben, ikke tom delmængde og lad $(x^1,\dots,x^n)$ betegne koordinaterne i R^n. En reel funktion $f: X \to R$ siges at være af klasse C^∞ på X, eller man siger, at f er en C^∞-funktion på X, hvis f er kontinuert i ethvert punkt af X og hvis samtlige partielle afledede

$$\partial^{i_1+\dots+i_n} f/(\partial x^1)^{i_1}\dots(\partial x^n)^{i_n}$$

eksisterer og er kontinuerte i ethvert punkt af X.

Lad endvidere $Y \subseteq R^m$ være åben og ikke tom, og lad

$(y^1,\dots,y^m)$ betegne koordinaterne i Y.

En afbildning $\varphi: X \to Y$ beskrives ved et ligningssystem

$$y^1 = \varphi^1(x^1,\dots,x^n)$$

$$\dots$$

$$y^m = \varphi^m(x^1,\dots,x^n),$$

hvor funktionerne $\varphi^1,\dots,\varphi^m$ er reelle funktioner på X.

Afbildningen φ siges at være af <u>klasse C^∞</u>, eller man siger, at φ er en C^∞-afbildning, hvis samtlige funktioner $\varphi^1,\ldots,\varphi^m$ er C^∞-funktioner på X.

Vi vil senere få brug for følgende lille sætning om C^∞-funktioner:

<u>Hvis f er en reel funktion af klasse C^∞ på den åbne kugle</u>

$$K_r = \{(x^1,\ldots,x^n) \in R^n \mid (x^1)^2 + \ldots + (x^n)^2 < r^2\},$$

<u>hvor r>0, da findes reelle C^∞-funktioner $f_1,\ldots, f_n$ på K_r, således at der gælder</u>

$$f(x^1,\ldots,x^n) = f(0,\ldots,0) + x^i f_i(x^1,\ldots,x^n)$$

<u>i ethvert punkt</u> $(x^1,\ldots,x^n) \in Kr$. <u>For ethvert sådant funktionssæt $f_1,\ldots,f_n$ gælder der, at</u>

$$f_i(0,\ldots,0) = \partial f(0,\ldots,0) / \partial x^i$$

<u>for $i = 1,2,\ldots, n$.</u>

Bevis:

For hvert punkt $(x^1,\ldots,x^n) \in K_r$ har vi

$$f(x^1,\ldots,x^n) = f(0,\ldots,0) + \int_0^1 \left(\frac{d}{dt} f(tx^1,\ldots,tx^n)\right)dt$$

$$= f(0,\ldots,0) + x^i \int_0^1 \left(\frac{\partial}{\partial x^i} f(tx^1,\ldots,tx^n)\right)dt$$

$$= f(0,\ldots,0) + x^i f_i(x^1,\ldots,x^n)$$

, hvor funktionerne f_i er af klasse C^∞ ifølge en velkendt sætning fra analysen.

Sætningens sidste påstand følger umiddelbart ved partiel differentiation med hensyn til x^i.

Ved en parallelforskydning i $\hat{R}^n$ får vi den tilsvarende sætning for en åben kugle K med centrum $(c^1,\dots,c^n) \in \hat{R}^n$ og radius $r > 0$. Resultatet bliver her en fremstilling

$$f(x^1,\dots,x^n) = f(c^1,\dots,c^n) + (x^i - c^i)\, f_i(x^1,\dots,x^n)$$

for en C^∞-funktion f på K, og her gælder

$$f_i(c^1,\dots,c^n) = \partial f(c^1,\dots,c^n) / \partial x^i.$$

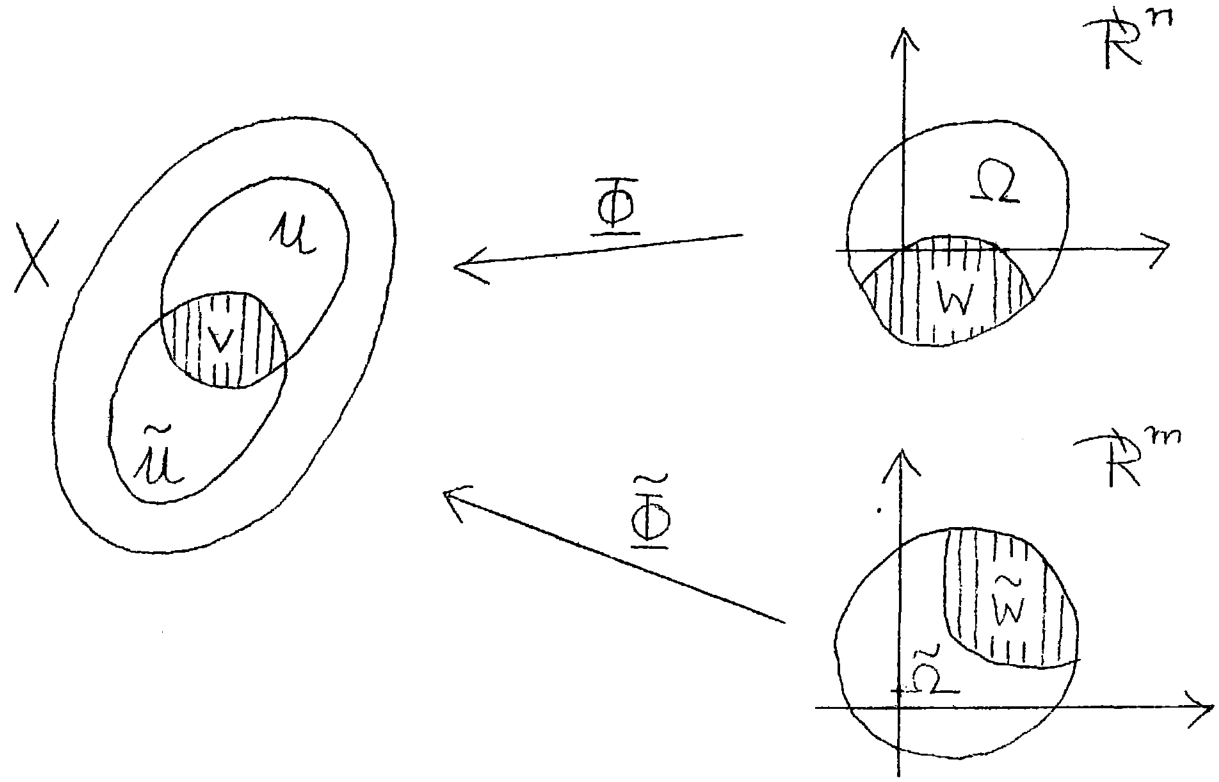
Lad X betegne et topologisk rum. Ved et <u>n-dimensionalt kort</u> i X forstås en tripel $K = (U,\Omega,\Phi)$, hvor $U \subseteq X$ og $\Omega \subseteq \hat{R}^n$ er åbne, ikke tomme mængder og $\Phi : \Omega \to U$ en homeomorf afbildning (altså en bijektiv afbildning, hvor både Φ og Φ^{-1} er kontinuerte med hensyn til de inducerede topologier på U og Ω). Mængden U kaldes kortets <u>domene</u> og Ω dets <u>parametermængde.</u> Koordinaterne $(x^1,\dots,x^n)$ i $\hat{R}^n$ kaldes de til kortet svarende lokale koordinater i X. I stedet for kort vil vi ofte bruge betegnelsen <u>lokale koordinater i X med domene U,</u> og er $x \in U$ vil vi betegne $(x^1,\dots,x^n)$ som <u>lokale koordinater i en omegn af x.</u> Det ses, at ved Φ^{-1} bliver der til hvert punkt $x \in U$ knyttet et talsæt $(x^1,\dots,x^n)$, som kaldes <u>koordinaterne for x med hensyn til kortet K</u> og omvendt bliver der ved Φ til et koordinatsæt $(x^1,\dots,x^n)$ $\in \Omega$ knyttet et punkt $x \in U$.

Ved $f \to f\circ\Phi$ defineres en entydig korrespondance mellem reelle funktioner, definerede på delmængder af U og reelle funktioner, definerede på delmængder af Ω. For at lette overskueligheden vil vi i det følgende tillade os at bruge symbolet f også som betegnelse for $f\circ\Phi$.

Dette vil ikke give anledning til misforståelser, da de to funktioner er definerede på forskellige mængder. Der kan imidlertid komme problemer, hvis man samtidig betragter flere forskellige kort. Denne situation klares ved at benytte betegnelsen $f(x^1,\dots,x^n)$ for $f\circ\Phi$. En hermed meget nært beslægtet konvention er, at symbolerne $x^1,\dots,x^n$ udover at betegne koordinaterne i parameterområdet Ω bruges som betegnelser for de n reelle funktioner på U, som ved den ovennævnte korrespondance svarer til de n koordinater i Ω; sagt på en anden måde: Et punkt $x \in U$ har ved kortet K koordinaterne

$$x^1(x),\dots,x^n(x).$$

Lad nu yderligere $\tilde{K}=(\tilde{U},\tilde{\Omega},\tilde{\Phi})$ være et m-dimensionalt kort i X med koordinater $(y^1,\dots,y^m)\in\tilde{\Omega}\subseteq R^m$, og lad os antage, at $V = U\cap\tilde{U}\neq\emptyset$.



Idet vi benytter betegnelserne

$$W = \Phi^{-1}(V) \quad \text{og} \quad \tilde{W} = \tilde{\Phi}^{-1}(V)$$

har vi to afbildninger

$$\tilde{\Phi}^{-1} \circ \Phi \mid W : W \to \tilde{W}$$

og

$$\Phi^{-1} \circ \tilde{\Phi} \mid \tilde{W} : \tilde{W} \to W,$$

Som åbenbart er indbyrdes inverse. Med de indførte betegnelser bliver disse afbildninger beskrevet ved

$$y^1 = y^1 (x^1,\dots,x^n)$$

$$y^m = y^m (x^1,\dots,x^n),$$

henholdsvis

$$x^1 = x^1 (y^1,\dots,y^m)$$

$$\dots$$

$$x^n = x^n (y^1,\dots,y^m).$$

De kaldes de til kortene K og $\tilde{K}$ hørende koordinattransformationer, idet de udtrykker sammenhængen mellem koordinaterne m.h.t. K og m.h.t. $\tilde{K}$ for et punkt $x \in V$.

Vi kan nu indføre følgende definition: To kort $K = (U,\Omega,\Phi)$ og $\tilde{K} = (\tilde{U},\tilde{\Omega},\tilde{\Phi})$ i det topologiske rum X siges at være <u>C^∞-fordragelige,</u> hvis $U \cap \tilde{U} = \emptyset$ eller hvis (i modsat fald) koordinattransformationerne begge er afbildninger af klasse C^∞ på deres definitionsmængder (W, henholdsvis $\tilde{W}$).

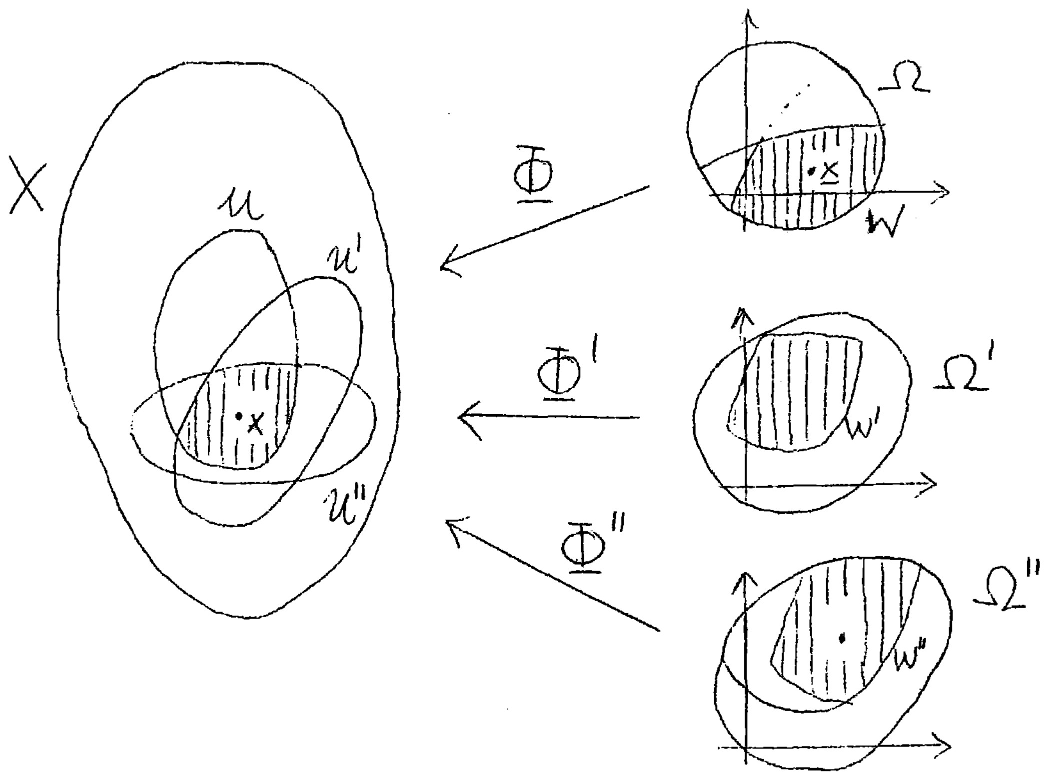
Idet $K = (U,\Omega,\Phi)$ er et kort i det topologiske rum X, siges en reel funktion $f: O \to \mathring{R}$, hvor $O \subseteq U$ er åben, at være en <u>C^∞-funktion med hensyn til K</u>, hvis funktionen $f \circ \Phi$ er af klasse C^∞ på sin definitionsmængde $\Phi^{-1}(O)$. Er yderligere $\tilde{K} = (\tilde{U},\tilde{\Omega},\tilde{\Phi})$ et kort i X og er $V = U \cap \tilde{U} \neq \emptyset$ ser vi, at der gælder følgende: <u>Hvis kortene K og $\tilde{K}$ er C^∞-fordragelige, er en reel funktion $f: O \to \mathring{R}$, hvor $O \subset V$, en C^∞-funktion med hensyn til K når og kun når den er en C^∞-funktion med hensyn til $\tilde{K}$.</u>

Ved et <u>atlas</u> på et topologisk rum X forstås et system

$$\mathcal{A} = \{ K_j = (U_j, \Omega_j, \Phi_j) \mid j \in J \}$$

af kort i X, således at mængdesystemet $\{ U_j \mid j \in J \}$ danner en overdækning af X. Atlasset $\mathcal{A}$ siges at være et <u>C^∞-atlas</u>, hvis hvilkesomhelst to kort i $\mathcal{A}$ er C^∞-fordragelige. Videre siges to C^∞-atlas $\mathcal{A}$ og $\mathcal{A}'$ på X at være <u>C^∞-ækvivalente</u>, hvis ethvert kort i $\mathcal{A}$ er C^∞-fordrageligt med ethvert kort i $\mathcal{A}'$, hvilket kommer ud på det samme som at sige, at $\mathcal{A} \cup \mathcal{A}'$ er et C^∞-atlas. Vi må nu vise, at denne relation virkelig er en <u>ækvivalensrelation.</u> At den er <u>refleksiv</u> og <u>symmetrisk</u> er klart, hvorimod <u>transitiviteten</u> kræver en lille overvejelse: Lad $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ og $\mathcal{A}''$ være C^∞-atlas på X, hvor $\mathcal{A}$ og $\mathcal{A}'$ samt $\mathcal{A}'$ og $\mathcal{A}''$ er C^∞-ækvivalente. Vi skal bevise, at et vilkårligt kort $K = (U,\Omega,\Phi)$ i $\mathcal{A}$ og et vilkårligt kort $K'' = (U'',\Omega'',\Phi'')$ i $\mathcal{A}''$ er C^∞-fordragelige.

Dette er automatisk tilfældet, hvis $U \cap U'' = \emptyset$. Lad derfor $U \cap U'' \neq \emptyset$. Vi skal da vise, at koordinattransformationerne mellem K og K'' er af klasse C^∞. På grund af symmetrien mellem K og K'' i problemstillingen er det nok at vise dette for den ene af disse. Er $\underline{x}$ et punkt i $\Phi^{-1}(U \cap U'') \subseteq \Omega$ kan vi, da A' er et atlas, finde et kort $K' = (U', \Omega', \Phi')$ i A', så $x = \Phi(\underline{x}) \in U'$.



Med betegnelserne $V = U \cap U' \cap U''$, $W = \Phi^{-1}(V)$, $W' = \Phi'^{-1}(V)$, $W'' = \Phi''^{-1}(V)$ har vi nu:

$$\Phi''^{-1} \circ \Phi \mid W = (\Phi''^{-1} \circ \Phi' \mid W') \circ (\Phi'^{-1} \circ \Phi \mid W).$$

Her er begge afbildningerne på højre side af klasse C^∞, idet de er restriktioner af koordinattransformationer mellem K og K' henholdsvis K' og K'', og hvert af disse par af kort er C^∞-fordragelige ifølge forudsætningerne.

Koordinattransformationen $\Phi''^{-1} \circ \Phi$ er altså af klasse C^∞ i punktet $\underline{x}$, men det var vilkårligt valgt i $\Phi^{-1}(U \cap U'')$.

Hermed er påstanden bevist.

Ved en <u>differentiabel struktur</u> på et topologisk rum X forstås en ækvivalensklasse af C^∞-ækvivalente C^∞-atlas på X. Vi kan nu definere en <u>differentiabel mangfoldighed</u> som et Hausdorff rum X med en differentiabel struktur. Ethvert atlas i den differentiable struktur kaldes et <u>tilladt atlas</u> for den differentiable mangfoldighed og ethvert kort i X, som findes i et tilladt atlas, kaldes et <u>tilladt kort</u> i X for den differentiable mangfoldighed. Vi vil i det følgende bruge samme betegnelse for en differentiabel mangfoldighed og det dertil svarende topologiske rum (det "underliggende" topologiske rum). Dette vil ikke give anledning til misforståelser, idet vi ikke skal betragte flere forskellige differentiable strukturer på det samme topologiske rum.

Et C^∞-atlas A på et topologisk rum X fastlægger en differentiabel struktur på X, og hvis X er et Hausdorff-rum, bliver det herved en differentiabel mangfoldighed. Dette giver os straks en række simple eksempler på differentiable mangfoldigheder. Lad nemlig $X \subseteq \mathring{R}^n$ være åben og ikke tom. Vi har da et atlas på X, bestående at et eneste kort $K = (X,X,\mathrm{Id})$, og X bliver herved en differentiabel mangfoldighed, da den som bekendt er et Hausdorff-rum. I det følgende vil vi til stadighed opfatte åbne delmængder af et talrum $\mathring{R}^n$ som differentiable mangfoldigheder på denne måde. Et tilladt kort (U,Ω,Φ) i $\mathring{R}^n$ består af åbne mængder $U, \Omega \subseteq \mathring{R}^n$ og en bijektiv afbildning $\Phi : \Omega \to U$, så både Φ og Φ^{-1} er C^∞-afbildninger.

Et sådant kort betegnes hyppigt som krumliniede koordinater på $U \subseteq \mathring{R}^n$ (eksempel: polære koordinater på en halvplan i $\mathring{R}^2$).

Lad X være en differentiabel mangfoldighed. En afbildning $f: O \to \mathring{R}$, hvor $O \subseteq X$ er åben og ikke tom vil vi kalde en funktion i X; mængden O kaldes definitionsmængden for f. Funktion f siges at være af klasse C^∞ eller at være en C^∞-funktion, hvis der gælder følgende: For ethvert tilladt kort $K = (U,\Omega, \Phi)$ i X for hvilket $O \cap U \neq \emptyset$, er f af klasse C^∞ med hensyn til K. Det følger af C^∞-fordrageligheden mellem de tilladte kort i X, at hvis $K = (U,\Omega,\Phi)$ er et sådant og f en funktion med definitionsmængde $O \subset U$, da er f en C^∞-funktion i X når og kun når den er det med hensyn til kortet K.

Lad $\underline{c} = (c^1,\dots,c^n)$ være et punkt og $\underline{v} = (v^1,\dots,v^n)$ en vektor i $\mathring{R}^n$ (de er altså begge blot talsæt, bestående af n reelle tal). Hvis f er en C^∞-funktion på en omegn af $\underline{c}$ i $\mathring{R}^n$ kan vi definere differentialkvotien af f i retning $\underline{v}$ i punktet $\underline{c}$ ved

$$v(f) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(f(\underline{c} + t\underline{v})-f(\underline{c}))= v^i \, \partial f(\underline{c}) \, /\partial x^i.$$

Betegner $C^\infty_{\underline{c}}$ mængden af reelle funktioner, som er definerede og C^∞ i omegnen af $\underline{c}$, har vi altså til vektoren $\underline{v}$ knyttet en afbildning

$$v : C^\infty_{\underline{c}} \to \mathring{R}.$$

Af velkendte differentiationsregler fås, at afbildningen v har følgende egenskaber:

1. Hvis $f,g \in C^\infty_{\underline{c}}$ og $a,b \in \hat{R}$ gælder der

$$v(af + bg) = av(f) + bv(g)$$

2. Hvis $f,g \in C^\infty_{\underline{c}}$ gælder der

$$v(fg) = f(\underline{c})\, v(g) + g(\underline{c})v(f)$$

3. Hvis $f,g \in C^\infty_{\underline{c}}$ og hvis f og g stemmer overens i en omegn af $\underline{c}$, gælder der

$$v(f) = v(g).$$

Ved 1 og 2 skal summen og produktet interpreteres som summen og produktet af funktionernes restriktioner til fællesmængden af deres definitionsmængder.

Vi skal nu se, at enhver afbildning

$$v : C^\infty_{\underline{c}} \to \hat{R},$$

som opfylder 1,2 og 3 kan fås udfra en passende vektor $\underline{v}$ som differentiationen i $\underline{c}$ i retningen $\underline{v}$.

Lad nemlig v være en afbildning $v\colon C^\infty_{\underline{c}} \to \hat{R}$, som opfylder 1,2 og 3. For en funktion e, som er konstant 1 i en omegn af $\underline{c}$ har vi da

$$v(e) = v(e\cdot e) = e(\underline{c})v(e) + e(\underline{c})v(e) = 2v(e)$$

altså $v(e) = 0$. For en funktion f som har den konstante værdi $a \in \hat{R}$ i en omegn af $\underline{c}$, fås dernæst

$$v(f) = v(a\, e) = a\, v(e) = 0.$$

Lad nu $f \in C^\infty_{\underline{c}}$. Ifølge en sætning i paragraffens begyndelse har vi en opspaltning

$$f(\underline{x}) = f(\underline{c}) + (x^i - c^i)\, f_i(\underline{x})$$

med C^∞-funktioner $f_1,\ldots,f_n$ i en omegn af $\underline{c}$, og her gælder

$$f_i(\underline{c}) = \partial f(\underline{c})\,/\partial x^i$$

Da v opfylder 1,2 og 3 får vi heraf, idet vi benytter, at v er 0 på konstante funktioner, at

$$v(f) = (x^i(\underline{c}) - c^i)v(f_i) + f_i(\underline{c})\cdot v(x^i - c^i)$$

$$= f_i(\underline{c})v(x^i) = v^i\ \partial f(\underline{c})\,/\partial x^i,$$

hvor $v^i = v(x^i)$ for $i = 1,\ldots,n.$

Afbildningen v er altså identisk med differentiationen i punktet $\underline{c}$ i retningen $\underline{v} = (v^1,\ldots,v^n)$.

Med det ovenstående er endda bevist, at tilordningen $\underline{v} \to v$ definerer en eenentydig korrespondance mellem vektorer i $\mathbb{R}^n$ og afbildninger

$$V : C^\infty_{\underline{c}} \to \mathbb{R},$$

som opfylder betingelserne 1,2 og 3. Idet mængden af sådanne afbildninger gøres til et vektorrum på den naturlige måde(nemlig som et underrum af vektorrummet af alle afbildninger af mængden $C^\infty_{\underline{c}}$ ind i $\mathbb{R}$) bliver denne korrespondance en isomorfi mellem de to vektorrum.

Lad X være en differentiabel mangfoldighed og $x \in X$ et punkt af x. Idet vi med $C_x^\infty X$ betegner mængden af C^∞-funktioner i X, som indeholder punktet x i sin definetionsmængde, indføres følgende definition: Ved en <u>tangentvektor</u> ξ til X i punktet x forstås en afbildning

$$\xi : C_x^\infty X \to \mathbf{R}$$

med følgende egenskaber:

1. Hvis $f,g \in C_x^\infty X$ og $a,b \in \mathbf{R}$ gælder der

$$\xi(af + bg) = a\xi(f) + b\xi(g)$$

2. Hvis $f,g \in C_x^\infty X$ gælder der

$$\xi(f\cdot g) = f(x)\,\xi(g) + g(x)\,\xi(f)$$

3. Hvis $f,g \in C_x^\infty X$ og hvis f og g stemmer overens i en omegn af x, gælder der

$$\xi(f) = \xi(g)$$

Mængden af alle tangentvektorer til X i punktet x betegnes med T_xX. Den er en delmængde af vektorrummet over $\mathbf{R}$ af alle afbildninger af $C_x^\infty X$ ind i $\mathbf{R}$, og endda et <u>underrum</u>. Er nemlig ξ, $\eta \in T_xX$ og $c,d \in \mathbf{R}$ vil afbildningen

$$c\xi + d\eta : C_x^\infty X \to \mathbf{R}$$

opfylde 1,2 og 3 (da disse betingelser er lineære i ξ) og følgelig også være en tangentvektor til X i punktet x.

Vektorrummet T_xX kaldes <u>tangentrummet</u> til X i punktet $x \in X$.

Lad $(x^1,\dots,x^n)$ være tilladte lokale koordinater i en omegn af x og lad $\underline{c} = (c^1,\dots,c^n)$ betegne koordinatsættet for x svarende hertil. Vi kan da definere n tangentvektorer $\partial/\partial x^1,\dots,\partial/\partial x^n$ til X i x på følgende måde: For $f \in C^\infty_x X$ er funktionen $f(x^1,\dots,x^n)$ defineret og af klasse C^∞ i en omegn af $\underline{c}$, og vi sætter

$$\frac{\partial}{\partial x^i}(f) = \partial f(\underline{c})/\partial x^i$$

for $i = 1,\dots,n$. Det følger umiddelbart af velkendte differentiationsregler, at de således definerede afbildninger

$$\frac{\partial}{\partial x^i} : C^\infty_x X \to \mathbf{R}$$

er tangentvektorer til X i punktet $x \in X$.

Vi kan nu bevise følgende sætning:

<u>Lad X være en differentiabel mangfoldighed og x et punkt i X. Hvis $(x^1,\dots,x^n)$ er tilladte lokale koordinater i en omegn af x vil tangentvektorerne</u>

$$\frac{\partial}{\partial x^1},\dots,\frac{\partial}{\partial x^n}$$

<u>danne en basis for tangentrummet T_xX til X i x.</u>

<u>Er ξ en tangentvektor til X i punktet x, gælder der</u>

$$\xi = \xi(x^i)\frac{\partial}{\partial x^i} .$$

Bevis: Lad $\xi \in T_x X$ og lad $e \in C_x^\infty X$ have konstant værdi 1 i en omegn af x. Da har vi

$$\xi(e) = \xi(e \cdot e) = e(x)\,\xi(e) + e(x)\,\xi(e) = 2\,\xi(e)$$

altså

$$\xi(e) = 0.$$

Hvis $f \in C_x^\infty X$ har konstant værdi $a \in \mathbb{R}$ i en omegn af x fås dernæst

$$\xi(f) = \xi(ae) = a\xi(e) = 0.$$

Lad nu $f \in C_x^\infty X$. Ved at bruge hjælpesætningen på $f(x^1,\dots,x^n)$, som er af klasse C^∞ i en omegn af $\underline{c}$, og dernæst interpretere de fremkomne funktioner som funktioner i X får vi, at der i en omegn af x findes en opspaltning

$$f = f(x) + (x^i - c^i)\, f_i$$

hvor funktionerne f_i er C^∞-funktioner i en omegn af x, og at der her gælder

$$f_i(x) = \frac{\partial}{\partial x^i}(f)\ ,\ i = 1,\dots,n.$$

Vi har derfor

$$\xi(f) = f_i(x)\ \xi\,(x^i - c^i) + (x^i(x) - c^i)\ \xi\,(f_i)$$

$$= f_i(x)\ \xi\,(x^i) = \xi(x^i)\,\frac{\partial}{\partial x^i}\,(f)\ .$$

Da dette gælder for ethvert $f \in C^\infty_x X$ har vi hermed, at

$$\xi = \xi(x^i) \frac{\partial}{\partial x^i}$$

for enhver tangentvektor $\xi \in T_x X$. Tangentvektorerne $\partial/\partial x^i$, $i = 1,\dots,m$, udspænder altså tangentrummet $T_x X$.

Lad nu

$$a^i \frac{\partial}{\partial x^i} = 0.$$

Vi har da

$$0 = 0(x^j) = a^i \frac{\partial}{\partial x^i}(x^j) = a^i \frac{\partial x^j}{\partial x^i} = a^i \delta^j_i = a^j$$

for hvert $j = 1,\dots,n$, hvormed det er bevist, at tangentvektorerne

$$\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}$$

er lineært uafhængige.

Hermed er sætningen bevist, idet den i sætningen anførte formel er kommet ud som et biprodukt undervejs i beviset.

Systemet af tangentvektorer

$$\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}$$

til X i punktet x kaldes <u>den til de lokale koordinater</u> $(x^1,\dots,x^n)$ <u>hørende basis for tangentrummet</u> $T_x X$ <u>til X i punktet x.</u> Er $\xi \in T_x X$ har vi fremstillingen

$$\xi = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} \quad ,$$

hvor det reelle talsæt ($\xi^1,\ldots,\xi^n$) er givet ved

$$\xi^i = \xi(x^i).$$

Dette talsæt kaldes <u>koordinaterne for tangentvektoren ξ med hensyn til de lokale koordinater ($x^1,\ldots,x^n$).</u>

Som et biprodukt af den ovenstående sætning får vi, at hvis ($x^1,\ldots,x^n$) er tilladte lokale koordinater i en omegn af x, da er

$$n = \dim \ T_xX \ .$$

<u>Ethvert tilladt kort (U,Ω,Φ) i X, for hvilket $x \in U$, har altså dimensionen</u>

$$n = \dim T_xX \ .$$

Dimensionen af tangentrummet T_xX kaldes derfor <u>dimensionen af X i punktet x</u> og betegnes

$$\dim_x X.$$

Den ved

$$x \to \dim_x X$$

bestemte afbildning

$$X \to \hat{N}$$

er kontinuert, idet den er lokalt konstant. Er nemlig (U,Ω, Φ) et tilladt kort i X med $x \in U$ gælder der

$$\dim_y X = \dim_x X$$

for ethvert punkt $y \in U$.

Heraf følger, at <u>en sammenhængende differentiabel mangfoldighed har den samme dimension i ethvert punkt.</u>

Foruden tangentrummet T_xX har det også interesse at betragte dettes duale rum T_x^*X, altså vektorrummet over $\mathring{R}$ af linearformer $T_xX \to \mathring{R}$. Et element $\eta^* \in T_x^*X$, altså en linearform

$$\eta^* : T_xX \to \mathring{R},$$

kaldes en <u>covektor til X i punktet x.</u> Idet $\xi \in T_xX$ bruges betegnelsen

$$\langle \eta^*, \xi \rangle$$

for værdien af η^* på ξ. Afbildningen

$$T_x^*X \times T_xX \to \mathring{R}$$

bestemt ved, at

$$(\eta^*, \xi) \to \langle \eta^*, \xi \rangle$$

er en bilinearform, den såkaldte <u>kanoniske bilinearform</u>. (Dette følger dels af, at hvert η^* er en linearform på T_xX og dels af definitionen på vektorrumsoperationerne i T_x^*X).

Vi kan straks angive en hel klasse af covektorer til X i punktet x. Er nemlig f en C^∞-funktion i en omegn af x, vil den ved

$$\xi \to \xi(f)$$

bestemte afbildning

$$df : T_xX \to \mathring{R}$$

være en linearform. Denne covektor kaldes <u>differentialet af funktionen f i punktet x.</u>

Hvis $(x^1,\dots,x^n)$ er tilladte lokale koordinater i en omegn af punktet x, har vi hermed n covektorer $dx^1,\dots,dx^n$ til X i punktet x, og vi vil nu vise, <u>at disse danner en basis for vektorrummet</u> T_x^*X. Hertil bemærkes, at der for $i,j \in \{1,\dots,n\}$ gælder

$$\langle dx^i, \frac{\partial}{\partial x^j} \rangle = \frac{\partial}{\partial x^j}(x^i) = \delta^i_j.$$

Heraf følger påstanden ved rent algebraiske overvejelser: For et vilkårligt reelt talsæt $(a_1,\dots,a_n)$ får vi

$$\langle a_i\, dx^i, \frac{\partial}{\partial x^j} \rangle = a_i \langle dx^i, \frac{\partial}{\partial x^j} \rangle = a_i \delta^i_j = a_j$$

hvoraf vi slutter, at samtlige koefficienter a_j er 0, hvis $a_i dx^i$ er nulcovektorer, altså at $dx^1,\dots,dx^n$ er lineært uafhængige. Videre slutter vi, at hvis η^* er en vilkårlig given covektor, da har covektoren $a_i dx^i$, hvor

$$a_i = \langle \eta^*, \frac{\partial}{\partial x^i} \rangle$$

samme værdi som η^* på enhver af basisvektorerne $\partial/\partial x^i$ og dermed (på grund af lineariteten) på enhver vektor i T_xX. Der gælder altså $\eta^* = a_i dx^i$, hvormed det er eftervist at covektorerne $dx^1,\dots,dx^n$ udspænder T_x^*X. .

Systemet af covektorer

$$dx^1,\dots,dx^n$$

til X i punktet x kaldes <u>den til de lokale koordinater $(x^1,\dots,x^n)$ hørende basis for cotangentrummet T_x^*X til X i punktet x.</u>

Er $\eta^* \in T_x^*X$ har vi fremstillingen

$$\eta^* = \eta_i^* \, dx^i ,$$

hvor det reelle talsæt $(\eta_1^*, \dots, \eta_n^*)$ er givet ved

$$\eta_i^* = \langle \eta^*, \frac{\partial}{\partial x^i} \rangle ,$$

Dette talsæt kaldes <u>koordinaterne for covektoren η^* med hensyn til de lokale koordinater $(x^1, \dots, x^n)$.</u>

Specielt får vi for en ~~C^∞~~funktion f $\in C_x^\infty X$, at

$$df = \langle df, \frac{\partial}{\partial x^i} \rangle \, dx^i = \frac{\partial}{\partial x^i}(f) \, dx^i = \frac{\partial f}{\partial x^i}(\underline{c}) \, dx^i$$

Endelig kan vi bemærke, at der for $\xi \in T_xX$ og $\eta^* \in T_x^*X$ gælder

$$\langle \eta^*, \xi \rangle = \langle \eta_i^* \, dx^i, \xi^j \frac{\partial}{\partial x^j} \rangle = \eta_i^* \xi^j \frac{\partial x^i}{\partial x^j} = \eta_i^* \xi^i .$$

Det kan i visse tilfælde have interesse at kende sammenhængen mellem koordinatsættene for en tangentvektor eller for en covektor til X i et punkt x med hensyn til forskellige lokale koordinater. Lad altså $(x^1, \dots, x^n)$ og $(\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^n)$ være tilladte lokale koordinater i en omegn af punktet $x \in X$, og lad

$$\xi = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} = \bar{\xi}^i \frac{\partial}{\partial \bar{x}^i}$$

være en tangentvektor og

$$\eta^* = \eta_i^* \, dx^i = \bar{\eta}_i^* \, d\bar{x}^i$$

en covektor til X i punktet x.

Vi har fra tidligere, at

$$dx^i = \frac{\partial}{\partial \bar{x}^j}(x^i)d\bar{x}^j = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j}\, d\bar{x}^j$$

og

$$\frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial x^i}(\bar{x}^j)\,\frac{\partial}{\partial \bar{x}^j} = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^i}\,\frac{\partial}{\partial \bar{x}^j}$$

Heraf fås

$$\xi = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} = \xi^i \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^i}\,\frac{\partial}{\partial \bar{x}^j} = \left(\xi^k \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k}\right)\frac{\partial}{\partial \bar{x}^i}$$

altså

$$\boxed{\bar{\xi}^i = \xi^k \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k}}$$

Analogt fås

$$\eta^* = \eta^*_i\, dx^i = \eta^*_i \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j}\, d\bar{x}^j = \left(\eta^*_k \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i}\right) d\bar{x}^i$$

altså

$$\boxed{\bar{\eta}^*_i = \eta^*_k \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i}}$$

Disse transformationsformler viser, at selvom en tangentvektor ξ og en covektor η^* har de samme koordinatsæt med hensyn til et systemet af lokale koordinater $(x^1,\ldots,x^n)$, vil dette i almindelighed ikke være tilfældet med hensyn til et andet system af lokale koordinater $(\bar{x}^1,\ldots,\bar{x}^n)$. Tangentvektorer og covektorer er altså forskellige begreber, som ikke må forveksles.

De ovenstående transformationsformler kan opfattes som matrix-relationer, idet man opfatter hver af de indicerede størrelser som en matrix, hvor øvre index er rækkenummer og nedre index er søjlenummer (talsættene (ξ^i) og $(\bar{\xi}^i)$ bliver herved søjlematricer, mens (η_i^*) og $(\bar{\eta}_i^*)$ bliver rækkematricer).
Man får åbenbart

$$\begin{Bmatrix} \bar{\xi}^1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \vdots \\ \bar{\xi}^n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^n} \\ & \vdots & \\ \frac{\partial \bar{x}^n}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial \bar{x}^n}{\partial x^n} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \xi^1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \xi^n \end{Bmatrix}$$

og

$$\{\bar{\eta}_1^*, \dots, \bar{\eta}_n^*\} = \{\eta_1^*, \dots, \eta_n^*\} \begin{Bmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^1} & \dots & \frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^n} \\ & \dots & \\ \frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^1} & \dots & \frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^n} \end{Bmatrix}$$

De to n x n matricer, som indgår i disse formler, er funktionalmatricerne (i de til punktet x svarende koordinatpunkter) af de to koordinattransformationer og følgelig indbyrdes inverse. Hvis man transponerer den sidste af disse relationer, bliver covektorens koordinatsæt skrevet som søjler og de to faktorer på højre side af lighedstegnet ombyttet, så en sammenligning med transformationsloven for en tangentvektors koordinatsæt nu kan foretages blot ved at sammenligne matricerne. Man ser heraf, at transformationerne af tangentvektor- og af covektorkoordinater er identiske når og kun når funktionalmatricen er identisk med sin inverses transponerede (den såkaldte contragrediente matrix) eller altså når og kun når den er ortogonal.

For den differentiable mangfoldighed $\mathring{R}^n$ opfatter man sædvanligvis tangentvektorerne som geometriske vektorer (altså som talsæt, jævnfør overvejelserne på side 8-10), hvilket svarer til at man identificerer en tangentvektor med sit koordinatsæt med hensyn til de "oprindelige" koordinater i $\mathring{R}^n$. Dette kræver dog en vis forsigtighed, idet en tangentvektor er knyttet til et bestemt punkt. To tangentvektorer i forskellige punkter af $\mathring{R}^n$, som er ens i denne forstand, d.v.s. har de samme koordinatsæt med hensyn til de oprindelige koordinater, vil i almindelighed have forskellige koordinatsæt med hensyn til krumliniede koordinater i $\mathring{R}^n$ - et fænomen, som er velkendt fra polære koordinater i planen.

(Det forekommer også hyppigt i litteraturen, at man yderligere identificerer covektorerne i $\mathring{R}^n$ med deres koordinatsæt med hensyn til de oprindelige koordinater, hvorved tangentvektorer og covektorer bliver identificeret. Af det ovenstående ser man, at en sådan identifikation kun kan opretholdes, hvis man indskrænker sig til at betragte ortonormale koordinatsystemer i $\mathring{R}^n$).

Lad X og Y være differentiable mangfoldigheder og

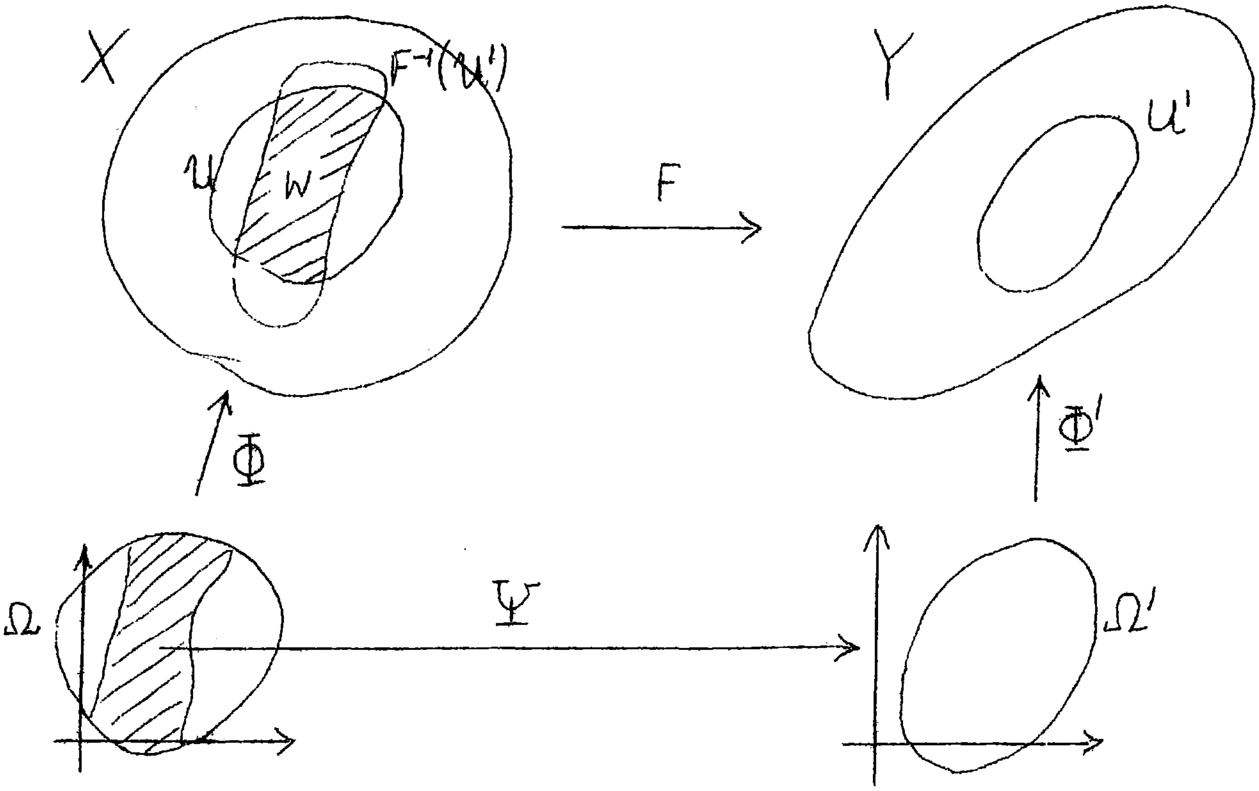
$$F:X \to Y$$

en kontinuert afbildning (af de underliggende topologiske rum). Man siger da, at F er af <u>klasse C^∞</u> eller at F er en <u>C^∞-afbildning</u>, hvis der gælder følgende:

For hvilketsomhelst tilladt kort (U,Ω,Φ) i X og hvilketsomhelst tilladt kort (U',Ω',Φ') i Y, for hvilke der gælder $W = U \cap F^{-1}(U') \neq \emptyset$, er den ved

$$\Psi = \Phi'^{-1} \circ F \circ \Phi : \Phi^{-1}(W) \to \Omega'$$

bestemte afbildning af klasse C^∞.



Afbildningen Ψ kaldes beskrivelsen af F med hensyn til de valgte lokale koordinater, idet den giver koordinaterne (med hensyn til kortet (U',Ω',Φ')) af billedpunktet F(x) som funktioner af koordinaterne (med hensyn til kortet (U,Ω,Φ)) af punktet x. En C^∞-afbildning er altså kort sagt en afbildning, som med hensyn til tilladte lokale koordinater beskrives ved et system af C^∞-funktioner.

Det er trivielt, at den identiske afbildning af en differentiabel mangfoldighed på sig selv er af klasse C^∞, og man efterviser let (ved en overvejelse, analog til den på side 7 a), at en sammensætning af C^∞-afbildninger igen er en C^∞-afbildning.

Udfra definitionen af begrebet C^∞-afbildning efterviser man let følgende: Hvis X og Y er differentiable mangfoldigheder, $F:X \to Y$ en C^∞-afbildning og g en C^∞-funktion, defineret på en åben delmængde af Y, da er $f = g \circ F$ en C^∞-funktion på sin definitionsmængde - for såvidt denne ikke er tom (den er en åben delmængde af X, da F er kontinuert). Man udtrykker kort denne egenskab ved, at <u>en C^∞-afbildning tilbagetransporterer C^∞-funktioner i C^∞-funktioner.</u>

Man kan specielt betragte C^∞-afbildninger

$$\varphi\colon]a,b[\to X,$$

hvor X er en differentiabel mangfoldighed og $]a,b[$ et åbent interval i $\mathring{R}$. En sådan afbildning kaldes (naturligvis) en C^∞-parameterfremstilling for en kurve i X; opfatter man den reelle parameter (i intervallet $]a,b[$) som tiden, kan en sådan afbildning opfattes som en bevægelse i tidsrummet $]a,b[$ af et punkt i X. Vi skal nu se, at man for hvert $t_o \in]a,b[$ kan tilskrive φ en <u>hastighedsvektor</u> , som er en tangentvektor til X i punktet $x_o = \varphi(t_o)$. Lad nemlig f være en C^∞-funktion, defineret i en omegn af x_o. Funktionen $f \circ \varphi$ er da en C^∞-funktion, defineret i en omegn af t_o, og vi kan derfor danne dens differentialkvotient m.h.t. parameteren t i t_o. Den ved

$$f \to \frac{d\, f\circ\varphi}{dt}\Big]_{t\,=\,t_o}$$

bestemte afbildning er en tangentvektor til X i punktet x_o. Dette følger umiddelbart af de sædvanlige differentiationsregler for reelle funktioner af en reel variabel, idet man for C^∞-funktioner f og g, definerede i en omegn af x_o og reelle tal a,b har

$$(af + bg)\circ\varphi = af\circ\varphi + bg\circ\varphi$$

og

$$(f\cdot g)\circ\varphi = (f\circ\varphi)\cdot(g\circ\varphi).$$

Denne tangentvektor er netop den søgte hastighedsvektor og betegnes med $d\varphi/dt$.

Lad nu $(x^1,\dots,x^n)$ være tilladte lokale koordinater i X med et domæne U, som indeholder x_o. For parameterværdier t i en omegn af t_o vil punktet $\varphi(t)$ da ligge i U og altså have et koordinatsæt $x^i(\varphi(t))$. De n reelle funktioner $x^i(\varphi(t))$ er C^∞-funktioner, da φ er en C^∞-afbildning.

For en vilkårlig C^∞-funktion f, defineret i en omegn af x_o, får vi nu

$$\frac{d}{dt}f\circ\varphi = \frac{d}{dt}f(x^1(\varphi(t)),\dots,x^n(\varphi(t)))$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{dx^i(\varphi(t))}{dt} = \frac{dx^i(\varphi(t))}{dt}\frac{\partial}{\partial x^i}(f)$$

hvormed vi har

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{dx^i(\varphi(t))}{dt}\frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Den fra planen og rummet velkendte formel for en hastighedsvektors koordinater gælder altså uændret i den mere generelle situation.

Lad X og Y være differentiable mangfoldigheder og $F:X \to Y$ en C^∞-afbildning. Lad endvidere x være et punkt i X og $y= F(x)$. Hvis g er en C^∞-funktion i Y, defineret i en omegn af y, er funktionen $g\circ F$ en C^∞-funktion i X, defineret i en omegn af x. For en tangentvektor ξ til X i punktet x kan vi derfor danne $\xi(g\circ F)$. Det gælder nu, at (for fastholdt ξ) er den ved

$$g \to \xi(g\circ F)$$

bestemte afbildning af mængden $C_y^\infty Y$ ind i $\hat{R}$ en tangentvektor. Dette følger af, at ξ er en tangentvektor og af, at transporten $g \to g\circ F$ "respekterer" sum, produkt og restriktion af funktioner. Denne tangentvektor betegnes $dF_x(\xi)$, og er altså defineret ved, at der for $g \in C_y^\infty Y$ gælder

$$dF_x(\xi)(g) = \xi(g\circ F).$$

Den ved $\xi \to dF_x(\xi)$ bestemte afbildning

$$dF_x:\ T_xX \to T_yY$$

kaldes <u>differentialet af afbildningen F i punktet x.</u>

Den er en lineær afbildning. For tangentvektorer ξ,η til X i punktet x, reelle tal a og b og funktion $g \in C^\infty_y Y$ har vi nemlig:

$$\begin{aligned} dF_x(a\xi + b\eta)(g) &= (a\xi + b\eta)(g\circ F) \\ &= a\ \xi(g\circ F) + b\ \eta(g\circ F) \\ &= a\ dF_x(\xi)(g) + b\ dF_x(\eta)(g) \end{aligned}$$

altså

$$dF_x(a\xi + b\eta) = a\ dF_x(\xi) + b\ dF_x(\eta),$$

da det ovenstående gælder for enhver funktion $g \in C^\infty_y Y$.

Lad nu $(x^1,\dots,x^m)$ være tilladte lokale koordinater i X i en omegn af punktet x og $(y^1,\dots,y^n)$ tilladte lokale koordinater i Y i en omegn af punktet y. I en omegn af x beskrives afbildningen F ved et funktionssystem

$$\begin{aligned} y^1 &= y^1(x^1,\dots,x^m) \\ &\dots \\ y^n &= y^n(x^1,\dots,x^m). \end{aligned}$$

Lad

$$\xi = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

være en tangentvektor til X i punktet x og lad $g \in C^\infty_y Y$.

Vi får da

$$\begin{aligned} dF_x(\xi)(g) &= \xi(g\circ F) \\ &= \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} g(y^1(x^1,\dots,x^m),\dots,y^n(x^1,\dots,x^m)) \\ &= \xi^i \frac{\partial y^j}{\partial x^i}\frac{\partial g}{\partial y^j} = \xi^i \frac{\partial y^j}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial y^j}\ (g) \end{aligned}$$

altså

$$dF_x(\xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}) = \xi^i \frac{\partial y^j}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial y^j}\ .$$

Hermed har vi, at med hensyn til lokale koordinater i X og Y beskrives differentialet af F i punktet x ved funktionalmatricen i dette punkt af det funktionssystem, som beskriver F (med hensyn til de pågældende lokale koordinater).

Lad X, Y og Z være differentiable mangfoldigheder $F:X \to Y$ og $G:Y \to Z$ C^∞-afbildninger. Der gælder da

$$d(G\circ F)_x = dG_y \circ dF_x$$

i ethvert punkt $x \in X$, idet $y = F(x)$. Denne relation er velkendt fra analysen i det tilfælde, hvor X, Y og Z er åbne delmængder af talrum (funktionalmatricen for et sammensat funktionssystem er produktet af funktionalmatricerne af de enkelte funktionssystemer). Beviset her følger let af definitionerne. Idet $z = G(y)$, $\xi \in T_xX$ og $h \in C_z^\infty Z$ har vi: $d(G\circ F)_x(\xi)(h) = \xi(h\circ(G\circ F)) = \xi((h\circ G)\circ F) = dF_x(\xi)(h\circ G) = dG_y(dF_x(\xi))(h)$, hvoraf påstanden følger.

Betegnelsen differential kolliderer med det tidligere indførte differential af en funktion, men der er en nær sammenhæng mellem de to begreber, som retfærdiggør denne dobbelte brug af glosen. Lad nemlig X være en differentiabel mangfoldighed og $f:X \to \mathring{R}$ en C^∞-funktion. I hvert punkt $x \in X$ har vi da dels differentialet af funktionen f:

$$df:T_xX \to \mathring{R},$$

og dels differentialet af afbildningen f:

$$df_x:T_xX \to T_{f(x)}\mathring{R}.$$

Nu har vi imidlertid i $\mathring{R}$ en særlig udmærket koordinat,nemlig selve den reelle parameter t og dermed en særlig udmærket tangentvektor d/dt i ethvert punkt af $\mathring{R}$. Relationen mellem de to differentialer er, at der for enhver tangentvektor $\xi \in T_xX$ gælder

$$df_x(\xi) = \langle df,\xi\rangle\frac{d}{dt}.$$

Dette følger af et lille regnestykke. Vi kan nemlig bemærke, at for en vilkårlig tangentvektor η til $\mathring{R}$, gælder der

$$\eta = \eta(t)\frac{\partial}{\partial t} = \eta(\mathrm{Id})\frac{\partial}{\partial t},$$

idet koordinatfunktionen t på $\mathring{R}$ er den identiske afbildning $\mathrm{Id}:\mathring{R} \to \mathring{R}$. Deraf fås

$$df_x(\xi)(\mathrm{Id}) = \xi(\mathrm{Id}\circ f) = \xi(f) = \langle df,\xi\rangle$$

altså

$$df_x(\xi) = \langle df,\xi\rangle\frac{\partial}{\partial t}.$$

Lad X og Y være differentiable mangfoldigheder og $F:X \to Y$ en C^∞-afbildning. For hvert $x \in X$ defineres <u>rangen</u> $rg_x F$ af afbildningen F i punktet x som rangen af differentialet i punktet x (rangen af en lineær afbildning er dimensionen af billedrummet). Beskrives F ved hjælp af tilladte lokale koordinater i X og Y er rangen af F i x altså rangen af funktionalmatricen i punktet x.
Den ved $x \to rg_x F$ bestemte afbildning $X \to \mathring{N}\cup\{0\}$ er i almindelighed <u>ikke</u> lokalt konstant, som simple eksempler viser (f.eks den ved $x \to x^2$ bestemte afbildning $\mathring{R} \to \mathring{R}$), men man kan vise, at den er nedad halvkontinuert.

Lad X og Y være differentiable mangfoldigheder. En C^∞-afbildning $F:X \to Y$ siges at være en <u>immersion</u>, hvis der i ethvert punkt $x \in X$ gælder $rg_x F = \dim_x X$. For immersioner gælder følgende sætning:
<u>Lad X og Y være differentiable mangfoldigheder og $F:X \to Y$ en immersion. Hvis $(x^1,\dots,x^m)$ er tilladte lokale koordinater i X i en omegn</u>

af et punkt $x \in X$, da er det muligt at vælge tilladte lokale koordinater $(y^1,\cdots,y^n)$ i Y i en omegn af $y=F(x)$, således at F med hensyn til disse koordinater beskrives ved funktionssystemet

$$\begin{aligned} y^1 &= x^1 \\ &\cdots \\ y^m &= x^m \\ y^{m+1} &= 0 \\ &\cdots \\ y^n &= 0 \end{aligned}$$

Bevis:

Lad $(\bar{y}^1,\cdots,\bar{y}^n)$ være tilladte lokale koordinater i Y i en omegn af $y=F(x)$. Afbildningen F beskrives da i omegnen af x ved et funktionssystem

$$\begin{aligned} \bar{y}^1 &= \varphi^1(x^1,\cdots,x^m) \\ &\cdots \\ \bar{y}^n &= \varphi^n(x^1,\cdots,x^m). \end{aligned}$$

Dette funktionssystems funktionalmatrix har rangen m i punktet x, og har derfor en $m \times m$ underdeterminant, som er forskellig fra 0 (og der gælder nødvendigvis $m \leqq n$). Efter at der eventuelt er foretaget en omnummerering af $\bar{y}$-erne, vil der altså gælde

$$\det \frac{\partial(\varphi^1,\cdots,\varphi^m)}{\partial(x^1,\cdots,x^m)} \neq 0.$$

Vi betragter nu følgende system af n reelle funktioner af n reelle variable

$$(*) \qquad \begin{aligned} \tilde{y}^1 &= \varphi^1(y^1,\cdots,y^m) \\ &\cdots \\ \tilde{y}^m &= \varphi^m(y^1,\cdots,y^m) \\ \tilde{y}^{m+1} &= y^{m+1} + \varphi^{m+1}(y^1,\cdots,y^m) \\ &\cdots \\ \tilde{y}^n &= y^n + \varphi^n(y^1,\cdots,y^m) \end{aligned}$$

hvor vi har taget funktionerne $\varphi^1,\dots,\varphi^n$ fra systemet ovenfor og blot indførte nye betegnelser for de variable. Dette system er af klasse C^∞ i en omegn af punktet

$$(y^1,\dots,y^n) = \underline{a} = (x^1(x),\dots,x^m(x),0,\dots,0)$$

og afbilder dette i punktet

$$(\tilde{y}^1,\dots,\tilde{y}^n) = \underline{b} = (\bar{y}^1(y),\dots,\bar{y}^n(y)).$$

Endvidere er funktionaldeterminanten forskellig fra 0 i $\underline{a}$. Ifølge en sætning fra analysen (bevises i matematik 2) findes der da åbne omegne Ω og $\tilde{\Omega}$ af $\underline{a}$ og $\underline{b}$, således at (*) bestemmer en bijektiv afbildning $\Omega \to \tilde{\Omega}$, hvor den inverse afbildning også er af klasse C^∞.

Erstatter vi de variable $(\tilde{y}^1,\dots,\tilde{y}^n)$ i (*) med $(\bar{y}^1,\dots,\bar{y}^n)$ kan det fremkomne system altså opfattes som et skift til nye tilladte lokale koordinater $(y^1,\dots,y^n)$ i Y i en omegn af y. Af konstruktionen af $(y^1,\dots,y^n)$ ses, at med hensyn til disse koordinater beskrives F ved funktionssystemet

$$\begin{aligned} y^1 &= x^1 \\ &\dots \\ y^m &= x^m \\ y^{m+1} &= 0 \\ &\dots \\ y^n &= 0, \end{aligned}$$

hvormed sætningen er bevist.

Af denne sætning følger, at en immersion $F:X \to Y$ er <u>lokalt injektiv</u>, altså ethvert punkt $x \in X$ har en åben omegn U, så $F|U$ er injektiv. Vi kan imidlertid yderligere slutte, at <u>ethvert punkt $x \in X$ har en åben omegn U med den egenskab, at der til enhver C^∞-funktion f i X, hvis definitionsmængde er en delmængde af U, findes en C^∞-funktion g i Y, således at $f = g\circ F$.</u> (Denne egenskab kan kort udtrykkes ved, at transporten $g \to g\circ F$ af C^∞-funktioner er lokalt surjektiv).

Er $(x^1,\cdots,x^m)$ og $(y^1,\cdots,y^n)$ nemlig lokale koordinater af den i sætningen omtalte art, er transporten bestemt ved

$$f(x^1,\cdots,x^m) = g(x^1,\cdots,x^m,0,\cdots,0),$$

altså ved at udskifte $(y^1,\cdots,y^m)$ med $(x^1,\cdots,x^m)$ og sætte de øvrige y-er til 0 i $g(y^1,\cdots,y^n)$. Et brugbart $g(y^1,\cdots,y^n)$ til et givet $f(x^1,\cdots,x^m)$ er altså

$$g(y^1,\cdots,y^n) = f(y^1,\cdots,y^m).$$

Vi kan endelig bemærke, at $rg_x F = \dim_x X$ er ensbetydende med, at differentialet dF_x er en injektiv afbildning. En C^∞-afbildning $F:X \to Y$ er altså en immersion når og ken når differentialet dF_x er injektivt i ethvert punkt $x \in X$.

Ved en(abstrakt) flade X forstås en sammenhængende 2-dimensional differentiabel mangfoldighed (d.v.s. det underliggende topologiske rum er sammenhængende, og der gælder $\dim_x X = 2$ i ethvert punkt $x \in X$). Tilladte lokale koordinater i X kaldes parametre i X, og man bruger Hyppigt betegnelserne $(u^1,u^2),(\bar{u}^1,\bar{u}^2),(v^1,v^2)$ eller lignende i dette tilfælde.

Ved en flade i rummet $\mathring{R}^3$ forstås en flade X med en immersion $P:X \to \mathring{R}^3$. Hvis (U,Ω,Φ) er et tilladt kort i X med parametrene (u^1,u^2) ser man, at afbildningen

$$P\circ\Phi:\ \Omega \to \mathring{R}^3$$

er en C^∞-parameterfremstilling i den tidligere (i § 4) definerede forstand. Den er regulær, da P er en immersion.

I hvert punkt $x \in U$ har vi en basis $\partial/\partial u^1, \partial/\partial u^2$ for tangentrummet T_xX, og vi ser af den tidligere udledte koordinatformel for en afbildnings differential, at der gælder

$$dP_x\left(\frac{\partial}{\partial u^1}\right) = \frac{\partial x^i(P\circ\Phi)}{\partial u^1}\frac{\partial}{\partial x^i},$$

hvor (x^1, x^2, x^3) er koordinaterne i $\mathring{R}^3$ (og tilsvarende for $dP_x(\partial/\partial u^2)$). Vektorerne

$$dP_x\left(\frac{\partial}{\partial u^1}\right) \text{ og } dP_x\left(\frac{\partial}{\partial u^2}\right)$$

er altså netop de vektorer, som vi tidligere har betegnet med $\underline{D}_1P$ og $\underline{D}_2P$.

Vi har hermed fået indordnet fladeteorien fra de foregående afsnit under et mere generelt synspunkt. Samtidig hermed har vi også opnået en helt række formelle fordele, idet vi nu på helt præcis og korrekt måde kan tale om dobbeltpunkter på en flade, afbildninger af flade på flade e.t.c.

Lad X være en differentiabel mangfoldighed og U en åben delmængde af X. Ved et <u>tangentvektorfelt i X med definitionsmængde U</u> forstås en afbildning ξ, som til hvert punkt $x \in U$ knytter en tangentvektor ξ_x til X i punktet x.

Lad ξ være et tangentvektorfelt med definitionsmængde U og f en C^∞-funktion med definitionsmængde $V \subseteq U$. For hvert $x \in V$ gælder der da $f \in C^\infty_xX$, og vi kan derfor danne værdien $\xi_x(f)$. Ved $x \to \xi_x(f)$ er altså defineret en reel funktion i V, som betegnes $\xi(f)$. Vi kan endvidere, hvis g er en reel funktion i X med en definitionsmængde $W \subseteq U$, danne et tangentvektorfelt $g\xi$, idet vi sætter

$$(g\xi)_x = g(x)\xi_x$$

for $x \in W$.

Bemærk $(g\xi)(f) = g\cdot(\xi(f))$ i $V\cap W$

De grundlæggende egenskaber (1,2, og 3 på side 11) for tangentvektorer giver anledning til følgende egenskaber ved tangentvektorfelter: Hvis ξ er et tangentvektorfelt, f og g C^∞-funktioner, alle definerede på en åben mængde $U\subseteq X$ og hvis a og b er reelle tal, gælder der:

1. $\xi(af + bg) = a\xi(f) + b\xi(g)$
2. $\xi(f\cdot g) = f\xi(g) + g\xi(f)$
3. Hvis f og g stemmer overens på en åben delmængde $V\subseteq U$, da stemmer $\xi(f)$ og $\xi(g)$ overens på V.

Hvis $(x^1,\cdots,x^n)$ betegner tilladte lokale koordinater i X kan vi indenfor disses domæne for hvert $i = 1,\cdots,n$ definere et tangentvektorfelt ved

$$x \to \frac{\partial}{\partial x^i}$$

(hvor $\partial/\partial x^i$ betegner den på side 12 definerede tangentvektor i punktet x). Dette tangentvektorfelt betegnes også med $\partial/\partial x^i$. For et vilkårligt tangentvektorfelt ξ i X har vi da i ethvert punkt x, hvori ξ er defineret og som ligger i domænet for $(x^1,\cdots,x^n)$, at

$$\xi_x = \xi_x(x^i)\frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Defineres n reelle funktioner $\xi^1,\cdots,\xi^n$ ved

$$\xi^i(x) = \xi_x(x^i) = \xi(x^i)(x)$$

har vi derfor

$$\xi = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

De n reelle funktioner $\xi^1,\cdots,\xi^n$ kaldes <u>koordinatfunktionerne</u> for tangentvektorfeltet ξ med hensyn til de lokale koordinater $(x^1,\cdots,x^n)$.

De er definerede i den del af feltet ξ's definitionsmængde, som ligger indenfor de lokale koordinaters domæne, og der gælder åbenbart, at de bestemmer og er bestemt ved feltets forløb indenfor denne mængde.

Et tangentvektorfelt ξ, defineret på en åben delmængde $U \subseteq X$, siges at være af <u>klasse C^∞</u>, eller man siger, at ξ er et <u>C^∞-tangentvektorfelt,</u> hvis det for enhver C^∞-funktion f med definitionsmængde $V \subseteq U$ gælder, at funktionen $\xi(f)$ er af klasse C^∞ på V.
Et tangentvektorfelt ξ er af klasse C^∞ når og kun når dets koordinatfunktioner med hensyn til et hvilketsomhelst sæt af tilladte lokale koordinater er af klasse C^∞. På den ene side har vi nemlig, at $\xi^i = \xi(x^i)$ er af klasse C^∞, hvis feltet er af klasse C^∞, og omvendt har vi, at

$$\xi(f) = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}(f)$$

er af klasse C^∞, hvis f og $\xi^1, \cdots, \xi^n$ er af klasse C^∞. Af C^∞-fordrageligheden mellem de forskellige tilladte lokale koordinater og af transformationsformlen på side 19, som ses at gælde uændret for et tangentvektorfelts koordinatfunktioner, kan vi da slutte, at et tangentvektorfelt, hvis definitionsmængde er indeholdt i domænet for et sæt at tilladte lokale koordinater $(x^1, \cdots, x^n)$, er af klasse C^∞, når blot dets koordinatfunktioner $\xi^1, \cdots, \xi^n$ med hensyn hertil er af klasse C^∞.

Lad ξ og η være C^∞-tangentvektorfelter, som begge er definerede på en åben delmængde U af en differentiabel mangfoldighed X. Lad endvidere x være et punkt i U. Hvis $f \in C^\infty_x X$ (altså hvis f er en C^∞-funktion, defineret i en omegn af x) er $\eta(f)$ også et element af $C^\infty_x X$, og vi kan derfor danne det reelle tal $\xi_x(\eta(f))$.

Ved

$$f \to \xi_x(\eta(f))$$

er der altså defineret en afbildning $C_x^\infty X \to \mathbb{R}$. Denne afbildning er i almindelighed ikke en tangentvektor til X i punktet x. Ganske vist efterviser man umiddelbart, at egenskaberne 1 og 3 i definitionen af en tangentvektor (side 11) er opfyldt, men i stedet for relationen 2 får man

$$\xi_x(\eta(f\cdot g)) = \xi_x(f\cdot\eta(g) + g\cdot\eta(f))$$
$$= f(x)\ \xi_x(\eta(g)) + g(x)\ \xi_x(\eta(f)) + \xi_x(f)\eta_x(g) + \eta_x(f)\ \xi_x(g).$$

Man bemærker imidlertid, at tillægsleddet (de to sidste addenter) er symmetrisk i ξ og η, hvoraf det følger, at den ved

$$f \to \xi_x(\eta(f)) - \eta_x(\xi(f))$$

bestemte afbildning , vil opfylde identiteten 2. Det er umiddelbart at efterregne, at den også opfylder betingelserne 1 og 3, og den er derfor en tangentvektor til X i punktet x. Da punktet x var vilkårligt valgt i U, er der hermed defineret et nyt tangentvektorfelt på U. Dette felt betegnes med $[\xi,\eta]$ og kaldes Lie-produktet af felterne ξ og η.(I litteraturen møder man ofte andre betegnelser, såsom kommentatorprodukt, Poisson-produkt, Poisson-parenteser el.lign. Endvidere møder man hyppigt $[\xi,\eta]$ defineret som $\eta\circ\xi - \xi\circ\eta$ d.v.s. med modsat fortegn). For en C^∞-funktion f, defineret på en delmængde af U, har vi

$$[\xi,\eta](f) = \xi(\eta(f)) - \eta(\xi(f)),$$

hvoraf vi slutter, at feltet $[\xi,\eta]$ er af klasse C^∞. Lie-produktet er altså en kompositionsregel i mængden af C^∞-tangentvektorfelter, definerede på den åbne mængde U.

Det følger direkte af definitionen, at Lie-produktet er antikommutativt:

$$[\xi,\eta] = -[\eta,\xi],$$

hvor ξ og η er C^∞-tangentvektorfelter på U.

Videre ser man let (under brug af $\xi(af + bg) = a\xi(f) + b\xi(g)$), at Lie-produktet er bilineært:

$$[a\xi + b\eta, \zeta] = a[\xi,\zeta] + b[\eta,\zeta] \text{ og}$$

$$[\xi, a\eta + b\zeta] = a[\xi,\eta] + b[\xi,\zeta],$$

hvor ξ,η,ζ er C^∞-tangentvektorfelter på U og a,b reelle tal. Lie-produktet er ikke associativt , men som en art erstatning har man Jacobi's identitet:

$$[[\xi,\eta],\zeta] + [[\eta,\zeta],\xi] + [[\zeta,\xi],\eta] = 0,$$

som let kan eftervises ved udregning. (De ovenstående egenskaber kan kort udtrykkes ved, at mængden af C^∞-tangentvektorfelter på U danner en Lie-algebra over $\mathbf{R}$, idet man definerer en Lie-algebra over $\mathbf{R}$ som et vektorrum over $\mathbf{R}$ med en antikommutativ, bilineær kompositionsforskrift, der tilfredstiller Jacobi's identitet). Idet ξ og η er C^∞-tangentvektorfelter og f en C^∞-funktion, alle definerede på U, gælder der

$$[f\xi,\eta] = f[\xi,\eta] - \eta(f)\xi \quad \text{og}$$

$$[\xi,f\eta] = f[\xi,\eta] + \xi(f)\eta.$$

Lad nemlig $x \in U$ og $f \in C^\infty_x X$. Da har vi

$$[f\xi,\eta]_x(g) = f(x)\xi_x(\eta(g)) - \eta_x(f\cdot\xi(g))$$

$$= f(x)\xi_x(\eta(g)) - f(x)\eta_x(\xi(g)) - \eta_x(f)\,\xi_x(g)$$

$$= f(x)[\xi,\eta]_x(g) - (\eta(f)\xi)_x(g),$$

hvormed den første identitet er vist. Den anden kan dernæst fås herudfra under brug af Lie-produktets antikommutativitet.

Lad nu $(x^1,\dots,x^n)$ være tilladte lokale koordinater i X og

$$\xi = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} \text{ og } \eta = \eta^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

C^∞- tangentvektorfelter.

Øvelser til § 8

1. Lad $U \subseteq \mathring{R}^n$ være åben og ikke tom og $f:U \to \mathring{R}$ en C^∞-funktion. For et reelt tal a, som f antager som værdi i et punkt i U, defineres $A = \{\underline{x} \in U | f(\underline{x}) = a\}$. Vis at hvis differentialet af f er forskellig fra 0 i ethvert punkt i A, er det muligt at gøre A til en differentiabel mangfoldighed, således at inklusionen $I:A \to U$ (der er bestemt ved $I(\underline{x}) = \underline{x}$ for ethvert $\underline{x} \in A$) bliver en immersion.

2. Vis, at betingelsen 3 i definitionen af en tangentvektor kan undværes, idet den følger af 1 og 2.

3. Vis ved hjælp af lokale koordinater den på side 27 fremsatte påstand: Hvis X og Y er differentiable mangfoldigheder og $F:X \to Y$ en C^∞-afbildning, da har hvert punkt $x \in X$ en omegn U_x, således at $z \in U_x \Rightarrow rg_z F \geq rg_x F$.

4. Vis, at følgende definition på differentiabel mangfoldighed er ensbetydende med tekstens:

En differentiabel mangfoldighed er et Hausdorff-rum X og en mængde C af par (f,U), hvor U er en åben ikke tom delmængde af X og $f:U \to \mathring{R}$ en kontinuert reel funktion, således at der gælder:

1. $(f,U) \in C \wedge (g,U) \in C \Rightarrow (f + g,U) \in C \wedge (f \cdot g,U) \in C$
2. $(f,U) \in C \wedge [U \supseteq V$ ikke tom,åben$] \Rightarrow (f|V,V) \in C$
3. Hvis $U \subseteq X$ er åben, ikke tom og $f:U \to \mathring{R}$ er en reel funktion gælder der $(f,U) \in C$ når blot ethvert punkt $x \in U$ har en åben omegn V_x, så $(f|V_x,V_x) \in C$
4. Til hvert punkt $x \in X$ findes en åben omegn U og en homeomorf afbildning $\Psi:\Omega \to U$, hvor $\Omega \subseteq \mathring{R}^n$ er åben, således at hvis $V \subseteq U$ er åben, ikke tom og $f:V \to \mathring{R}$ en reel funktion, da gælder: $(f,V) \in C \iff f \circ \Psi$ er af klasse C^∞ på $\Psi^{-1}(V)$.

5. Lad X være en differentiabel mangfoldighed og x et punkt i X. Vis, at relationen "f og g stemmer overens i en omegn af x" er en ækvivalensrelation i mængden $C_x^\infty X$.

Ækvivalensklassen bestemt ved $f \in C_x^\infty X$ betegnes $\mathrm{kim}_x f$, og mængden af ækvivalensklasser betegnes $\mathrm{kim}_x X$. Vis, at der ved $\mathrm{kim}_x f + \mathrm{kim}_x g = \mathrm{kim}_x(f + g)$ og $\mathrm{kim}_x f \cdot \mathrm{kim}_x g = \mathrm{kim}_x(f \cdot g)$ bestemmes kompositioner i $\mathrm{kim}_x X$, så denne herved bliver en kommutativ ring. Vis videre, at der ved $a\,\mathrm{kim}_x f = \mathrm{kim}_x(af)$ bestemmes en multiplikation af elementer i $\mathrm{kim}_x X$ med reelle tal, så $\mathrm{kim}_x X$ herved med additionen ovenfor bliver et vektorrum over $\mathring{R}$.

Vis, at der findes en afbildning $v: \mathrm{kim}_x X \to \mathring{R}$, således at $v(\mathrm{kim}_x f) = f(x)$, og at v både er en ring-homomorfi og en lineær afbildning.

Angiv kernen $m_x X$ af afbildningen v og vis, at $m_x X$ er et maksimalt ideal i ringen $\mathrm{kim}_x X$. Vis endvidere, at der ved $w(f) = \mathrm{kim}_x(f-f(x))$, hvor $f(x)$ betegner den pågældende konstante funktion, defineres en surjektiv lineær afbildning $w: C_x^\infty X \to m_x X$.

Lad nu $(m_x X)^2$ betegne mængden af elementer i $\mathrm{kim}_x X$, der kan skrives som en endelig sum $\varphi_1\psi_1 + \cdots + \varphi_k\psi_k$, hvor samtlige φ_i og ψ_i er elementer af $m_x X$. Vis, at $(m_x X)^2$ er et ideal i ringen $\mathrm{kim}_x X$ og et underrum af vektorrummet $m_x X$. Idet $k: C_x^\infty X \to m_x X/(m_x X)^2$ betegner sammensætningen af afbildningen w og den kanoniske afbildning af $m_x X$ på $m_x X/(m_x X)^2$, skal man bevise, at en afbildning $\xi: C_x^\infty X \to \mathring{R}$ er en tangentvektor til X i punktet x, når og kun når der findes en lineær afbildning $\tilde{\xi}: m_x X/(m_x X)^2 \to \mathring{R}$, så $\xi = \tilde{\xi} \circ k$. Vis endvidere, at der ved $\tilde{\xi} \to \tilde{\xi} \circ k$ defineres en isomorfi mellem vektorrummet af linearformer på $m_x X/(m_x X)^2$ og tangentrummet $T_x X$. Vis endelig, at der findes en lineær afbildning $i: m_x X/(m_x X)^2 \to T_x^* X$, så $df = i \circ k(f)$ for enhver $f \in C_x^\infty X$, og at denne afbildning er en isomorfi.

6. (I tilslutning til opgave 5) Lad X og Y være differentiable mangfoldigheder, $F:X \to Y$ en C^∞-afbildning, x et punkt i x og $y = F(x)$. Vis, at der findes en lineær afbildning $F^*:m_yY/(m_yY)^2 \to m_xX/(m_xX)^2$, således at der for $g \in C_y^\infty Y$ gælder $k(g \circ F) = F^*(k(g))$, hvor k'erne betegner den i opgave 2 konstruerede afbildning henholdsvis i X og Y. Vis dernæst, at differentialet dF_x, under anvendelse af isomorfien $\xi \longleftrightarrow \tilde{\xi}$ fra opgave 5, er givet ved

$$\widetilde{dF_x(\xi)} = \tilde{\xi} \circ F^*.$$

7.* Bevis følgende sætning: Givet differentiable mangfoldigheder X og Y, en C^∞-afbildning $F:X \to Y$ og et punkt $x \in X$. Lad endvidere $y = F(x)$. Hvis afbildningen F har konstant rang k i en omegn af punktet x, er det muligt at vælge tilladte lokale koordinater $(x^1,\dots,x^m)$ og $(y^1,\dots,y^n)$ i omegne af x og y, så F beskrives ved funktionssystemet $y^1 = x^1,\dots,y^k = x^k$, $y^{k+1} = \dots = y^n = 0$. (Vis først, at det er muligt at vælge koordinater $(x^1,\dots,x^m)$ og $(\bar{y}^1,\dots,\bar{y}^n)$, så der gælder $\partial\bar{y}^i/\partial x^j = \delta^i_j$ for $i = 1,\dots,k$ og $j = 1,\dots,m$ i ethvert punkt i en omegn af x).

8. Lad X være en differentiabel mangfoldighed og ξ et C^∞-tangentvektorfelt, defineret på en åben mængde $U \subseteq X$. En C^∞-afbildning $\varphi:]a,b[\to U \subseteq X$ kaldes en integralkurve til feltet ξ, hvis der gælder $d\varphi/dt = \xi_{\varphi(t)}$ for ethvert $t \in]a,b[$. Vis, at der til hvert punkt $x \in U$ findes en og kun en integralkurve $\varphi_x:]-\varepsilon,\varepsilon[\to U$ til ξ med $\varphi_x(0) = x$ (hvor $\varepsilon > 0$ afhænger af punktet x).
Find integralkurverne til feltet $- x^2\partial/\partial x^1 + x^1\partial/\partial x^2$ på $\mathbb{R}^2$.

9. Idet elementer i R^k skrives som søjlevektorer bestemmes til en $k \times k$ matrix $\underline{\underline{A}}$ med reelle elementer et tangentvektorfelt ξ på R^k derved, at feltvektoren i punktet $\underline{\underline{x}}| \in R^k$ har koordinatsættet $\underline{\underline{A}}\ \underline{\underline{x}}|$: Vis, at hvis η betegner det felt, som på samme måde bestemmes ved en $k \times k$ matrix $\underline{\underline{B}}$, da er $[\xi,\eta]$ igen et felt af samme art og bestemt ved matricen $\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{B}}\ \underline{\underline{A}} - \underline{\underline{A}}\ \underline{\underline{B}}$.

10. Bevis, at Lie-produktet opfylder Jacobi's identitet (se side 35).

11. Lad X og $\tilde{X}$ være differentiable mangfoldigheder og $F: X \to \tilde{X}$ en C^∞-afbildning. Vis, at hvis ξ,η er C^∞-tangentvektorfelter på X og $\tilde{\xi},\tilde{\eta}$ C^∞-tangentvektorfelter på $\tilde{X}$, således at der i ethvert punkt $x \in X$ gælder $dF_x(\xi_x) = \tilde{\xi}_{F(x)}$ og $dF_x(\eta_x) = \tilde{\eta}_{F(x)}$, da gælder der $dF_x([\xi,\eta]_x) = [\tilde{\xi},\tilde{\eta}]_{F(x)}$ i ethvert punkt $x \in X$.

§9. Riemann'ske mangfoldigheder. Covariant differentiation.

Lad X være en differentiabel mangfoldighed. Ved en Riemann'sk metrik på X forstås en afbildning G, som til hvert punkt $x \in X$ knytter en bilinearform

$$G_x: T_xX \times T_xX \to \mathring{R},$$

hvor følgende betingelser er opfyldt:

For hvert $x \in X$ er G_x symmetrisk, og den tilsvarende kvadratiske form positiv definit.

Afbildningen G er af klasse C^∞, hvormed der menes følgende: Hvis ξ og η er C^∞- tangentvektorfelter på en åben mængde $U \subseteq X$, da er den ved $G(\xi,\eta)(x) = G_x(\xi_x,\eta_x)$ definerede reelle funktion $G(\xi,\eta)$ af klasse C^∞ på U.

Ved en Riemann'sk mangfoldighed forstås et par (X,G), bestående af en differentiabel mangfoldighed X og en Riemann'sk metrik G på X.

Det simpleste eksempel på en Riemann'sk mangfoldighed er talrummet $\mathring{R}^n$ forsynet med den Euklidiske metrik, som med hensyn til de "oprindelige" koordinater $(x^1,\dots,x^n)$ er defineret ved

$$G_x(\xi^i\partial/\partial x^i, \eta^j\partial/\partial x^j) = \xi^1\eta^1+\dots+\xi^n\eta^n = \xi^i\eta^i$$

Opfatter man tangentvektorerne i $\mathring{R}^n$ som geometriske vektorer, er den Euklidiske metrik altså det sædvanlige skalarprodukt $\xi\cdot\eta$.

Det generelle begreb er dannet ved generalisation herudfra, og man benytter derfor geometriske talemåder i forbindelse med Riemann'ske mangfoldigheder. F.eks. defineres længden af en tangentvektor $\xi \in T_xX$ som $(G_x(\xi,\xi))^{\frac{1}{2}}$ (hvilket er muligt, da G_x er positiv definit), og for $\xi,\eta \in T_xX$ omtales $G_x(\xi,\eta)$ hyppigt som skalarproduktet af ξ og η. (I denne sammenhæng skal dog bemærkes, at dette kun er defineret, hvis ξ og η er tangentvektorer i det samme punkt i X).

Lad (X,G) være en Riemann'sk mangfoldighed og $(x^1,\dots,x^n)$ tilladte lokale koordinaler i X med domæne U. Ved

$$g_{ij}(x) = G_x(\partial/\partial x^i, \partial/\partial x^j)$$

defineres n^2 funktioner g_{ij} på U. Af bilineateten fås, at

$$G_x(\xi,\eta) = g_{ij}(x)\xi^i\eta^j$$

hvis $\xi = \xi^i\partial/\partial x^i$ og $\eta = \eta^j\partial/\partial x^j$ er tangentvektorer i et punkt $x\in U$. Funktionerne g_{ij} kaldes derfor <u>koordinatfunktionerne</u> for G med hensyn til koordinaterne $(x^1,\dots,x^n)$. Idet $\partial/\partial x^i$, $i = 1,\dots,n$ er C^∞-tangentvektorfelter på U ser man, at funktionerne g_{ij} er C^∞-funktioner på U. Symmetrien af bilinearformerne G_x, giver at der gælder $g_{ij} = g_{ji}$ i U. Da de tilsvarende kvadratiske former er positivt definite, har vi, at funktionen $g = \det\{g_{ij}\}$ er positiv overalt i U.

I ethvert punkt $x\in X$ kan bilinearformen G_x opfattes som en lineær afbildning

$$G_x : T_xX \to T^*_xX$$

idet vi for $\xi\in T_xX$ definerer covektoren $G_x(\xi): T_xX \to \mathbb{R}$ ved $G_x(\xi)(\eta) = G_x(\xi,\eta)$. Da G_x er symmetrisk, defineres der den samme afbildning ved $G_x(\xi)(\eta) = G_x(\eta,\xi)$. Hvis $\xi\neq 0$ har vi $G_x(\xi,\xi) > 0$ og dermed, at covektoren $G_x(\xi)$ ikke er nulcovektoren. Den lineære afbildning G_x har altså kernen $\{0\}$ og er følgelig injektiv. Idet der gælder $\dim T_xX = \dim T^*_xX$, følger heraf, at G_x er en isomorfi mellem T_xX og T^*_xX.

I lokale koordinater får vi

$$G_x(\partial/\partial x^i)(\partial/\partial x^j) = G_x(\partial/\partial x^i, \partial/\partial x^j) = g_{ij}(x)$$

og hermed

$$G_x(\xi) = g_{ij}(x)\ \xi^i dx^j,$$

idet $\xi = \xi^i\partial/\partial x^i$.

får vi efter lidt regning, at

$$D_\xi \eta = \bar{\xi}^i \frac{\partial \bar{\eta}^j}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial}{\partial \bar{x}^j} + \bar{\xi}^i \bar{\eta}^p \frac{\partial^2 x^q}{\partial \bar{x}^i \partial \bar{x}^p} \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^q} \frac{\partial}{\partial \bar{x}^j}.$$

Den simple formel (*) for koordinaterne til $D_\xi \eta$ er altså ikke gyldig i vilkårlige krumliniede koordinater i $\mathring{R}^n$, hvilket naturligvis skyldes, at man ved definitionen af $D_\xi \eta$ har benyttet den sammenligning af feltvektorer for feltet η i forskellige punkter, som udspringer af koordinaterne $(x^1,\dots,x^n)$ (se bemærkningen på side 21 i § 8). Dette indebærer, at man ikke kan generalisere den retningsafledede i $\mathring{R}^n$ til vilkårlige differentiable mangfoldigheder blot ved at generaliserer formlen (*), idet den fremkomne vektor vil være afhængig af valget af lokale koordinater, og i selve begrebet differentiabel mangfoldighed ligger ingen fremhævelse af visse tilladte lokale koordinater frem for andre.

Retningsdifferentiationen D af vektorfelter i $\mathring{R}^n$ har imidlertid en række egenskaber som sammenknytter den med den Euklidiske metrik i $\mathring{R}^n$. De vigtigste af disse anføres nedenfor. Af hensyn til generalisationen i det følgende betegner vi i denne liste den Euklidiske metrik med G og for overskuelighedens skyld bruger vi en kortfattet form, hvor funktion betyder C^∞-funktion i $\mathring{R}^n$, defineret i en omegn af punktet x, vektor betyder tangentvektor til $\mathring{R}^n$ i punktet x og felt betyder C^∞-tangentvektorfelt i $\mathring{R}^n$, defineret i en omegn af punktet x.

(o) $D_\xi \eta = D_\xi \zeta$ for vektor ξ, felter η og ζ, hvis η og ζ stemmer overens i en omegn af x.

(1) $D_{a\xi + b\eta}\zeta = aD_\xi\zeta + bD_\eta\zeta$,
hvor a,b er reelle tal, ξ,η vektorer og ζ et felt

(2) $D_\xi(\eta+\zeta) = D_\xi\eta + D_\xi\zeta$,
hvor ξ er en vektor og η,ζ felter.

(3) $D_\xi(f\eta) = \xi(f)\eta_x + f(x)\, D_\xi\eta,$
hvor f er en funktion, ξ en vektor og η et felt.

(4) $D_{\xi_x}\eta - D_{\eta_x}\xi = [\xi,\eta]_x,$
hvor ξ og η er felter

(5) $\xi(G(\eta,\zeta)) = G_x(D_\xi\eta,\zeta_x) + G_x(\eta_x,D_\xi\zeta),$
hvor ξ er en vektor og η,ζ felter.

(0), (1) og (2) følger uden videre af formlen (*). Angående (3) har vi:

$$D_\xi(f\eta) = \xi^i \frac{\partial(f\eta^j)}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^j} = \xi^i \frac{\partial f}{\partial x^i}\eta^j(x)\frac{\partial}{\partial x^j} + f(x)\xi^i\frac{\partial\eta^j}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^j}$$

$$= \xi(f)\eta_x + f(x)D_\xi\eta.$$

Angående (4):

$$D_{\xi_x}\eta - D_{\eta_x}\xi = \xi^i(x)\frac{\partial\eta^j}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^j} - \eta^i(x)\frac{\partial\xi^j}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^j} = [\xi,\eta]_x$$

ifølge koordinatformlen § 8 side 36.

Angående (5)

$$\xi(G(\eta,\zeta)) = \xi(\eta^i\zeta^i) = \xi^j\frac{\partial}{\partial x^j}(\eta^i\zeta^i)$$

$$= (\xi^j\frac{\partial\eta^i}{\partial x^j})\zeta^i(x) + \eta^i(x)\ (\xi^j\frac{\partial\zeta^i}{\partial x^j})$$

$$= G_x(D_\xi\eta,\zeta_x) + G_x(\eta_x,D_\xi\zeta).$$

Man bemærker, at denne sidste formel er produktreglen for differentiation af et skalprodukt.

Vi kan nu formulere og bevise følgende sætning (den Riemann'ske geometris hovedsætning):

<u>Givet en Riemann'sk mangfoldighed (X, G). Da findes til hvert punkt</u>

<u>$x \in X$ en og kun en operator ∇, som til en tangentvektor ξ i punktet x og et C^∞-tangentvektorfelt η, defineret i en omegn af punktet x, lader svare en tangentvektor $\nabla_\xi \eta$ i punktet x og som har de til (0)-(5) svarende egenskaber</u> (hvor vi erstatter D med ∇ og lader G betegne den Riemann'ske metrik på X).

<u>Bevis</u>: Først <u>entydigheden</u>: Lad $(x^1,\ldots,x^n)$ være tilladte lokale koordinater i X i en omegn af punktet x og lad ∇ være en operator af den omtalte art. Vi kan da definere n^3 reelle tal Λ^k_{ij} ved følgende relation mellem tangentvektorer i punktet x:

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \Lambda^k_{ij} \frac{\partial}{\partial x^k} .$$

Af (4) får vi, idet $[\partial/\partial x^i, \partial/\partial x^j] = 0$, at

$$\Lambda^k_{ij} \frac{\partial}{\partial x^k} - \Lambda^k_{ji} \frac{\partial}{\partial x^k} = 0 ,$$

altså $\Lambda^k_{ij} = \Lambda^k_{ji}$.

Idet $G(\partial/\partial x^j, \partial/\partial x^k) = g_{jk}$ giver (5) med $\xi = \partial/\partial x^i$, $\eta = \partial/\partial x^j$ og $\zeta = \partial/\partial x^k$, at

$$\frac{\partial}{\partial x^i} g_{jk} = g_{pk}\Lambda^p_{ij} + g_{jp}\Lambda^p_{ik}$$

(hvor symbolerne betegner funktionsværdier i punktet x). Idet

$$g_{pk}\Lambda^p_{ij} = g_{kp}\Lambda^p_{ij} = g_{pk}\Lambda^p_{ji} = g_{kp}\Lambda^p_{ji}$$

får vi heraf:

$$\begin{aligned} g_{pk}\Lambda^p_{ij} &= \tfrac{1}{2}(g_{pk}\Lambda^p_{ij} + g_{jp}\Lambda^p_{ik}) + \tfrac{1}{2}(g_{pi}\Lambda^p_{jk} + g_{kp}\Lambda^p_{ji}) \\ &\quad - \tfrac{1}{2}(g_{pj}\Lambda^p_{ki} + g_{ip}\Lambda^p_{kj}) \\ &= \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x^i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x^j} g_{ki} - \frac{\partial}{\partial x^k} g_{ij}\right), \end{aligned}$$

hvilket giver

$$\Lambda^r_{ij} = g^{kr} g_{pk} \Lambda^p_{ij} = \Gamma^r_{ij},$$

idet vi (ligesom i fladeteorien) bruger betegnelsen

$$\Gamma^r_{ij} = \tfrac{1}{2} g^{rk} \left(\frac{\partial}{\partial x^i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x^j} g_{ki} - \frac{\partial}{\partial x^k} g_{ij} \right).$$

Af (1), (2) og (3) fås så, idet $\xi = \xi^i \partial/\partial x^i$ og $\eta = \eta^j \partial/\partial x^j$, at

$$\nabla_\xi \eta = \xi^i \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \left(\eta^j \frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \xi^i \left(\frac{\partial \eta^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} + \eta^j \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} \right)$$

$$= \xi^i \left(\frac{\partial \eta^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} + \eta^j \Gamma^k_{ij} \frac{\partial}{\partial x^k} \right) = \left(\xi^i \frac{\partial \eta^k}{\partial x^i} + \xi^i \eta^j \Gamma^k_{ij} \right) \frac{\partial}{\partial x^k} .$$

Hermed er entydigheden bevist.

Dernæst eksistensen: Vi vælger tilladte lokale koordinater $(x^1, \dots, x^n)$ i X i en omegn af punktet x og definerer

$$\nabla_\xi \eta = \left(\xi^i \frac{\partial \eta^k}{\partial x^i} + \xi^i \eta^j \Gamma^k_{ij} \right) \frac{\partial}{\partial x^k} ,$$

idet størrelserne Γ^k_{ij} er bestemt ud fra $g_{ij} = G(\partial/\partial x^i, \partial/\partial x^j)$ som ovenfor. Det ses umiddelbart, at (0), (1) og (2) er opfyldt.

(3): Idet

$$\frac{\partial (f \eta^k)}{\partial x^i} = \frac{\partial f}{\partial x^i} \eta^k + f \frac{\partial \eta^k}{\partial x^i},$$

ser man ved indsættelse i definitionsligningen, at (3) er opfyldt.

(4): Af definitionen på størrelserne Γ^k_{ij} aflæses, at $\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$ (da der gælder $g_{ij} = g_{ji}$). Herefter følger påstanden af definitionen på $\nabla_\xi \eta$ og koordinatformlen for $[\xi, \eta]$.

(5): Af definitionen på Γ^k_{ij} aflæses, at

$$\tfrac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x^i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x^j} g_{ki} - \frac{\partial}{\partial x^k} g_{ij} \right) = g_{rk} \Gamma^r_{ij} .$$

Denne ligning giver adderet til den samme med kredsforskudte indices $(i,j,k) \to (k,i,j)$, at

$$\frac{\partial}{\partial x^i} g_{jk} = g_{rk} \Gamma^r_{ij} + g_{rj} \Gamma^r_{ki} \;.$$

Heraf følger så (5):

$$\xi(G(\eta,\zeta)) = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}(g_{jk}\eta^j\zeta^k)$$

$$= \xi^i g_{rk} \Gamma^r_{ij}\eta^j\zeta^k + \xi^i g_{rj} \Gamma^r_{ki}\eta^j\zeta^k$$

$$+ \xi^i g_{jk} \frac{\partial\eta^j}{\partial x^i} \zeta^k + \xi^i g_{jk}\eta^j \frac{\partial\zeta^k}{\partial x^i}$$

$$= g_{rk}(\xi^i \frac{\partial\eta^r}{\partial x^i} + \xi^i\eta^j \Gamma^r_{ij})\zeta^k$$

$$+ g_{rj}\eta^j(\xi^i \frac{\partial\zeta^r}{\partial x^i} + \xi^i\zeta^j \Gamma^r_{ij})$$

$$= G_x(\nabla_\xi\eta,\zeta_x) + G_x(\eta_x,\nabla_\xi\zeta) \;.$$

Hermed er eksisten også bevist.

Operatoren ∇ kaldes den <u>covariante differentiation</u> på (X,G).

Fra beviset har vi koordinatformlen

$$\nabla_\xi\eta = (\xi^i \frac{\partial\eta^k}{\partial x^i} + \xi^i\eta^j \Gamma^k_{ij})\frac{\partial}{\partial x^k} \;,$$

og specielt har vi altså bevist, at tangentvektoren på højre side i denne formel er den samme for ethvert valg af tilladte lokale koordinater $(x^1,\ldots,x^n)$. (Størrelserne Γ^k_{ij} betegner naturligvis de til de pågældende lokale koordinater knyttede). Af formlen for Christoffelsymbolerne Γ^k_{ij} ses, at de er C^∞-funktioner indenfor domænet af de pågældende lokale koordinater. Heraf følger, at <u>hvis</u>

Feltet ξ er et C^∞-felt, hvis koordinatfunktionerne $\xi^i(t)$ er C^∞-funktioner for ethvert valg af lokale koordinater af den ovennævnte art. Ved $\tilde{\xi} = \tilde{\xi}^i \partial/\partial x^i$, hvor $\tilde{\xi}^i(x^1,\dots,x^n) = \xi^i(x^1)$ defineres nemlig da et felt $\tilde{\xi}$ med de ønskede egenskaber i en omegn af punktet $\varphi(t_o)$.

Hvis ξ er et C^∞-felt langs kurven K og $\tilde{\xi}$ en lokal udvidelse af ξ til en omegn i X af et kurvepunkt $\varphi(t_o)$ kan vi danne den covariante afledede

$$\nabla_{d\varphi(t_o)/dt}\tilde{\xi}.$$

<u>Denne afledede er den samme for ethvert valg af udvidelse $\tilde{\xi}$.</u> Betegner nemlig $(x^1,\dots,x^n)$ lokale koordinater i X i en omegn af punktet $\varphi(t_o)$ (ikke nødvendigvis af den ovenfor betragtede specielle type), betyder relationen $\xi_t = \tilde{\xi}_{\varphi(t)}$, at koordinatfunktionerne for $\xi_t = \xi^i(t)\partial/\partial x^i$ og $\tilde{\xi} = \tilde{\xi}^i\partial/\partial x^i$, opfylder

$$\xi^i(t) = \tilde{\xi}^i(x^1(\varphi(t)),\dots,x^n(\varphi(t)))$$

for t i en omegn af t_o. Heraf fås

$$\frac{d\xi^k}{dt} = \frac{\partial\tilde{\xi}^k}{\partial x^i}\frac{dx^i(\varphi)}{dt}$$

og hermed

$$\nabla_{d\varphi(t_o)/dt}\tilde{\xi} = \left(\frac{dx^i(\varphi)}{dt}\frac{\partial\tilde{\xi}^k}{\partial x^i} + \frac{dx^i(\varphi(t))}{dt}\tilde{\xi}^j\Gamma^k_{ij}\right)\frac{\partial}{\partial x^k}$$

$$= \left(\frac{d\xi^k(t)}{dt} + \frac{dx^i(\varphi(t))}{dt}\xi^j(t)\,\Gamma^k_{ij}(\varphi(t))\right)\frac{\partial}{\partial x^k},$$

hvoraf påstanden følger. Denne afledede kaldes <u>den covariante afledede af feltet ξ langs kurven K med hensyn til parameteren t</u> og den betegnes $\delta\xi/\delta t$.

Hvis ξ og η er C^∞-tangentvektorfelter i X langs kurven K gælder der

$$\frac{d}{dt}G(\xi,\eta) = G(\frac{\delta\xi}{\delta t},\eta) + G(\xi,\frac{\delta\eta}{\delta t}).$$

Betegner nemlig $\tilde{\xi}$ og $\tilde{\eta}$ lokale udvidelser af felterne ξ og η har vi ifølge definitionen af hastighedsvektoren $d\varphi/dt$ (§ 8 s. 23) og egenskab (5) ved den covariante differentiation, at

$$\frac{d}{dt}G(\xi,\eta) = \frac{d\varphi}{dt}(G(\tilde{\xi},\tilde{\eta})) = G(\nabla_{d\varphi/dt}\tilde{\xi},\tilde{\eta}) + G(\tilde{\xi},\nabla_{d\varphi/dt}\tilde{\eta})$$

$$= G(\frac{\delta\xi}{\delta t},\eta) + G(\xi,\frac{\delta\eta}{\delta t}).$$

Hermed er vi rustet til at definere de grundlæggende begreber i kurveteorien. Længden

$$(G_{\varphi(t)}(\frac{d\varphi}{dt}, \frac{d\varphi}{dt}))^{\frac{1}{2}}$$

af hastighedsvektoren $d\varphi/dt$ kaldes <u>farten</u> på kurven K ved parameteren t. Den er overalt positiv, da $d\varphi/dt$ aldrig er nulvektoren, og vi kan derfor indføre <u>naturlig parameter</u> og dermed <u>buelængde</u> på K ved

$$\frac{ds}{dt} = (G_{\varphi(t)}(\frac{d\varphi}{dt}, \frac{d\varphi}{dt}))^{\frac{1}{2}}. \quad : \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = g_{ij}^{(t)}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt}$$

Hastighedsvektoren $d\varphi/ds$ med hensyn til en naturlig parameter på K bliver åbenbart en enhedsvektor. Den kaldes <u>tangentvektoren</u> for kurven K og betegnes $v_1(s)$. Skrives disse ting op svarende til lokale koordinater i X får man de samme formler som i fladeteorien. Kurvens <u>krumning</u> $\kappa(s)$ kan nu defineres ved

$$\kappa(s)^2 = G_{\varphi(s)}(\delta v_1/\delta s, \delta v_1/\delta s)$$

med en fortegnskonvention. Hvis dim X > 2 vælger vi (ligesom i rumkurveteorien) det positive fortegn, altså $\kappa(s) \geq 0$, mens der i tilfældet dim $X=2$ er mulighed for at regne krumningen med fortegn ligesom i den plane kurveteori.

Dette sidste forudsætter dog at mangfoldigheden X er <u>orienteret</u>, og vi må derfor først definere, hvad vi vil forstå ved en orientering af en differentiabel mangfoldighed:

Ved en orientering af en differentiabel mangfoldighed X forstås et system af orienteringer af samtlige tangentrum T_xX, $x \in X$ med den egenskab, at der til ethvert punkt $x_o \in X$ findes tilladte lokale koordinater $(x^1,\dots,x^n)$ i X i en omegn U af x_o, således at basisvektorerne $\partial/\partial x^1,\dots,\partial/\partial x^m$, taget i denne rækkefølge, inducerer den foreskrevne orientering af ethvert af tangentrummene T_xX, $x \in U$.

Ved en <u>orienteret</u> differentiabel mangfoldighed forstås en differentiabel mangfoldighed X med en orientering. Lokale koordinater af den i definitionen af orientering omtalte art siges at være i overensstemmelse med orienteringen.

Man kan give eksempler på differentiable mangfoldigheder, som ikke kan orienteres - sådanne vil vi dog ikke betragte her.

Vi kan nu behandle fortegnskonventionen for krumningen. Lad altså X være en (abstrakt) flade og lad der være givet en Riemann'sk metrik G og en orientering på X. For en kurve K i X med naturlig parameter s og tangentvektor $v_1(s)$ gælder, at $v_1(s)$ og $\delta v_1(s)/\delta s$ står vinkelret på hinanden d.v.s. $G(v_1, \delta v_1/\delta s) = 0$. Idet $v_1(s)$ er en enhedsvektor har vi nemlig $G(v_1,v_1) = 1$ og dermed

$$0 = \frac{d}{ds} G(v_1,v_1) = 2G(v_1,\delta v_1/\delta s).$$

Hvis $\delta v_1/\delta s \neq 0$ er v_1 og $\delta v_1/\delta s$ altså lineært uafhængige og vi kan derfor formulere fortegnskanventionen: Krumningen $\kappa(s)$ er positiv, hvis omløbsretningen fra v_1 til $\delta v_1/\delta s$ er den givne orientering af tangentrummet til X i kurvepunktet mens $\kappa(s)$ er negativ, hvis den er modsat den givne orientering.

Ved at sammenholde koordinatformlen ovenfor for den covariante afledede af et tangentvektorfelt langs en kurve med formlen i § 7 side 9 ser man, at den der betragtede covariante afledede er et specialtilfælde af den her definerede. Videre ser man af bemærkningen § 7 side 9 nederst, at den geodætiske krumning af en fladekurve præcis er kurvens krumning på fladen i den ovenfor definerede forstand. Med det ovenstående har vi altså opnået en bedre forståelse af disse begrebers indregeometriske natur, idet vi nu har en definition, som kun benytter fladens strktur som differentiabel mangfoldighed og den ved realisationen i rummet inducerede Riemann'ske metrik d.v.s. den metriske fundamentalform. Man ser, at vi generelt kan uddybe og klargøre den tidligere definition af en flades indre geometri ved at bemærke, at den indre geometri af en flade $(X,\underset{\cdot}{P})$ i rummet $\hat{R}^3$ er geometrien af den Riemann'ske mangfoldighed (X,G), hvor G er den metriske fundamentalform af (X,P).

Den i § 7 indførte <u>geodætiske parallelforskydning</u> lader sig uden videre overføre til vilkårlige Riemann'ske mangfoldigheder, idet vi har den covariante differentiation langs en kurve som ovenfor defineret. Som følge heraf får vi også begrebet <u>geodætisk kurve</u> generaliseret. I den følgende paragraf skal vi se, at de sidst i § 7 anførte overvejelser om den Gauss'ske krumnings indre-geometriske natur også tillader en sådan generalisation.

Lad (X,G) være en Riemann'sk mangfoldighed. En C^∞-immersion $\varphi :]a,b[\to X$ er naturlig parameterfremstilling for en geodætisk kurve når og kun når hastighedsvektoren $d\varphi/dt$ er en enhedsvektor og danner et geodætisk parallelfelt langs kurven, altså når og kun når

$$G_{\varphi(t)}\left(\frac{d\varphi}{dt},\frac{d\varphi}{dt}\right) = 1, \quad \frac{\delta}{\delta t}\frac{d\varphi}{dt} = 0.$$

Betegner $(x^1,\dots,x^n)$ tilladte lokale koordinater i X og sættes $x^i(\varphi(t)) = \varphi^i(t)$ har vi

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\varphi^i}{dt}\frac{\partial}{\partial x^i}, \quad \frac{\delta}{\delta t}\frac{d\varphi}{dt} = \left(\frac{d^2\varphi^k}{dt^2} + \frac{d\varphi^i}{dt}\frac{d\varphi^j}{dt}\Gamma^k_{ij}\right)\frac{\partial}{\partial x^k}.$$

Er $\varphi(t)$ naturlig parameterfremstilling for en geodætisk kurve, gælder der altså

$$(*) \qquad \frac{d^2\varphi^k}{dt^2} + \frac{d\varphi^i}{dt}\frac{d\varphi^j}{dt}\Gamma^k_{ij} = 0, \quad k = 1,\dots,n.$$

Har vi omvendt n C^∞-funktioner $\varphi^1(t),\dots,\varphi^n(t)$, som tilfredsstiller ovenstående differentialligningssystem (hvor vi for hvert t tager værdien af Γ^k_{ij} i punktet med koordinatsættet $\varphi^1(t),\dots,\varphi^n(t)$) og er disse funktioner ikke alle konstante, da udsiger differentialligningssystemet, at vektorfeltet

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\varphi^i}{dt}\frac{\partial}{\partial x^i}$$

er et geodætisk parallelfelt langs den ved $\varphi^1,\dots,\varphi^n$ parameterfremstillede kurve. Heraf sluttes

$$\frac{d}{dt}G_{\varphi(t)}\left(\frac{d\varphi}{dt},\frac{d\varphi}{dt}\right) = 2\left(\frac{d\varphi}{dt},\frac{\delta}{\delta t}\frac{d\varphi}{dt}\right) = 0,$$

1. På en Riemann'sk mangfoldighed (X,G) defineres vinklen $v = \sphericalangle(\xi,\eta)$ mellem to tangentvektorer $\xi \neq 0$ og $\eta \neq 0$ i et punkt $x \in X$ ved

$$G_x(\xi,\eta) = (G_x(\xi,\xi)G_x(\eta,\eta))^{\frac{1}{2}}\cos v.$$

Vis, at den herved definerede vinkel er reel, altså $|\cos v| \leqq 1$. Vinklen v er entydigt bestemt herved, hvis man vælger $0 \leq v \leq \pi$. Vis, at hvis X er en orienteret flade (med metrik G) findes der en naturlig fortegnsregning, så vi kan tillægge v en entydig værdi med $-\pi < v \leqq \pi$.

Lad (X,G) og $(\tilde{X},\tilde{G})$ være Riemann'ske mangfoldigheder. En C^∞-immersion $F : X \to \tilde{X}$ siges at være konform (eller vinkeltro), hvis der for hvert punkt $x \in X$ og tangentvektorer $\xi,\eta \in T_xX$, $\xi \neq 0$, $\eta \neq 0$, gælder

$$\sphericalangle(dF_x(\xi), dF_x(\eta)) = \sphericalangle(\xi,\eta),$$

(hvor vinklerne begge er valgt i intervallet $[0,\pi[$). Vis, at F er konform når og kun når der til hvert punkt $x \in X$ findes et reelt tal $\mu(x) > 0$, således at der for hvilkesomhelst tangentvektorer $\xi,\eta \in T_xX$ gælder

$$\tilde{G}_{F(x)}\,(dF_x(\xi), dF_x(\eta)) = \mu(x)\; G_x(\xi,\eta).$$

(Vis først, at der findes en basis $\xi_1,\dots,\xi_n$ for T_xX, således at $G_x(\xi_i,\xi_j) = \delta_{ij}$).
Størrelsen $\sqrt{\mu(x)}$ kaldes målestoksforholdet i punktet x for afbildningen F. $\mu\,\underline{\underline{G}} = \mu\;\underline{\Phi}^*\underline{\tilde{G}}\,\underline{\Phi}$

Skriv betingelsen for, at F er konform, på koordinatform, svarende til lokale koordinater i X og $\tilde{X}$

Lad X være en flade med Riemann'sk metrik G og $K = (U,\Omega,\Phi)$ et tilladt kort i X med parametre (u^1,u^2). Parametrene (u^1,u^2)

siges da at være konforme parametre i (X,G), hvis afbildningen $\Phi : \Omega \to U$ er konform, idet $\Omega \subseteq \mathring{R}^2$ forsynes med den Euklidiske metrik i $\mathring{R}^2$. Vis, at (u^1,u^2) er konforme parametre når og kun når

$$g_{11} = g_{22} \text{ og } g_{12} = g_{21} = 0.$$

Lad (X,G) og $(\tilde{X},\tilde{G})$ være flader med Riemann'ske metrikker, (u^1,u^2) konforme parametre på hele X og (v^1,v^2) konforme parametre på hele $\tilde{X}$. Vis, at en C^∞-immesion $F : X \to \tilde{X}$ er konform, når og kun når den i parametrene er beskrevet ved, at $w = v^1 + i\, v^2$ er en holomorf funktion eller den komplekst konjugerede til en holomorf funktion af $z = u^1 + i\, u^2$.

2. Ved

$$g_{11} = g_{22} = \frac{4}{(1+(u^1)^2+(u^2)^2)^2}, \quad g_{12} = g_{21} = 0$$

bestemmes en Riemann'sk metrik G på $\mathring{R}^2$. Benyt resultatet fra opgave 1 til en bestemmelse af samtlige bijektive C^∞-immersioner $\mathring{R}^2 \to \mathring{R}^2$, som er konforme med hensyn til G. Sammenlign med resultatet fra øvelse 4 i § 7 og beskriv herved samtlige bijektive og konforme afbildninger med et givet punkt som fixpunkt af en kugleflade på sig selv.

3. (Fladeteorien i parameterfri formulering). Idet (u^1,u^2,u^3) er krumliniede koordinater i en åben mængde $U \subseteq \mathring{R}^3$ betegner X mængden af punkter i U med $u^3 = 0$, X er da en flade med (u^1,u^2) som parametre og indlejringen $X \subset \mathring{R}^3$ er en immersion. Tangentvektorerne til X identificeres i det følgende med deres billeder i $\mathring{R}^3$ ved indlejningen. Vektorer i $\mathring{R}^3$ betegnes $\underline{a}$, $\underline{b}$ etc. for at få overens-

stemmelse med betegnelserne i § 4 og 5. Idet $\underline{a}$ er en vektor i $\mathring{R}^3$ i et punkt $x \in X$, har vi en entydig opspaltning $\underline{a} = \text{Tan}(\underline{a}) + \text{Nor}(\underline{a})$, hvor Tan($\underline{a}$) er tangentvektor til X i punktet x, mens Nor($\underline{a}$) står vinkelret på X i punktet x d.v.s. $\underline{a} \cdot \underline{b} = 0$ for enhver $\underline{b} \in T_x X$.

Vis , at hvis $\underline{a}$ og $\underline{b}$ er C^∞-vektorfeltet på U, som er tangentielle langs X, altså hvor $\underline{a}_x, \underline{b}_x \in T_x X$ for hvert $x \in X$, da er feltet $[\underline{a},\underline{b}]$ også tangentielt langs X og dets restriktion til X identisk med Lie-produktet i X af $\underline{a}$ og $\underline{b}$'s restriktioner til X. Vis, at et vilkårligt C^∞-tangentvektorfelt $\underline{a}$ på X kan fås som restriktionen til X af et C^∞-vektorfelt $\tilde{\underline{a}}$ på U. Vis med disse betegnelser, at idet $\underline{b} \in T_x X$ er Tan $(D_{\underline{b}}\tilde{\underline{a}})$ den covariante afledede $\nabla_{\underline{b}}\underline{a}$ med hensyn til den metriske fundamentalform af X i $\mathring{R}^3$. (Gør dette ved at vise, at egenskaberne (0) - (5) er opfyldt).

Lad nu $\underline{N}$ betegne et C^∞-vektorfelt i U, der har den egenskab, at for hvert $x \in X$ er $\underline{N}_x$ en enhedsnormalvektor til X i punktet x (sådanne felter findes). Vis, at idet vi definerer en bilinearform L på $T_x X$ ved $L(\underline{a},\underline{b}) = - \underline{a} \cdot D_{\underline{b}}\underline{N}$ gælder der $\text{Nor}(D_{\underline{b}}\tilde{\underline{a}}) = L(\underline{a},\underline{b})\underline{N}$ (idet vi bibeholder betegnelserne ovenfor). Vis, at L er en symmetrisk bilinearform.

Vis, at for en kurve på X med naturlig parameter s og tangentvektor $\underline{v}_1(s)$, gælder der

$$\frac{d}{ds}\underline{v}_1 = \frac{\delta}{\delta s}\underline{v}_1 + L(\underline{v}_1,\underline{v}_1)\underline{N}$$

og bevis herved Meusnier's sætning pånу. Skriv resultaterne ud på koordinatform svarende til parametrene (u^1,u^2) og sammenlign med formlerne i § 4 og 5.

4. Idet X er en orienteret flade og G en Riemann'sk metrik på X kan vi i ethvert punkt $x \in X$ definere en lineær afbildning $T_x X \to T_x X$, der afbilder $\xi \in T_x X$ på dennes tværvektor $\hat{\xi}$, som for $\xi \neq 0$ er fast-

lagt ved

1. ξ og $\hat{\xi}$ har samme længde

2. ξ og $\hat{\xi}$ er ortogonale, altså $G_x(\xi,\hat{\xi}) = 0$

3. Omløbsretningen fra ξ til $\hat{\xi}$ er den ved orienteringen givne.

Vis, at hvis parametrene (u^1,u^2) er valgt i overensstemmelse med orienteringen, gælder der

$$\hat{\xi}^k = \varepsilon_{ij}\xi^i g^{jk}\ , \quad \text{hvor } \varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = 0,\ \varepsilon_{12} = -\varepsilon_{21} = \sqrt{g}.$$

Giv herved en geometrisk interpretation af formlen for κ_g i § 7 side ~~6~~4.

5. Vis, at hvis (X,G) er en Riemann'sk mangfoldighed og $x_o \in X$ et punkt af X, da findes tilladte lokale koordinater $(x^1,\ldots,x^n)$ i X i en omegn af punktet x_o, således at der gælder $\Gamma^i_{jk}(x_o) = 0$ for $i,j,k = 1,\ldots,n$. Sådanne koordinater siges at være geodætiske i punktet x_o. (Start med lokale koordinater $(\bar{x}^1,\ldots,\bar{x}^n)$, hvor $\bar{x}^i(x_o) = 0$, og forsøg med et koordinatskift $\bar{x}^i = x^i + a^i_{jk}x^jx^k$, hvor konstanterne a^i_{jk} vælges på passende måde).
Vis, at hvis de tilladte koordinater $(x^1,\ldots,x^n)$ og $(\tilde{x}^1\ldots,\tilde{x}^n)$ begge er geodætiske i x_o, da gælder der

$$\frac{\partial^2 \tilde{x}^k}{\partial x^i \partial x^j} = 0$$

for $i,j,k = 1,\ldots,n$ i punktet x_o.

6.* Lad (X,G) være en flade med Riemann'sk metrik og $\varphi :]a,b[\to X$ en C^∞-immersion. Vis, at der til ethvert $t_o \in]a,b[$ findes parametre (u^1,u^2) i X i en omegn af punktet $\varphi(t_o)$, som er geodætiske i ethvert punkt $\varphi(t)$ for t i en omegn af t_o (sml. øvelse 5). (Begynd med parametre v^1,v^2, parallelforskyd tangentvektorerne $\partial/\partial v^1$ og $\partial/\partial v^2$ i x_o langs kurven,

fastlæg herved værdier for u^1, u^2, $\partial/\partial u^1$ og $\partial/\partial u^2$ i kurvepunkterne og forsøg en generalisation af parameterskiftet i § 5).
Vis, at den ved sådanne parametre bestemte plane kurve

$$t \to (u^1(\varphi(t)),\ u^2(\varphi(t))) \in \mathbf{R}^2$$

er entydigt bestemt pånær en flytning i $\mathbf{R}^2$ (sml. med den i § 7 indførte afrulning af en fladekurve). Parametre (u^1, u^2) med den ovennævnte egenskab kaldes Fermi-koordinater langs kurven.

§10. Krumningstensoren. Flader med konstant krumning.

Idet ξ,η og ζ betegner C^∞-tangentvektorfelter på en åben mængde $U \subseteq \dot{R}^n$ og D retningsdifferentiationen i $\dot{R}^n$, gælder der

$$D_\xi D_\eta \zeta - D_\eta D_\xi \zeta = D_{[\xi,\eta]}\zeta.$$

I de "oprindelige" koordinater $x^1,\dots,x^n$ har vi nemlig

$$D_\xi D_\eta \zeta - D_\eta D_\xi \zeta = \left(\xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\eta^j \frac{\partial \zeta^k}{\partial x^j}\right) - \eta^i \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\xi^j \frac{\partial \zeta^k}{\partial x^j}\right)\right)\frac{\partial}{\partial x^k}$$

$$= \left(\xi^i \frac{\partial \eta^j}{\partial x^i} - \eta^i \frac{\partial \xi^j}{\partial x^i}\right)\frac{\partial \zeta^k}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial x^k} = D_{[\xi,\eta]}\zeta.$$

Denne relation udtrykkes ofte ved, at to på hinanden følgende retningsdifferentiationer i $\dot{R}^n$ er (i det væsentlige) ombyttelige. Betegner nemlig $\bar{x}^1,\dots,\bar{x}^n$ vilkårlige krumliniede koordinater i $\dot{R}^n$ får vi, da $[\partial/\partial\bar{x}^i, \partial/\partial\bar{x}^j] = 0$, at der for et vilkårligt C^∞-tangentvektorfelt ζ i $\dot{R}^n$ gælder

$$D_{\frac{\partial}{\partial \bar{x}^i}} D_{\frac{\partial}{\partial \bar{x}^j}} \zeta = D_{\frac{\partial}{\partial \bar{x}^j}} D_{\frac{\partial}{\partial \bar{x}^i}} \zeta .$$

Lad nu (X,G) være en Riemann'sk mangfoldighed og lad ∇ betegne den til metrikken G hørende covariante differentiation. Idet ξ,η og ζ betegner C^∞-tangentvektorfelter, definerede på en åben mængde $U \subseteq X$, defineres der ved

$$R(\zeta;\xi,\eta) = \nabla_\xi \nabla_\eta \zeta - \nabla_\eta \nabla_\xi \zeta - \nabla_{[\xi,\eta]}\zeta$$

et C^∞-tangentvektorfelt $R(\zeta;\xi,\eta)$ på U. Det følger let af definitionen og tidligere udledte egenskaber ved ∇ og $[\,,\,]$, at R er <u>additiv m.h.t. ξ,η og ζ</u>:

$$R(\zeta;\xi+\theta,\eta) = R(\zeta;\xi,\eta) + R(\zeta;\theta,\eta)$$

$$R(\zeta;\xi,\eta+\theta) = R(\zeta;\xi,\eta) + R(\zeta;\xi,\theta)$$

$$R(\zeta+\theta;\xi,\eta) = R(\zeta;\xi,\eta) + R(\theta;\xi,\eta),$$

idet θ også betegner et C^∞-tangentvektorfelt på U, og at R er antisymmetrisk i ξ og η:

$$R(\zeta;\xi,\eta) = -R(\zeta;\eta,\xi).$$

Mere overraskende er, at hvis f betegner en C^∞-funktion på U, gælder der

$$R(\zeta;f\xi,\eta) = R(\zeta;\xi,f\eta) = R(f\zeta;\xi,\eta) = fR(\zeta;\xi,\eta).$$

Dette eftervises ved udregning, idet vi benytter de tidligere udledte identiteter

$$[f\xi,\eta] = f[\xi,\eta] - \eta(f)\xi \ , \ \nabla_{f\xi}\zeta = f\nabla_\xi\zeta \text{ og}$$
$$\nabla_\xi f\zeta = f\nabla_\xi\zeta + \xi(f)\zeta.$$

Vi får:

$$\begin{aligned}
R(f\zeta;\xi,\eta) &= \nabla_\xi\nabla_\eta(f\zeta) - \nabla_\eta\nabla_\xi(f\zeta) - \nabla_{[\xi,\eta]}(f\zeta)\\
&= \nabla_\xi(f\nabla_\eta\zeta + \eta(f)\zeta) - \nabla_\eta(f\nabla_\xi\zeta + \xi(f)\zeta) - f\nabla_{[\xi,\eta]}\zeta - [\xi,\eta](f)\zeta\\
&= f\nabla_\xi\nabla_\eta\zeta + \xi(f)\nabla_\eta\zeta + \eta(f)\nabla_\xi\zeta + \xi(\eta(f))\zeta - f\nabla_\eta\nabla_\xi\zeta\\
&\quad - \eta(f)\nabla_\xi\zeta - \xi(f)\nabla_\eta\zeta - \eta(\xi(f))\zeta - f\nabla_{[\xi,\eta]}\zeta - [\xi,\eta](f)\zeta\\
&= f(\nabla_\xi\nabla_\eta\zeta - \nabla_\eta\nabla_\xi\zeta - \nabla_{[\xi,\eta]}\zeta) + (\xi(\eta(f)) - \eta(\xi(f)) - [\xi,\eta](f))\zeta\\
&= fR(\zeta;\xi,\eta).
\end{aligned}$$

Videre:

$$R(\zeta;f\xi,\eta) = \nabla_{f\xi}\nabla_\eta\zeta - \nabla_\eta\nabla_{f\xi}\zeta - \nabla_{[f\xi,\eta]}\zeta$$

$$= f\nabla_\xi\nabla_\eta\zeta - \nabla_\eta(f\nabla_\xi\zeta) - \nabla_{f[\xi,\eta]}\zeta + \nabla_{\eta(f)\xi}\zeta$$

$$= f\nabla_\xi\nabla_\eta\zeta - f\nabla_\eta\nabla_\xi\zeta - \eta(f)\nabla_\xi\zeta - f\,\nabla_{[\xi,\eta]}\zeta + \eta(f)\nabla_\xi\zeta$$

$$= f(\nabla_\xi\nabla_\eta\zeta - \nabla_\eta\nabla_\xi\zeta - \nabla_{[\xi,\eta]}\zeta) = fR(\zeta;\xi,\eta).$$

Ved antisymmetrien $R(\zeta;\eta,\xi) = -R(\zeta,\xi,\eta)$ fås endelig

$$R(\zeta;\xi,f\eta) = fR(\zeta;\xi,\eta).$$

Det er ud fra definitionen klart, at $R(\zeta;\xi,\eta)$ afhænger lokalt af ξ,η og ζ, d.v.s. feltvektoren $R(\zeta;\xi,\eta)_x$ i et punkt x er fastlagt ved forløbet af felterne ξ,η og ζ i en vilkårlig lille omegn af x, idet ∇ og $[,]$ har denne egenskab. Den ovenstående identitet har imidlertid (sammen med additiviteten) den vigtige konsekvens, at $R(\zeta;\xi,\eta)$ - i modsætning til ∇ og $[,]$ - endda kun afhænger punktuelt af ξ,η og ζ, altså at feltvektoren $R(\zeta;\xi,\eta)_x$ er fastlagt alene ved feltvektorerne ξ_x,η_x og ζ_x. Lad nemlig $(x^1,\dots,x^n)$ være tilladte lokale koordinater i X i en omegn af punktet x. Ved gentagen anvendelse af additiviteten og de ovenstående identiteter får vi da:

$$R(\zeta;\xi,\eta) = R(\zeta^k \frac{\partial}{\partial x^k}; \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \eta^j \frac{\partial}{\partial x^j}) = \xi^i\eta^j\zeta^k R(\frac{\partial}{\partial x^k};\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j})$$

og hermed

$$R(\zeta;\xi,\eta)_x = \xi^i(x)\eta^j(x)\zeta^k(x)R(\frac{\partial}{\partial x^k};\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j})_x.$$

Men talsættene $\xi^i(x)$, $\eta^j(x)$ og $\zeta^k(x)$ er koordinaterne til feltvektorerne ξ_x, η_x og ζ_x, hvormed vi har det ønskede.

Som følge heraf kan vi til hvert punkt $x \in X$ knytte en afbildning

$$R_x : T_xX \times T_xX \times T_xX \to T_xX$$

på følgende måde: Til givne tangentvektorer $\xi_o, \eta_o, \zeta_o \in T_xX$ vælges C^∞-tangentvektorfelter ξ, η, ζ, defineret i en omegn af punktet x med $\xi_x = \xi_o$, $\eta_x = \eta_o$ og $\zeta_x = \zeta_o$ (dette er muligt, man kan f.eks. vælge ξ, η og ζ med konstante koordinatfunktioner med hensyn til valgte tilladte lokale koordinater), og man sætter

$$R_x(\zeta_o; \xi_o, \eta_o) = R(\zeta; \xi, \eta)_x.$$

Afbildningen R_x bliver åbenbart multilineær, d.v.s. den er lineær i hver af de variable vektorer, når de øvrige fastholdes.

De fundne resultater kan sammenfattes i

Sætning: Givet en Riemann'sk mangfoldighed (X,G). Da findes der til hvert punkt $x \in X$ en multilineær afbildning

$$R_x : T_xX \times T_xX \times T_xX \to T_xX$$

således at følgende gælder: Hvis ξ, η og ζ er C^∞-tangentvektorfelter, definerede på en åben mængde $U \subseteq X$ gælder der

$$R(\zeta; \xi, \eta) = \nabla_\xi \nabla_\eta \zeta - \nabla_\eta \nabla_\xi \zeta - \nabla_{[\xi, \eta]} \zeta ,$$

hvor ∇ betegner den til G hørende covariante differentiation, mens $R(\zeta; \xi, \eta)$ betegner det ved

$$R(\zeta; \xi, \eta)_x = R_x(\zeta_x; \xi_x, \eta_x)$$

bestemte tangentvektorfelt på U.

Afbildningen R_x kaldes krumningstensoren for den Riemann'ske metrik G i punktet $x \in X$.

Lad nu $(x^1, \ldots, x^n)$ være tilladte lokale koordinater i X. Vi indfører da krumningstensorens koordinatfunktioner R^p_{kij} ved følgende relation mellem tangentvektorfelter

$$R\left(\frac{\partial}{\partial x^k}; \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) = R^p_{kij} \frac{\partial}{\partial x^p} .$$

Disse funktioner fastlægger krumningstensoren inden for koordinaternes domæne, idet man af multilineariteten får

$$R\left(\zeta^k \frac{\partial}{\partial x^k}; \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \eta^j \frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \xi^i \eta^j \zeta^k R^p_{kij} \frac{\partial}{\partial x^p} .$$

For at bestemme funktionerne R^p_{kij} benytter vi den tidligere udledte koordinatformel for den covariante differentiation og får, idet $[\partial/\partial x^i, \partial/\partial x^j] = 0$:

$$R^p_{kij} \frac{\partial}{\partial x^p} = \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^k} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^k}$$

$$= \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \left(\Gamma^r_{jk} \frac{\partial}{\partial x^r}\right) - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \left(\Gamma^r_{ik} \frac{\partial}{\partial x^r}\right)$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \Gamma^p_{jk} + \Gamma^r_{jk} \Gamma^p_{ir} - \frac{\partial}{\partial x^j} \Gamma^p_{ik} - \Gamma^r_{ik} \Gamma^p_{jr}\right) \frac{\partial}{\partial x^p} ,$$

altså

$$R^p_{kij} = \frac{\partial}{\partial x^i} \Gamma^p_{jk} - \frac{\partial}{\partial x^j} \Gamma^p_{ik} + \Gamma^r_{jk} \Gamma^p_{ir} - \Gamma^r_{ik} \Gamma^p_{jr} .$$

Man bemærker, at der gælder $R^p_{kji} = - R^p_{kij}$ i overensstemmelse med at $R(\zeta;\xi,\eta)$ er antisymmetrisk i ξ og η.

Idet der gælder $[\partial/\partial x^i, \partial/\partial x^j] = 0$ kan vi udtrykke krumningstensorens hovedegenskab på koordinatform ved, at hvis $\zeta = \zeta^k \partial/\partial x^k$ er et C^∞-tangentvektorfelt, gælder der

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \zeta - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \zeta = \zeta^k R^p_{kij} \frac{\partial}{\partial x^p} .$$

Denne relation bruges hyppigt i litteraturen som udgangspunkt ved indførelsen af krumningstensoren.

Krumningstensoren har den egenskab, at ζ og $R(\zeta;\xi,\eta)$ er ortogonale, altså der gælder

$$G_x(\zeta, R_x(\zeta;\xi,\eta)) = 0$$

for hvilkesomhelst tangentvektorer $\xi,\eta,\zeta \in T_xX$. Lad nemlig ξ,η og ζ være C^∞-tangentvektorfelter i en omegn af punktet x (der i x har de givne tangentvektorer som feltvektorer). Af formlen

$$\xi(G(\eta,\zeta)) = G(\nabla_\xi \eta, \zeta) + G(\eta, \nabla_\xi \zeta)$$

får vi da

$$\xi(\eta(G(\zeta,\zeta))) = 2\xi(G(\zeta,\nabla_\eta \zeta)) = 2G(\zeta,\nabla_\xi \nabla_\eta \zeta) + 2G(\nabla_\xi \zeta, \nabla_\eta \zeta) ,$$

$$\eta(\xi(G(\zeta,\zeta))) = 2\eta(G(\zeta,\nabla_\xi \zeta)) = 2G(\zeta,\nabla_\eta \nabla_\xi \zeta) + 2G(\nabla_\eta \zeta, \nabla_\xi \zeta) ,$$

$$[\xi,\eta](G(\zeta,\zeta)) = 2G(\zeta,\nabla_{[\xi,\eta]}\zeta) .$$

Idet $[\xi,\eta] = \xi\circ\eta - \eta\circ\xi$ får vi heraf

$$0 = 2G(\zeta,\nabla_\xi \nabla_\eta \zeta) - 2G(\zeta,\nabla_\eta \nabla_\xi \zeta) - 2G(\zeta,\nabla_{[\xi,\eta]}\zeta) = 2G(\zeta,R(\zeta;\xi,\eta)),$$

hvormed påstanden er bevist.

Denne egenskab ved krumningstensoren udnyttes bekvemmest ved at betragte den ved

$$R_x(\theta,\zeta;\xi,\eta) = G_x(\theta,R_x(\zeta;\xi,\eta))$$

definerede afbildning

$$R_x: T_xX \times T_xX \times T_xX \times T_xX \to \grave{R} .$$

Denne afbildning kaldes også krumningstensoren, eller den Riemann-Christoffel'ske krumningstensor (for at skelne den fra den først definerede krumningstensor - iøvrigt adskiller de sig tydeligt ved antallet af variable. Navnet hæftes også hyppigt i stedet på den først indførte). Den er en multilineær afbildning, idet G_x er bilineær og $R_x(\,;\,,\,)$ multilineær. Den ovenfor udledte formel betyder, at $R_x(\zeta,\zeta;\xi,\eta) = 0$. Heraf fås for $\xi,\eta,\zeta,\theta \in T_xX$ under brug af multilineariteten

$$\begin{aligned} 0 = R_x(\zeta+\theta,\zeta+\theta;\xi,\eta) &= R_x(\zeta,\theta;\xi,\eta) + R_x(\theta,\zeta;\xi,\eta) + R_x(\zeta,\zeta;\xi,\eta) \\ &\quad + R_x(\theta,\theta;\xi,\eta) \\ &= R_x(\zeta,\theta;\xi,\eta) + R_x(\theta,\zeta;\xi,\eta) \end{aligned}$$

altså

$$R_x(\zeta,\theta;\xi,\eta) = -R_x(\theta,\zeta;\xi,\eta).$$

Man ser endvidere at antikommutativiteten i ξ og η er bevaret, så der gælder

$$R_x(\theta,\zeta;\xi,\eta) = -R_x(\theta,\zeta;\eta,\xi).$$

De to krumningstensorer har andre (anti-) symmetriegenskaber; dem har vi dog henvist til en opgave, da vi ikke får brug for dem i det følgende.

Lad nu $(x^1,\dots,x^n)$ være tilladte lokale koordinater i X. Vi definerer da n^4 funktioner R_{mkij} ved

$$R_{mkij} = R\left(\frac{\partial}{\partial x^m}, \frac{\partial}{\partial x^k}; \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right).$$

Af multilineariteten får vi

$$R\left(\theta^m \frac{\partial}{\partial x^m}, \zeta^k \frac{\partial}{\partial x^k}; \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \eta^j \frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \theta^m\zeta^k\xi^i\eta^j R_{mkij} ,$$

så disse koordinatfunktioner fastlægger Riemann-Christoffel tensoren indenfor koordinaternes domæne. Af definitionen får vi

$$R_{mkij} = G\left(\frac{\partial}{\partial x^m}, R^p_{kij} \frac{\partial}{\partial x^p}\right) = G\left(\frac{\partial}{\partial x^m}, \frac{\partial}{\partial x^p}\right)R^p_{kij} = g_{mp} R^p_{kij}.$$

Antikommutativitetsrelationerne giver sig på koordinatform udtryk ved

$$R_{kmij} = -R_{mkij} \quad \text{og} \quad R_{kmji} = -R_{kmij}.$$

Lad os nu betragte en flade X med en Riemann'sk metrik G. Med hensyn til parametre (u^1,u^2) i X har vi da

$$R_{1212} = -R_{1221} = R_{2121} = -R_{2112}.$$

De øvrige 12 størrelser R_{kmij} er 0, fordi de enten har $i = j$ eller $k = m$. Heraf fås

$$\begin{aligned} R(\theta,\zeta;\xi,\eta) &= R_{1212}(\theta^1\zeta^2\xi^1\eta^2 - \theta^1\zeta^2\xi^2\eta^1 + \theta^2\zeta^1\xi^2\eta^1 - \theta^2\zeta^1\xi^1\eta^2) \\ &= R_{1212}(\theta^1\zeta^2 - \theta^2\zeta^1)(\xi^1\eta^2 - \xi^2\eta^1). \end{aligned}$$

Krumningstensoren er altså fastlagt ved den ene størrelse R_{1212}. Nu er denne imidlertid afhængig af valget af parametrene, men vi kan finde en geometrisk invariant, som beskriver krumningstensoren, idet der gælder

<u>Sætning</u>: <u>Givet en flade X med Riemann'sk metrik G. Da findes til hvert punkt $x \in X$ et og kun et reelt tal $K(x)$, således at der for vilkårlige tangentvektorer</u> $\xi, \eta \in T_x X$ <u>gælder</u>

$$R_x(\xi,\eta;\xi,\eta) = K(x)(G_x(\xi,\xi)G_x(\eta,\eta) - (G_x(\xi,\eta))^2)$$

<u>hvor R_x betegner Riemann-Christoffel tensoren i punktet x for metrikken G.</u>

<u>Bevis</u>: Lad (u^1,u^2) være parametre i X i en omegn af punktet x. For $\xi,\eta \in T_x X$, hvor $\xi = \xi^i\, \partial/\partial u^i$ og $\eta = \eta^j \partial/\partial u^j$ har vi da

$$G_x(\xi,\xi)G_x(\eta,\eta) - (G_x(\xi,\eta))^2$$

$$= g_{ip}\xi^i\xi^p g_{jq}\eta^j\eta^q - g_{ij}\xi^i\eta^j g_{pq}\xi^p\eta^q$$

$$= (g_{ip}g_{jq} - g_{ij}g_{pq})\xi^i\eta^j\xi^p\eta^q = A_{ijpq}\xi^i\eta^j\xi^p\eta^q.$$

Her kan vi bemærke, at $A_{ijpq} = g_{ip}g_{jq} - g_{ij}g_{pq} = 0$ når $i = q$ eller $j = p$. De 4 resterende koefficienter kan udtrykkes på simpel måde, idet vi benytter determinanten $g = g_{11}g_{22} - (g_{12})^2$:

$$A_{1212} = A_{2121} = -A_{1122} = -A_{2211} = g$$

Heraf fås

$$G_x(\xi,\xi)G_x(\eta,\eta) - (G_x(\xi,\eta))^2 = g\cdot(\xi^1\eta^2 - \xi^2\eta^1)^2.$$

Fra før har vi

$$R_x(\xi,\eta;\xi,\eta) = R_{1212}(\xi^1\eta^2 - \xi^2\eta^1)^2.$$

Idet $g \neq 0$ har vi hermed påstanden, idet $K(x) = R_{1212}(x)/g(x)$. Af $K(x)$ er entydigt bestemt ved sætningens formel følger af, at der findes tangentvektorer ξ,η, således at

$$G_x(\xi,\xi)G_x(\eta,\eta) - (G_x(\xi,\eta))^2 \neq 0 \ ;$$

ifølge det ovenstående behøver vi nemlig blot (med hensyn til parametre (u^1,u^2)) vælge $(\xi^1,\xi^2) = (1,0)$ og $(\eta^1,\eta^2) = (0,1)$. Hermed er sætningen bevist.

Hvis $\xi,\eta \in T_xX$ er på hinanden vinkelrette enhedsvektorer, altså $G_x(\xi,\eta) = 0$, $G_x(\xi,\xi) = G_x(\eta,\eta) = 1$, har vi

$$G_x(\xi,\xi)G_x(\eta,\eta) - (G_x(\xi,\eta))^2 = 1$$

og hermed

$$R_x(\xi,\eta;\xi,\eta) = K(x).$$

(Angående størrelsen $G_x(\xi,\xi)G_x(\eta,\eta) - (G_x(\xi,\eta))^2$ kan vi bemærke, at den har en geometrisk betydning. Indføres nemlig vinklen v mellem ξ og η ved den naturlige definition

$$G_x(\xi,\eta) = \cos v \ (G_x(\xi,\xi)G_x(\eta,\eta))^{\frac{1}{2}}$$

(skalarproduktet er produktet af længderne og cos v), får vi

$$G_x(\xi,\xi)G_x(\eta,\eta) - (G_x(\xi,\eta))^2 = G_x(\xi,\xi)G_x(\eta,\eta)\sin^2 v,$$

og størrelsen kan altså fortolkes som kvadratet på arealet af det af ξ og η udspændte parallelogram).

Størrelsen $K(x)$ kaldes krumningen af metrikken G i punktet $x \in X$. Den fastlægger på simpel måde krumningstensorens koordinatfunktioner med hensyn til parametre (u^1,u^2): Af

$$g^{qm}R_{mkij} = g^{qm}g_{mp}R^p_{kij} = \delta^q_p R^p_{kij} = R^q_{kij}$$

og

$$R_{1212} = -R_{1221} = R_{2121} = -R_{2112} = gK$$

og da de øvrige R_{mkij} er 0, får vi, idet vi fra formlen for invers matrix har

$$g^{11} = g_{22}/g \;,\; g^{22} = g_{11}/g \;,\; g^{12} = g^{21} = -g_{12}/g \;,$$

at

$$R^1_{112} = -R^1_{121} = Kg_{12} \;,\; R^1_{212} = -R^1_{221} = Kg_{22} \;,$$

$$R^2_{121} = -R^2_{112} = Kg_{11} \;,\; R^2_{221} = -R^2_{212} = Kg_{12} \;,$$

mens de øvrige koefficienter er 0 på grund af antisymmetrien. (En så stærk forsimpling af krumningstensoren er ikke mulig for Riemann'ske mangfoldigheder af dimension større end 2).

For en flade i rummet (X,P) med parametre (u^1,u^2) har vi i § 7 side 20 indført størrelser R^p_{kij} ved en koordinatformel. Hvis vi sammenligner denne formel med den ovenstående formel for krumningstensorens koordinatfunktion ser vi, at disse størrelser netop er koordinatfunktionerne for krumningstensoren af den metriske fundamentalform G af fladen (X,P). Vi har altså i denne paragraf opbygget et geometrisk indhold bag disse størrelser. Betragter man videre formlen § 7 side 21 for fladens Gauss'ske krumning og sammenholder denne med

$$K = \frac{1}{g} R_{2121} = \frac{1}{g} g_{m2} R^{m}_{121}$$

ser man, at krumningen af den metriske fundamentalform G (som ovenfor defineret) er lig den Gauss'ske krumning af fladen (X,P) d.v.s. produktet af hovedkrumningerne.

I det følgende vil vi studere eksempler på flader X med Riemann'sk metrik G med den egenskab, at der til vilkårlige punkter $x_1, x_2 \in X$ findes en isometrisk afbildning $F: X \to X$ med $F(x_1) = x_2$. Ifølge det foregående er en nødvendig betingelse, at krumningen K af metrikken G er konstant, og flader af den ovennævnte art må altså søges blandt fladerne med konstant krumning. For hvert $r > 0$ er en kugleflade i $\mathring{R}^3$ med radius r en flade med konstant krumning $K = 1/r^2$ (idet den forsynes med den fra rummets Euklidiske metrik inducerede Riemann'sk metrik), og planen $\mathring{R}^2$ med den Euklidiske metrik er en flade med $K = 0$. Alle disse flader har som bekendt den ovennævnte egenskab, idet isometrierne af kugleflade er drejninger om diametre og spejlinger i diamentralplaner, mens planens isometrier er parallelforskydninger, drejninger, spejlinger i linier og glidespejlinger (liniespejling efterfulgt af en parallelforskydning i spejlingsaksens retning). Endvidere ved vi også hvor mange isometrier disse flader tillader, idet det for hver af dem gælder, at <u>til to givne tripler</u> (x,e_1,e_2) <u>og</u> $(\tilde{x},\tilde{e}_1,\tilde{e}_2)$ <u>hvor x og $\tilde{x}$ er punkter, e_1,e_2 et ortonormalt par af tangentvektorer i x og $\tilde{e}_1,\tilde{e}_2$ et ortonormalt par af tangentvektorer i $\tilde{x}$, findes en og kun en isometri $F : X \to X$ med</u>

$$F(x) = \tilde{x} \quad , \quad dF_x(e_1) = \tilde{e}_1 \text{ og } dF_x(e_2) = \tilde{e}_2 .$$

For en ordens skyld anfører vi et bevis:

<u>Eksistensen</u>: En spejling - i det plane tilfælde i midtnormalen for punkterne x og $\tilde{x}$ - i kugleoverfladetilfældet i midtnormalplanen for punkterne x og $\tilde{x}$, som er en diamentralplan, vil føre punktet x over i $\tilde{x}$. Vektorerne kan derefter bringes på plads ved hjælp af en eller to spejlinger i linier, henholdsvis diamentralplaner, gennem punktet $\tilde{x}$. Hvis vektorparret $(\tilde{e}_1,\tilde{e}_2)$ og billedet (e_1',e_2') af vektorparret (e_1,e_2) ved den allerede udførte spejling inducerer modsatte omløbsretninger, kan vi opnå dette ved at spejle i vinkelhalveringslinien for e_1 og e_1' (som da også er vinkelhalveringslinie for e_2 og e_2') - i kugleoverfladetilfældet i diamentralplanen gennem denne linie. Giver de to vektorpar samme omløbsretning, foretager vi en spejling i en linie, henholdsvis diamentralplan, gennem $\tilde{x}$, hvorefter den afsluttende spejling kan foretages.

<u>Entydigheden</u>: Det er åbenbart nok at vise, at en isometri F, som afbilder en tripel (x,e_1,e_2) på sig selv, er den identiske afbildning, Vi kan her bemærke, at da e_1,e_2 er en basis for tangentrummet i punktet x, $dF_x(e_1) = e_1$ og $dF_x(e_2) = e_2$, er dF_x den identiske afbildning af tangentrummet i punktet x (da den er lineær). Videre vil F, da den er isometrisk, afbilde en geodætisk kurve på en geodætisk kurve med bevarelse af buelængden, og i ethvert punkt af en sådan vil differentialet dF afbilde kurvens tangentvektor på

billedkurvens tangentvektor i billedpunktet. Heraf følger, at enhver geodætisk kurve, som går gennem punktet x, vil afbildes på sig selv punkt for punkt og hermed, at F er identiteten, idet der både for plan og kugleflade gælder, at ethvert fladepunkt kan forbindes med punktet x med en geodætisk kurve.

Vi noterer os, at vi samtidig har fået bevist, at enhver isometri af den Euklidiske plan kan fås som en sammensætning af to eller tre spejlinger i rette linier og at enhver isometri af en kugleoverflade kan fås som sammensætning af to eller tre spejlinger i diamentralplaner.

Vi har tidligere (§ 4 øv. 6, § 5 øv. 6) set et eksempel på en flade med konstant negativ krumning, nemlig pseudosfæren. Denne flade er (trods sit navn) ikke så rig på isometriske afbildninger som de ovennavnte flader. Hvis man imidlertid giver afkald på at ville have fladen realiseret i rummet, er det muligt at konstruere en flade med negativ krumning, som tillader et lige så omfattende system af isometrier som planen og kuglefladerne. Som underliggende differentiabel **mangfoldighed** for en sådan flade vil vi benytte et stykke af $\mathbb{R}^2$ med parametre (u^1,u^2). Vi forsøger med en metrik

$$g_{11} = g_{22} = 1/(f(u^1,u^2))^2, \quad g_{12} = g_{21} = 0,$$

hvor funktionen $f(u^1,u^2)$ så må fastlægges, således at krumningen K bliver en negativ konstant $-1/r^2$, hvor $r > 0$.

Idet $g^{11} = g^{22} = f^2$, $g^{12} = g^{21} = 0$ giver tidligere udledte formler, at

$$-\Gamma_{11}^1 = -\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{22}^1 = \frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial u^1} \;,\; \Gamma_{11}^2 = -\Gamma_{12}^1 = -\Gamma_{22}^2 = \frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial u^2}$$

og hermed

$$R_{121}^2 = \frac{\partial}{\partial u^2}\Gamma_{11}^2 - \frac{\partial}{\partial u^1}\Gamma_{21}^2 + \Gamma_{11}^r\,\Gamma_{2r}^2 - \Gamma_{21}^r\,\Gamma_{1r}^2$$

$$= \frac{1}{f}\left(\frac{\partial^2 f}{(\partial u^1)^2} + \frac{\partial^2 f}{(\partial u^2)^2}\right) - \frac{1}{f^2}\left(\left(\frac{\partial f}{\partial u^1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial u^2}\right)^2\right).$$

Idet $R_{121}^2 = Kg_{11} = K/f^2$ får vi heraf

$$K = f\left(\frac{\partial^2 f}{(\partial u^1)^2} + \frac{\partial^2 f}{(\partial u^2)^2}\right) - \left(\frac{\partial f}{\partial u^1}\right)^2 - \left(\frac{\partial f}{\partial u^2}\right)^2.$$

Der findes naturligvis mange (også komplicerede) funktioner f, for hvilke $K = -1/r^2$. Ved indsættelse vil man imidlertid se, at der blandt løsningerne findes polynomier i u^1 og u^2. De simpleste heriblandt er

$$f(u^1,u^2) = \alpha u^1 + \beta u^2 \quad \text{med } \alpha^2 + \beta^2 = 1/r^2$$

og

$$f(u^1,u^2) = \frac{1}{2r}(1-(u^1)^2 - (u^2)^2) \;.$$

Vi benytter den sidstnævnte og har altså hermed en Riemann'sk metrik G på enhedscirklen

$$E = \{(u^1,u^2) \in \mathbb{R}^2 \mid (u^1)^2 + (u^2)^2 < 1\}$$

givet ved

$$g_{11} = g_{22} = 1/f^2 \quad , \quad g_{12} = g_{21} = 0,$$

hvor

$$f = \frac{1}{2r}(1 - (u^1)^2 - (u^2)^2),$$

som har konstant krumning $K = -1/r^2$.

En C^∞-afbildning $F : E \to E$, givet ved et funktionspar $(v^1(u^1,u^2), v^2(u^1,u^2))$, er en isometri af (E,G) når og kun når der for hvert $x \in F$ og hvert indexpar j,k gælder

$$G_{F(x)}\ (dF_x(\frac{\partial}{\partial u^j}),\ dF_x(\frac{\partial}{\partial u^k})) = G_x(\frac{\partial}{\partial u^j}, \frac{\partial}{\partial u^k}),$$

eller på koordinatform

$$g_{pq}(v^1(u^1,u^2),v^2(u^1,u^2))\ \frac{\partial v^p(u^1,u^2)}{\partial u^j}\ \frac{\partial v^q(u^1,u^2)}{\partial u^k} = g_{jk}(u^1,u^2).$$

Heraf ser vi, at den ved $(u^1,u^2) \to (u^1,-u^2)$ givne afbildning er en isometri af (E,G). Ved denne afbildning afbildes den ved

$$\begin{array}{l} u^1 = t \\ u^2 = 0 \end{array} \quad -1 < t < 1$$

fremstillede kurve på sig selv punkt for punkt, og idet afbildningen er en isometri, vil dens differential følgelig afbilde kurvens tangentvektor $v_1(s)$ og dennes afledede $\delta v_1(s)/\delta s$ på sig selv. Nu er $v_1(s)$ proportional med $\partial/\partial u^1$ og $\delta v_1(s)/\delta s$ derfor proportional med $\partial/\partial u^2$, idet $\partial/\partial u^1$ og $\partial/\partial u^2$ er ortogonale (da $g_{12}=0$). Afbildningens differential afbilder i kurvepunkterne $\partial/\partial u^2$ på $-\partial/\partial u^2$, og der gælder følgelig $\delta v_1(s)/\delta s = 0$ d.v.s. <u>kurven er en geodætisk kurve</u>. Kurvens buelængde s ud fra $t = 0$ bestemmes ved

$$(\frac{ds}{dt})^2 = g_{jk}(t,0)\frac{du^j}{dt}\ \frac{du^k}{dt} = \frac{4r^2}{(1-t^2)^2}$$

altså

$$s = \int_0^t \frac{2r}{1-t^2}dt = r \ln \frac{1+t}{1-t} \, .$$

Heraf ses, at kurven strækker sig uendelig langt i begge retninger idet der gælder $s \to \infty$ for $t \to 1$ og $s \to -\infty$ for $t \to -1$.

Ved de videre undersøgelser er det hensigtsmæssigt at benytte regning med komplekse tal, idet vi samler parametrene (u^1, u^2) til en kompleks parameter $z = u^1 + iu^2$. En afbildning $F : E \to E$ bliver herved beskrevet ved en kompleks funktion $w = F(z)$ af den komplekse parameter z. Afbildningen ovenfor er i denne formulering $w = \bar{z}$. Metrikken udtrykkes på enkel måde ved den komplekse parameter z:

$$g_{11} = g_{22} = \frac{4r^2}{(1-|z|^2)^2}, \quad g_{12} = g_{21} = 0.$$

Fra funktionsteorien vides, at de homeografiske transformationer

$$w = e^{i\theta} \frac{z+a}{\bar{a}z+1} \, ,$$

hvor θ er et reelt tal og a et komplekst tal med $|a| < 1$, er bijektive afbildninger af E på sig selv. Vi vil lige eftervise dette påny, da vi i det følgende for brug for det resultat, som fremkommer ved udregningen. Et lille regnestykke giver

$$1 - |w|^2 = \frac{(1-|a|^2)(1-|z|^2)}{|\bar{a}z + 1|^2} \, ,$$

hvoraf vi slutter, at periferien $\{z \,|\, |z| = 1\}$ afbildes i sig selv. Idet $0 \in E$ afbildes på $a \in E$ slutter vi af kontinuiteten, at E afbildes i sig selv. Afbildningen er bijektiv, idet den inverse afbildning er

$$z = e^{-i\theta}\,\frac{w+b}{\bar{b}w+1}\,,$$

hvor $b = -ae^{i\theta}$. *Disse afbildninger er isometrier af (E,G).* Ved beviset herfor kan vi med fordel benytte den komplekse regning. Idet $w = v^1 + iv^2$, d.v.s. (v^1,v^2) er parametrene for billedpunktet, får vi ved kompleks differentiation

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\partial v^1}{\partial u^1} + i\frac{\partial v^2}{\partial u^1} = \frac{\partial v^2}{\partial u^2} - i\frac{\partial v^1}{\partial u^2} = e^{i\theta}\,\frac{1-|a|^2}{(\bar{a}z+1)^2}\,,$$

hvilket giver

$$\left|\frac{dw}{dz}\right|^2 = \left(\frac{\partial v^1}{\partial u^1}\right)^2 + \left(\frac{\partial v^2}{\partial u^1}\right)^2 = \left(\frac{\partial v^1}{\partial u^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial v^2}{\partial u^2}\right)^2 = \frac{(1-|a|^2)^2}{|\bar{a}z+1|^4}$$

og

$$\frac{\partial v^1}{\partial u^1}\frac{\partial v^1}{\partial u^2} + \frac{\partial v^2}{\partial u^1}\frac{\partial v^2}{\partial u^2} = 0.$$

Vi skal eftervise, at

$$g_{pq}(w)\,\frac{\partial v^p}{\partial u^j}\frac{\partial v^q}{\partial u^k} = g_{jk}(z)\,.$$

Dette følger af de ovenstående formler, idet vi har

$$g_{11}(w) = g_{22}(w) = \frac{4r^2}{(1-|w|^2)^2} = \frac{4r^2|\bar{a}z+1|^4}{(1-|a|^2)^2(1-|z|^2)^2} \text{ og } g_{12}(w) = 0.$$

Idet $w = \bar{z}$ også er en isometri har vi hermed, at (E,G) tillader følgende isometrier

$$w = e^{i\theta}\,\frac{z + a}{\bar{a}z + 1} \qquad\qquad \theta \text{ reel, } a \in E$$

$$w = e^{i\theta}\,\frac{\bar{z} + a}{\bar{a}\bar{z} + 1}$$

De øverste bevarer orienteringen i E, mens de nederste vender orienteringen.

Idet $(\overset{\circ}{e}_1, \overset{\circ}{e}_2)$ betegner et ortonormalt par af tangentvektorer i punktet 0 findes der til hver tripel (x, e_1, e_2), hvor $x \in E$ og e_1, e_2 er et ortonormalt par af tangentvektorer i punktet x, en isometri $F : E \to E$ med $F(x) = 0$, $dF_x(e_1) = \overset{\circ}{e}_1$ og $dF_x(e_2) = \overset{\circ}{e}_2$. En passende isometri af den ovennævnte art $(a = -x)$ vil nemlig afbilde x på 0. Derefter kan vektorerne bringes på plads ved hjælp af en drejning $w = e^{i\theta}z$ eller spejlingen $w = \bar{z}$ efterfulgt af en drejning.

Heraf følger, at til to givne tripler (x, e_1, e_2) og $(\tilde{x}, \tilde{e}_1, \tilde{e}_2)$, hvor x og $\tilde{x}$ er punkter i E, e_1, e_2 et ortonormalt par af tangentvektorer i x og $\tilde{e}_1, \tilde{e}_2$ et ortonormalt par af tangentvektorer i $\tilde{x}$, findes en isometri $F : E \to E$ med

$$F(x) = \tilde{x}, \quad dF_x(e_1) = \tilde{e}_1 \text{ og } dF_x(e_2) = \tilde{e}_2 .$$

Vi kan ved det samme ræsonnement som tidligere vise, at der kun findes een sådan isometri. Hertil skal bevises, at hvilkesomhelst to punkter i E kan forbindes med en geodætisk kurve: Vi bemærker, at da kurven $u^1 = t$, $u^2 = 0$ er geodætisk og drejningerne $w = e^{i\theta}z$ isometrier, er enhver kurve $u^1 = \alpha t$, $u^2 = \beta t$, α og β reelle med $(\alpha, \beta) \neq (0,0)$, geodætisk. Ethvert punkt i E kan altså forbindes med 0 med en geodætisk kurve. Heraf følger påstanden ved anvendelse af en passende isometri.

(Vi har hermed bevist, at enhver isometri af (E,G) er en sammensætning af de ovenfor anførte. Man kan bevise (se øv.7) at en sammensætning af to af disse igen er af samme type. De ovenfor anførte er altså samtlige isometrier af (E,G)).

En homeografisk transformation er cirkeltro, hvormed der menes, at den afbilder en cirkel eller ret linie på en cirkel eller ret linie. Indføres nemlig det komplekse dobbeltforhold af fire forskellige punkter z_1, z_2, z_3, z_4 i den komplekse plan ved

$$\mathrm{df}(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} \, \frac{z_4 - z_2}{z_4 - z_1}$$

viser en udregning, at en homeografisk transformation er dobbeltforholdstro, altså dobbeltforholdet for fire vilkårlige punkter er lig dobbeltforholdet for billedpunkterne. Heraf følger cirkeltroskaben, idet fire forskellige punkter z_1, z_2, z_3, z_4 i den komplekse plan ligger på en cirkel eller en ret linie når og kun når dobbeltforholdet $\mathrm{df}(z_1, z_2, z_3, z_4)$ er reelt.

Idet en homeografisk transformation er konform (vinkeltro) følger heraf, at transformationen

$$w = e^{i\theta} \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}$$

vil afbilde en cirkel gennem a, som skærer E under rette vinkler - en såkaldt ortogonalcirkel til E, i en diameter i E. Denne sidste er imidlertid, som tidligere vist, en geodætisk kurve for (E,G). Diametrene og ortogonalcirklerne i E er altså geodætiske kurver for (E,G). De er samtlige geodætiske kurver, idet vi til ethvert punkt $a \in E$ med tangentretning e kan finde en kurve af den omtalte art, nemlig billedet af en passende diameter ved transformationen

$$w = \frac{z+a}{\bar{a}z+1}$$

Der er ingen af ortogonalcirklerne, som går gennem 0, hvoraf følger at et vilkårligt punkt $a \in E$, $a \neq 0$ kan forbindes med 0 med en og kun een geodætisk kurve. Ved en isometri fås heraf, at der gennem hvilkesomhelst to forskellige punkter i E går en og kun een geodætisk kurve.

Vi har hermed set, at den Riemann'ske mangfoldighed (E,G) besidder de fælles egenskaber ved den Euklidiske plan og kuglefladerne, som vi her særlig har interesseret os for. Den sidst beviste påstand viser, at analogien mellem planen og (E,G) rækker videre en analogien med kuglefladerne, der jo som bekendt ikke har den ovennævnte egenskab. Dette fænomen har spillet en stor rolle i matematikkens historie. Indfører man nemlig en geometrisk terminologi, idet de geodætiske kurver i (E,G) kaldes linier og indfører man afstands- og vinkelmål i (E,G) ved at måle afstanden mellem punkter som længden af den mellemliggende geodætiske bue og vinkler på den naturlige måde ved hjælp af metrikken G, fås en geometri, den såkaldte ikke-Euklidiske geometri, hvori en lang række af den Euklidiske geometris sætninger gælder. Denne analogi er særlig fremtrædende, hvis man betragter Euklids aksiomatiske opbygning af geometrien (som i moderne og fuldstændig formulering findes i Hilberts Grundlagen der Geometrie). Samtlige aksiomer er sætninger, der også gælder i den ikke-Euklidske geometri, pånær parallelaksiomet: Er der givet en linie l og et punkt P, som ikke ligger på l, da findes højst een linie gennem P, som ikke skærer l. Der er i tidens løb gjort mange forgæves forsøg på at bevise, at parallelaksiomet skulle være en konsekvens af Euklids øvrige aksiomer; med konstruktionen af den ikke-Euklidiske geometri (i begyndelsen af forrige århundrede) blev dette meget diskuterede spørgsmål afklaret.

Det er naturligt at spørge, hvorfor vi ikke har konstrueret den Riemann'ske mangfoldighed (E,G) som en flade i rummet $\grave{R}^3$. Dette har en meget naturlig grund, idet der ifølge en sætning af Hilbert ikke findes nogen C^∞-immersion $E \to \grave{R}^3$, som er isometrisk med hensyn til metrikken G på E og den Euklidiske metrik i $\grave{R}^3$.

Øvelser til § 10.

1. Vis, at krumningstensorerne for en Riemann'sk mangfoldighed opfylder identiteterne:

$$R(\zeta;\xi,\eta) + R(\xi;\eta,\zeta) + R(\eta;\zeta,\xi) = 0$$

$$R(\theta,\zeta;\xi,\eta) = R(\xi,\eta;\theta,\zeta)$$

Opskriv de hertil svarende relationer for koordinatfunktionerne R^p_{kij} og R_{mkij} med hensyn til tilladte lokale koordinater.

2. Denne øvelse er en direkte fortsættelse af øvelse 3 i § 9 (se denne).

Idet R betegner krumningstensorerne for den metriske fundamentalform af fladen X og $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$, $\underline{d}$ tangentvektorer til X i et punkt $x \in X$ skal man vise, at

$$R(\underline{c};\underline{a},\underline{b}) + L(\underline{b},\underline{c})D_{\underline{a}}\underline{N} - L(\underline{a},\underline{c})D_{\underline{b}}\underline{N} = \underline{0}$$

og

$$R(\underline{d},\underline{c};\underline{a},\underline{b}) = L(\underline{b},\underline{c})L(\underline{a},\underline{d}) - L(\underline{a},\underline{c})L(\underline{b},\underline{d})$$

(Betragt tangentielle felter $\tilde{\underline{a}},\tilde{\underline{b}},\tilde{\underline{c}}$ og benyt, at $\mathring{R}^3$ har krumningstensor identisk 0). Bevis Gauss' Teorema egregium (§ 7. s. 20) ved indsættelse af hovedretningsvektorerne i den sidste af ligningerne.

3. I en flade X med Riemann'sk metrik G er givet parametre (u^1,u^2), således at der gælder

$$g_{11} = 1,\ g_{12} = g_{21} = 0,\ g_{22} = (f(u^1,u^2))^2,$$

hvor f er en positiv funktion.

Bestem størrelserne g^{ij}, Γ^1_{11}, Γ^2_{11}, Γ^2_{12} og R^2_{121} og vis herved, at krumningen er

$$K = -\frac{1}{f}\frac{\partial^2 f}{(\partial u^1)^2} .$$

Et eksempel på parametre af denne art er de sædvanlige parametre på en omdrejningsflade (se § 4 side 16-18).

4. Givet er en flade X med Riemann'sk metrik G, et punkt $x_o \in X$ og et ortonormalt par (ξ_1, ξ_2) af tangentvektorer til X i x_o. Man kan da bevise, at følgende konstruktion fører til parametre (u^1,u^2) i en omegn af punktet x_o (såkaldte normalkoordinater):
For et vilkårligt reelt talpar (a^1,a^2) med $(a^1)^2 + (a^2)^2 = 1$ betragtes den geodætiske kurve $\varphi(s)$ med naturlig parameter s, for hvilken

$$\varphi(0) = x_o \;, \quad \frac{d\varphi(0)}{ds} = a^i\xi_i$$

og parametrene defineres ved, at man til talsættet $(u^1,u^2) = (sa^1,sa^2)$ knytter punktet $\varphi(s) \in X$.

Vis, at idet θ og s betegner reelle variable og

$$(a^1,a^2) = (\cos\theta, \sin\theta) \;, \; (b^1,b^2) = (-\sin\theta, \cos\theta)$$

gælder der

$$g_{ij}(sa^1,sa^2)a^i b^j = 0.$$

(Udregn $\frac{\partial}{\partial s}(g_{ij}(sa^1,sa^2)a^i b^j)$ og $\frac{\partial}{\partial\theta}(g_{ij}(sa^1,sa^2)a^i a^j)$

og benyt parametrenes egenskaber).

Vi indfører nu nye parametre $(\bar{u}^1,\bar{u}^2)$ (såkaldte geodætiske

$u^1 = a^1 + b^1 t$, $u^2 = a^2 + b^2 t$, hvor a^1, a^2, b^1, b^2 er reelle konstanter med $(b^1, b^2) \neq (0,0)$, er geodætisk. Vis, at (u^1, u^2) er geodætiske når og kun når

$$\Gamma^2_{11} = \Gamma^1_{22} = 0, \quad \Gamma^1_{11} = 2\Gamma^2_{12}, \quad \Gamma^2_{22} = 2\Gamma^1_{21}.$$

*Vis, at en nødvendig betingelse for eksistensen af geodætiske parametre er, at krumningen K er konstant.

I $\mathring{R}^3$ betragtes kuglefladen med ligning $(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = r^2$ $(r > 0)$. Liniestykket, som forbinder punkterne $(0,0,0)$ og (u^1, u^2, r) skærer kugleoverfladen i et punkt. Herved fås parametre på en halvkugleflade med hele u^1-u^2-planen som parametermængde. Vis ved et geometrisk ræsonnement, at de er geodætiske.

Gennem et vilkårligt punkt $(u^1, u^2, 0) \in \mathring{R}^3$ med $(u^1)^2 + (u^2)^2 < 1$ og punktet $(0,0,-1)$ lægges en ret linie. Denne linie skærer kuglefladen med centrum $(0,0,0)$ og radius 1 i et punkt $(v^1, v^2, v^3) \neq (0,0,-1)$. Vis ved et geometrisk ræsonnement, at (v^1, v^2) er geodætisk parametre for $E = \{(u^1, u^2, 0) \in \mathring{R}^3 \mid (u^1)^2 + (u^2)^2 < 1\}$ forsynet med den i teksten omtalte Riemann'ske metrik.

6. Ifølge side 15 har metrikken

$$g_{11} = g_{22} = \frac{r^2}{(u^2)^2} \qquad g_{12} = g_{12} = 0$$

på halvplanen $\{(u^1, u^2) \in \mathring{R}^2 \mid u^2 > 0\}$ konstant krumning $K = -\frac{1}{r^2}$. Vis, at idet vi indfører en kompleks parameter z ved $z = u^1 + iu^2$, er alle afbildningerne

$$w = \frac{az + b}{cz + d} \qquad a,b,c,d \text{ reelle, } ad - bc > 0$$

isometrier.

Bestem de geodætiske kurver. Angiv en isometrisk afbildning af halvplanen med denne metrik på enhedscirklen E med den i teksten indførte metrik.

7. Til en 2 x 2 matrix $\underline{\underline{A}}$ med komplekse elementer og det $\underline{\underline{A}} \neq 0$ kan man knytte den homegrafiske transformation

$$F(\underline{\underline{A}}) : w = \frac{a_{11}z + a_{12}}{a_{21}z + a_{22}}, \text{ hvor } \underline{\underline{A}} = \begin{Bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{Bmatrix}.$$

Vis, at $F(\underline{\underline{A}}) = F(\underline{\underline{B}})$ når og kun når matricerne $\underline{\underline{A}}$ og $\underline{\underline{B}}$ er proportionale: $\underline{\underline{A}} = c\underline{\underline{B}}$, $c \in \check{C} \setminus \{0\}$.
Vis, at $F(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}) = F(\underline{\underline{A}}) \circ F(\underline{\underline{B}})$.
Vis, at de på side 17 anførte homeografiske transformationer netop svarer til matricer af formen

$$\begin{Bmatrix} ac & bc \\ \bar{b}c & \bar{a}c \end{Bmatrix}$$

hvor a,b og c er komplekse tal med $|a| > |b|$ og $c \neq 0$. Vis herved den på side 20 fremsatte påstand, at disse transformationer udgør en gruppe.

I de følgende øvelser undersøges den ikke-euklidiske plan (E,G). Punkterne på periferien $\bar{E} \setminus E$ kaldes uegentlige punkter eller grænsepunkter. En geodætisk kurve i E, altså en diameter eller ortogonalcirkelbue, kaldes en "linie", og dennes skæringspunkter med periferien $\bar{E} \setminus E$ kaldes "liniens" grænsepunkter. Som nævnt i teksten på side 21 måles afstande og vinkler i E ved hjælp af metrikken G. Idet G er en konform metrik (sml. § 9 øv.1) er vinklerne de sædvanlige vinkler i $E \subset \check{R}^2$.

8. Vis følgende:

Vinklen v mellem to hinanden skærende "linier" l_1 og l_2, som har grænsepunkterne u_1, v_1 henh. u_2, v_2, er bestemt ved

$$\mathrm{tg}^2 \frac{v}{2} = - \mathrm{df}(u_1, v_1, u_2, v_2).$$

(Vis først formlen i tilfældet $u_1 = -1$, $v_1 = 1$, $u_2 = -e^{iv}$, $v_2 = e^{iv}$)

Idet z og z' er punkter på "linien" med grænsepunkter u og v gælder der

$$\mathrm{dist}(z, z') = -r \ln \mathrm{df}(u, v, z, z')$$

(Vis først formlen i tilfældet $u = -1$, $v = 1$, $z = 0$, $z' = t$, t reel under benyttelse af resultatet på side 17).

Formlen for vinklen indeholder et valg blandt de to mulige vinkler og formlen for afstanden giver en fortegnsregning. Gør rede for det geometriske indhold heri.

9. For en 2×2 matrix $\underline{\underline{A}}$ med komplekse elementer og $\det \underline{\underline{A}} \neq 0$ betragtes tallet

$$h(\underline{\underline{A}}) = \frac{1}{2} \frac{\mathrm{tr}(\underline{\underline{A}}^2)}{\det(\underline{\underline{A}})}$$

(hvor tr betegner sporet, altså summen af diagonalelementerne i den pågældende matrix).

Vis, at

$$h(\underline{\underline{B}}\ \underline{\underline{A}}\ \underline{\underline{B}}^{-1}) = h(\underline{\underline{A}})$$

og at $h(\underline{\underline{A}}) = h(\underline{\underline{B}})$, hvis $\underline{\underline{A}}$ og $\underline{\underline{B}}$ er proportionale.

Som følge af sidstnævnte egenskab kan man til en homeografisk transformation knytte tallet

$$h(F(\underline{\underline{A}})) = h(\underline{\underline{A}}).$$

Vis, at der for homeografiske transformationer F_1 og F_2 gælder $h(F_2 \circ F_1 \circ F_2^{-1}) = h(F_1)$.

Vis, at for

$$F : w = e^{i\theta} \frac{z + a}{\bar{a}z + 1}, \quad \theta \text{ reel}, |a| < 1,$$

gælder der

$$h(F) = \frac{\cos\theta + |a|^2}{1 - |a|^2}.$$

Vis, at de egentlige (d.v.s. orienteringsbevarende) ikke-euklidiske flytninger kan klassificeres på følgende måde:

1. $-1 \leqq h(F) < 1$: Betragtet som afbildning af $\bar{E}$ på sig selv har F netop ét fixpunkt $c \in E$.
2. $h(F) = 1$: F er den identiske afbildning, eller den har netop ét fixpunkt $c \in \bar{E} \setminus E$.
3. $h(F) > 1$: F har to fixpunkter $u, v \in \bar{E} \setminus E$.

En flytning af type 1 kaldes en ikke-euklidisk drejning med drejningscentrum c. Vis, at en vilkårlig "linie" l gennem c afbildes på en "linie" $l' = F(l)$, hvor vinklen $v = \sphericalangle (l,l')$ er bestemt ved $\cos v = h(F)$. (Betragt først tilfældet $c = 0$).

En flytning af type 2 kaldes en grænsedrejning med grænsecentrum c.

En flytning af type 3 kaldes en ikke-euklidisk translation og "linien" med grænsepunkter u og v kaldes translationsaksen. Vis, at translationsaksen afbildes på sig selv, og at der for et vilkårligt punkt z på denne gælder $\cosh \operatorname{dist}(z, F(z)) = h(F)$.

(Betragt først tilfældet $u = -1$, $v = 1$).

Vis, at en ikke-euklidisk drejning er fastlagt ved centret c, en orienteret "linie" gennem c og dennes billede ved drejningen. Vis, at en ikke-euklidsk translation er fastlagt ved aksen, et punkt på denne og dettes billedpunkt.

10. Vis, at en ikke-euklidisk translation med grænsefixpunkter u og v afbilder enhver cirkelbue gennem u og v på sig selv. Vis herved, at en sådan cirkelbue er parallelkurve til "linien" l med grænsepunkter u og v i den forstand, at der på alle "normalerne" til l (d.v.s. "linier" vinkelret på l) ligger "linestykker" af samme ikke-euklidiske længde mellem "linien" og parallelkurven.

11. Vis, at en uegentlig (d.v.s. orienteringsvendende)ikke-euklidisk flytning har præcis to forskellige grænsefixpunkter u og v. (Søg fixpunkter $z = e^{i\theta}$ for transformationen på side 19). "Linien" med grænsepunkter u og v kaldes afbildningens akse. Vis, at den afbildes på sig selv.

Hvis ethvert punkt på aksen er fixpunkt, kaldes afbildningen en ikke-euklidisk spejling. Vis, at der til enhver "linie" l findes præcis én spejling med l som akse, og vis endvidere, at en spejling er involutorisk. (Betragt først tilfældet, hvor l er "den reelle diameter").

Vis, at en uegentlig ikke-euklidisk flytning, som ikke er en spejling, er sammensætningen af en spejling og en translation med samme akse, en såkaldt glidespejling. (Betragt først det tilfælde, hvor grænsefixpunkterne er 1 og −1).

Københavns Universitet

Naturvidenskabelig embedseksamen

Sommeren 1963

Matematik 3

Skriftlig prøve

Alle hjælpemidler er tilladt.

En besvarelse betragtes som fuldstændig, hvis to af opgaverne 1, 2, 3 og to af opgaverne 3, 4, 5 er korrekt løste.

Opgave nr. 1.

I en projektiv plan Π^2 er givet to forskellige punkter A og B, tre indbyrdes og fra linien AB forskellige linier a_1, a_2, a_3 gennem A og tre indbyrdes og fra linien AB forskellige linier b_1, b_2, b_3 gennem B. Skæringspunktet mellem a_i og b_j betegnes C_{ij}, $i,j = 1,2,3$. Der gælder da, at linierne $C_{12}C_{21}$, $C_{31}C_{13}$ og $C_{23}C_{32}$ går gennem samme punkt.

Bevis denne sætning (f.eks. ved at inddrage dualitetsprincippet for planen).

Planen Π^2 antages at være en lineær mangfoldighed i et tredimensionalt projektivt rum. Formuler sætningen, der fås af den nævnte ved anvendelse af dualitetsprincippet for rummet.

Opgave nr. 2.

Lad A,B,C,D,E være indbyrdes forskellige punkter på en linie l i den reelle projektive plan. Gennem hvert af punkterne A,B,C lægges en fra l forskellig linie, henholdsvis a,b,c, således at disse tre linier ikke går gennem samme punkt. Skæringspunktet mellem b og c, mellem c og a og mellem a og b betegnes med henholdsvis P,Q og R. Linien DQ skærer b i S, linien EP skærer a i T, og linien ST skærer l i F.

Bevis, at

$$df(ABCF) = df(ABCD)\ df(ABCE),$$

enten ved hjælp af sætninger om centralprojektion og dobbeltforhold eller ved at figuren tænkes beliggende i den euklidiske plan med b som uegentlig linie.

Opgave nr. 3.

I en projektiv plan Π^2 er givet tre punkter E_0, E_1, E_2, som ikke ligger på samme linie, og en linie E^*, som ikke går gennem noget af disse punkter, endvidere tre punkter F_0, F_1, F_2, som ikke ligger på ret linie, og en linie F^*, som ikke går gennem noget af disse punkter.

Vis, at der findes en og kun én projektiv kollineation $\varphi : \Pi^2 \to \Pi^2$, ved hvilken E_0, E_1, E_2 og E^* afbildes på henholdsvis F_0, F_1, F_2 og F^*.

Med hensyn til det projektive koordinatsystem med fundamentalpunkterne E_0, E_1, E_2 og enhedslinien E^* har punkterne F_0, F_1, F_2 henholdsvis koordinatsættene (f_{00}, f_{10}, f_{20}), (f_{01}, f_{11}, f_{21}), (f_{02}, f_{12}, f_{22}), og F^* har liniekoordinatsættet (v_0, v_1, v_2). Find en matrixligning for φ.

Opgave nr. 4.

Om en given rumkurve k med den naturlige parameterfremstilling

$$\underline{x} = \underline{x}(s) \qquad a < s < b ,$$

der antages 5 gange kontinuert differentiabel, forudsættes, at der for krumningen κ og torsionen τ gælder

$$\left.\begin{aligned} &\kappa(s) > 0 , \\ &\tau(s) < 0 , \\ &\kappa(s) + \tau(s) = 1 , \end{aligned}\right\} \qquad a < s < b .$$

Med k^* betegnes kurven med paramterfremstillingen

$$\underline{y} = \underline{x}(s) + \underline{v}_2(s) , \qquad a < s < b ,$$

hvor $\underline{v}_2$ er hovednormalvektoren til k.

Find vinklen mellem tangentvektorerne til k og k^* i punkterne, der svarer til samme parameterværdi s.

Find hovednormalvektoren til k^* samt denne kurves krumning og torsion.

Mat 3. Sommeren 1963

Opgave nr. 5.

Den naturlige parameterfremstilling $\underline{x} = \underline{x}(s)$ for en kurve i planen er kontinuert differentiabel for $s \geq 0$ og 2 gange kontinuert differentiabel for $s > 0$. Kurvens krumning er

$$\kappa(s) = \frac{1}{\sqrt{s}}, \qquad s > 0 .$$

Vis, at kurvens evolut er en cirkel.

Opgave nr. 6.

En rumkurve er givet ved en naturlig parameterfremstilling

$$\underline{y} = \underline{y}(s), \qquad a < s < b,$$

der antages 6 gange kontinuert differentiabel. Det forudsættes, at krumningen er positiv og torsionen en konstant c. Med B betegnes den retlinede flade, der beskrives af kurvens binormaler.

Angiv en parameterfremstilling

$$\underline{x} = \underline{x}(u^1, u^2)$$

for B, idet $u^1 = s$ og en koordinat u^2 på binormalerne benyttes som parametre.

Vis, at B ikke er udfoldelig, når $c \neq 0$.

Find den metriske fundamentalform $g_{ij}du^i du^j$ for B.

For hvert reelt tal h betegnes med V_h den ved parameterfremstillingen

$$\begin{aligned} x_1 &= v^2 \cos v^1, & -\infty < v^1 < \infty, \\ x_2 &= v^2 \sin v^1, & -\infty < v^2 < \infty, \\ x_3 &= hv^1 & \end{aligned}$$

bestemte vindelflade. Vis, at hvis $c \neq 0$, findes der en isometrisk afbildning af B ind i én af disse vindelflader.