KØBENHAVNS UNIVERSITET

MATEMATISK INSTITUT

TOPOLOGI - NOTER

Matematik 3 FU, 1988

Kjeld Bagger Laursen

Revideret juni '88

1. GENEREL TOPOLOGI.

DEFINITION 1.1. En topologi på en mængde X er et system τ af delmængder af X, der opfylder

i) $\emptyset, X \in \tau$.

ii) Hvis $X_1, \ldots, X_n$ er endelig mange mængder der tilhører τ, så vil fællesmængden $X_1 \cap \ldots \cap X_n$ tilhøre τ.

iii) Hvis $(X_i)_{i \in I}$ er en vilkårlig familie af mængder fra τ, så vil foreningsmængden $\bigcup_{i \in I} X_i$ tilhøre τ.

Vi siger at (X,τ) er et topologisk rum og mængderne fra τ kaldes de åbne mængder i (X,τ).

Eksempel 1.1. Ethvert metrisk rum (M,d) er et topologisk rum (Mat 2 MA 84/85, Sætning 2, s.I.2.3).

Eksempel 1.2. Lad $X \neq \emptyset$ være vilkårlig og lad τ være mængden af delmængder af X. Det er trivielt at (X,τ) er et topologisk rum. Topologien kaldes den diskrete topologi. Dette eksempel er et specialtilfælde af det foregående, idet den diskrete topologi kan defineres med en metrik. (Hvilken?) Den diskrete metrik

Eksempel 1.3. Den trivielle topologi på en mængde X har som sine åbne mængder kun X og $\emptyset$.

Der kommer flere eksempler på topologiske rum efterhånden. Men først en række begreber; alle er de kendte fra metriske rum.

DEFINITION 1.4. En mængde N i et topologisk rum (X,τ) er en omegn af et punkt $x \in X$, hvis der findes en åben mængde G så $x \in G \subseteq N$. Systemet af omegne af x betegnes med $\mathcal{U}(x)$.

Et punkt x i en mængde Y er et <u>indre</u> punkt i Y hvis Y er en omegn af x. Mængden af indre punkter i Y betegnes Y^0.

En delmængde F i et topologisk rum (X,τ) er <u>afsluttet</u> (eller <u>lukket</u>) hvis $X \setminus F \in \tau$.

For $Y \subseteq X$ defineres afslutningen $\overline{Y}$ som fællesmængden af alle afsluttede delmængder af X, der indeholder Y. Hvis $y \in \overline{Y}$ så siger vi, at y er et <u>kontaktpunkt</u> for Y.

En mængde Y er <u>tæt</u> i en større mængde Z hvis $Y \subseteq Z \subseteq \overline{Y}$, altså hvis ethvert punkt af Z er et kontaktpunkt for Y.

Et topologisk rum (X,τ) er <u>separabelt</u> hvis det indeholder en tæt numerabel delmængde.

<u>SÆTNING 1.5</u>. Lad (X,τ) være et topologisk rum, lad $x \in X$ og $Y \subseteq X$. Så er $x \in \overline{Y}$ hvis og kun hvis $Y \cap A \neq \emptyset$ for enhver omegn A af x.

<u>Bevis</u>: Det er nok at checke betingelsen for åbne omegne. (Hvorfor?)

Antag $Y \cap A = \emptyset$ for en åben omegn A af x. Så er $X \setminus A$ en afsluttet mængde, der indeholder Y, men ikke x; altså gælder at $x \notin \overline{Y}$.

Hvis omvendt $x \notin \overline{Y}$, så er $X \setminus \overline{Y}$ en åben omegn af x for hvilken $(X \setminus \overline{Y}) \cap Y = \emptyset$.

Hvis (X,τ) er et topologisk rum og $Y \subseteq X$, så definerer vi den **<u>relative topologi</u>** på Y som den topologi hvis åbne mængder er af formen $A \cap Y$, $A \in \tau$. Det er klart, at der herved defineres en topologi på Y. En mængde i Y er afsluttet præcis når den er af formen $F \cap Y$, hvor F er afsluttet i X. (Vis det!)

Hvis X er udstyret med to topologier σ og τ, så siges σ at være <u>grovere</u> end τ (og τ siges at være <u>finere</u> end σ) hvis $\sigma \subseteq \tau$ (τ indeholder altså flere mængder). Dette giver os en ordning på mængden af topologier på X, nemlig inklusionsordningen.

BLØD
Inklusion

Bemærk at den trivielle topologi (Eksempel 1.3) er det første element i denne ordning, og at den diskrete topologi er det sidste element.

<u>SÆTNING 1.6</u>. Lad $\{\tau_j \mid j \in J\}$ være en familie af topologier på X. Så findes der en groveste topologi $\vee\tau_j$, som er finere end alle τ_j og der findes en fineste topologi $\wedge\tau_j$, som er grovere end alle τ_j.

<u>Bevis</u>. Lad $\wedge_{j\in J}\tau_j := \{A \subseteq X \mid A \in \tau_j$ for alle $j \in J\}$. Altså er en mængde åben i $\wedge_{j\in J}\tau_j$ netop når den er åben i samtlige τ_j. Det er klart, at $\wedge_{j\in J}\tau_j$ er en topologi (check selv efter!); det er også klart, at $\wedge_{j\in J}\tau_j$ er grovere end samtlige τ_j, men finere end enhver topologi som er grovere end alle τ_j.

VLØDT INKLUSIONSTEGN

For at definere $\vee\tau_j$ betragter vi mængden T af topologier, der er finere end alle τ_j. Den diskrete topologi er åbenbart i T, så $T \neq \emptyset$. Nu definerer vi $\vee\tau_j := \wedge_{\tau\in T}\tau$. Det er klart, at der herved er defineret en topologi, som er grovere end alle de topologier, der er finere end samtlige τ_j; og den tilhører T: lad nemlig τ_j være givet, lad $A \in \tau_j$ og bemærk at $A \in \tau$ for alle $\tau \in T$; altså er $A \in \vee\tau_j$. Altså er $\vee\tau_j$ finere end hvert τ_j. Af selve definitionen af $\vee\tau_j$ følger da at $\vee\tau_j$ er den groveste af alle finere topologier.

<u>DEFINITION 1.7</u>. Hvis ρ er en familie af delmængder af X så defineres **<u>topologien frembragt af</u>** ρ som $\wedge\tau$, hvor τ gennemløber samtlige topologier $\tau \supseteq \rho$. Vi siger også, at ρ er en **<u>subbasis</u>** for den derved definerede topologi. Hvis topologien frembragt af ρ netop består af samtlige foreningsmængder af mængder fra ρ siger vi, at ρ er en **<u>basis</u>** for topologien.

<u>SÆTNING 1.8</u>. Lad ρ være en familie af delmængder af X. Så er ρ en basis for en eller anden topologi (som så må være den af ρ frembragte topologi) netop når ρ opfylder følgende:

i) Hvis A_1 og A_2 tilhører ρ og hvis $x \in A_1 \cap A_2$, så findes $A_3 \in \rho$ så $x \in A_3 \subseteq A_1 \cap A_2$.

ii) $\cup\{A \mid A \in \rho\} = X$.

<u>Bevis:</u> Antag ρ er en basis for topologien τ. Hvis $A_1 \in \rho$ og $A_2 \in \rho$ da er $A_1 \in \tau$ og $A_2 \in \tau$, altså $A_1 \cap A_2 \in \tau$. Men $A_1 \cap A_2$ er jo foreningsmængde af mængder fra ρ, altså er i) opfyldt. Og ii) gælder, da $X \in \tau$, og derfor er en foreningsmængde af mængder fra ρ.

For at bevise den modsatte implikation lader vi σ betegne mængden af foreningsmængder af mængder fra ρ. Her tillader vi indexmængder med vilkårlig kardinalitet, inkl. den tomme indexmængde, dvs. $\emptyset \in \sigma$ (idet $\cup_{j\in\emptyset} A_j := \emptyset$). Sammen med ii) ovenfor betyder det at i) i definitionen af topologisk rum er opfyldt. Da iii) i Definition 1.1 er trivielt opfyldt, mangler vi at vise, at $A_1 \cap A_2 \in \sigma$ hvis $A_1, A_2 \in \sigma$. Det er nok at vise, at hvis $x \in A_1 \cap A_2$ kan vi finde $C \in \rho$, så $x \in C \subseteq A_1 \cap A_2$. (Hvorfor er det nok? Og hvorfor kan vi nøjes med to mængder A_1, A_2?) Pr. definition af σ, så findes $B_1 \in \rho$ så $x \in B_1 \subseteq A_1$ og der findes $B_2 \in \rho$ så $x \in B_2 \subseteq A_2$. Af betingelse i) følger så at der findes $C \in \rho$ så $x \in C \subseteq B_1 \cap B_2 \subseteq A_1 \cap A_2$.

<u>KOROLLAR 1.9.</u> Hvis ρ er en subbasis for en topologi τ så er mængden σ af alle fællesmængder af endelig mange mængder fra $\rho \cup \{X\}$ en basis for τ.

<u>Bevis:</u> Betingelse ii) i Sætning 1.8 er trivielt opfyldt, så vi skal blot checke i). Lad A_1 og A_2 være fællesmængder af endelig mange mængder fra $\rho \cup \{X\}$. Så er $A_1 \cap A_2$ også en fællesmængde af endelig mange mængder fra $\rho \cup \{X\}$. Hvis $x \in A_1 \cap A_2$ kan altså $A_3 = A_1 \cap A_2$ bruges.

<u>Eksempel 1.10.</u> Lad $F(S,\mathbb{C})$ betegne mængden af funktioner fra mængden $S \neq \emptyset$ ind i den komplekse plan. Lad ρ være mængden af delmængder af $F(S,\mathbb{C})$ af formen

$$N(f,x_1,\dots,x_n,\varepsilon) := \{g \in F(S,\mathbb{C}) \mid |f(x_j)-g(x_j)| < \varepsilon,\ j=1,\dots,n\},$$

hvor $f \in F(S,\mathbb{C})$, $x_1,\dots,x_n \in S$, $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ og $n \in \mathbb{N}$ er vilkårligt givne.

Betingelse ii) i Sætning 1.8 er tydeligvis opfyldt af ρ. Og hvis

$$N_1 := N(f_1,x_1,\dots,x_m,\varepsilon_1) \quad \text{og}$$

$$N_2 := N(f_2,y_1,\dots,y_\ell,\varepsilon_2)$$

er givet og $f \in N_1 \cap N_2$, så er

$$0 \le \eta_j := |f(x_j)-f_1(x_j)| < \varepsilon_1, \quad j=1,\dots,m$$

og

$$0 \le \xi_i := |f(y_i)-f_2(y_i)| < \varepsilon_2, \quad i=1,\dots,\ell.$$

Med $\xi := \min_{i,j}(\varepsilon_1-\eta_j, \varepsilon_2-\xi_i)$, får vi at

$$f \in N(f,x_1,\dots,x_m,y_1,\dots,y_\ell,\xi) \subseteq N_1 \cap N_2.$$

Altså er i), Sætning 1.8 også opfyldt. Heraf følger at ρ er basis for en topologi på $F(S,\mathbb{C})$, topologien for <u>punktvis konvergens</u> på S, som vi skal vende tilbage til i mange afskygninger.

<u>Eksempel 1.11.</u> Lad X være et vektorrum over $\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$. En seminorm ρ på X er en funktion $\rho: X \to [0,\infty[$ der opfylder

a) $\rho(x+y) \le \rho(x) + \rho(y)$ for alle $x,y \in X$

b) $\rho(\alpha x) = |\alpha|\rho(x)$ for alle $x \in X$ og alle skalarer α.

Tænk på tre forskellige eksempler på seminormerede vektorrum! Du kender endda også nogle, der ikke er normerede vektorrum (seminormen ρ er en norm, hvis ρ også opfylder at $\rho(x) = 0$ medfører $x = 0$).

Antag nu at P er en familie af seminormer på X. Vi definerer en topologi τ på X ved som subbasis for τ at bruge

$$\{x \in X \mid \rho(x-x_0) < \varepsilon\},$$

hvor ρ gennemløber P, x_0 gennemløber X og ε gennemløber $\mathbb{R}_+$. En delmængde U af X er en omegn af et punkt x_0 i X, hvis og kun hvis vi kan finde en delmængde V af U af form

$$V = \bigcap_{j=1}^{n} \{x \in X \mid \rho_j(x-x_o) < \varepsilon\} ,$$

med $n \in \mathbb{N}$, $\rho_1,\rho_2,\dots,\rho_n \in P$ og $\varepsilon > 0$; thi en sådan mængde V er en åben omegn af x_o indeholdt i U; og hvis U er en omegn af x_o, kan vi ifølge Korollar 1.9 finde $n \in \mathbb{N}$, $\rho_1,\rho_2,\dots,\rho_n \in P$, $x_1,x_2,\dots,x_n \in X$ og $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\dots,\varepsilon_n \in]0,\infty[$, sådan at

$$x_o \in \bigcap_{j=1}^{n} \{x \in X \mid \rho_j(x-x_j) < \varepsilon_j\} \subseteq U ;$$

sæt $\varepsilon = \min(\varepsilon_j - \rho_j(x_o-x_j))$; da $\rho_j(x_o-x_j) < \varepsilon_j$ for hvert j , er $\varepsilon > 0$; sæt $V = \bigcap_{j=1}^{n} \{x \in X \mid \rho_j(x-x_o) < \varepsilon\}$; da vi for $x \in V$ og $j \in \{1,2,\dots,n\}$ har, at $\rho_j(x-x_j) \leq \overset{<\varepsilon}{\rho_j(x-x_o)} + \overset{<\varepsilon_j-\varepsilon}{\rho_j(x_o-x_j)} < \varepsilon_j$, er $V \subseteq U$. Det følger, at en delmængde U af X er åben, hvis og kun hvis vi til ethvert $x_o \in X$ kan finde $n \in \mathbb{N}$, $\rho_1,\rho_2,\dots,\rho_n \in P$ og $\varepsilon > 0$, sådan at

$$\bigcap_{j=1}^{n} \{x \in X \mid \rho_j(x-x_o) < \varepsilon\} \subseteq U .$$

Et konkret eksempel: Betragt rummet $C(\mathbb{R})$ af kontinuerte reelle funktioner som et vektorrum over $\mathbb{R}$. Lad $K \subseteq \mathbb{R}$ være afsluttet og begrænset. Definer $\rho_K(f) = \sup\{|f(x)| \mid x \in K\}$ for $f \in C(\mathbb{R})$. Så er $P = \{\rho_K \mid K$ afsluttet og begrænset i $\mathbb{R}\}$ en familie af seminormer på $C(\mathbb{R})$.

2. KONVERGENS.

Vi skal nu indføre en generalisation af følge-begrebet, som muliggør, at et konvergens-begreb, der er analogt med situationen i metriske rum, kan gives mening i vilkårlige topologiske rum.

Dertil skal vi først bruge nogle passende ordnings-betingelser på de generaliserede følgers indexmængde.

DEFINITION 2.1. En præordnet mængde $D \neq \emptyset$ er opad filtrerende, hvis D er forsynet med en præorden $\leq$ (altså en transitiv relation for hvilken $\alpha \leq \alpha$, $\forall \alpha \in D$) der også opfylder, at alle par af punkter $\alpha_1,\alpha_2 \in D$ har en majorant; for alle $\alpha_1,\alpha_2 \in D$ findes $\alpha_3 \in D$ således at

$$\alpha_1 \leq \alpha_3 \quad \text{og} \quad \alpha_2 \leq \alpha_3 .$$

DEFINITION 2.2. Hvis X er en mængde, så er et net eller en generaliseret følge i X en afbildning fra en opad filtrerende mængde ind i X . Betegnelsen er almindeligvis $(x_\alpha)_{\alpha\in D}$.

Eksempler 2.3. 1) $\mathbb{N}$ med den sædvanlige ordning er åbenbart opad filtrerende. Et net $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ med $\mathbb{N}$ som indexmængde kaldes som sædvanlig en følge.

2) $\mathbb{R}$ med den sædvanlige ordning er opad filtrerende. I det hele taget er enhver totalt ordnet mængde opad filtrerende.

En funktion defineret på $\mathbb{R}$ kan således opfattes som et net.

3) Mængden af delmængder af en given mængde, ordnet ved inklusion, altså $A \leq B \Leftrightarrow A \subseteq B$ er opad filtrerende. Mængden af endelige delmængder med inklusionsordningen er også opad filtrerende.

DEFINI[illegible] Lad $(x_\alpha)_{\alpha\in D}$ være et net på X og lad $Y \subseteq X$. Nettet $(x_\alpha)_{\alpha\in D}$ siges at være hyppigt (eller ofte) i Y hvis

$$\forall \alpha \in D \; \exists \beta \geq \alpha : x_\beta \in Y \, .$$

Nettet er i Y <u>fra et vist trin</u> hvis

$$\exists \alpha \in D \; \forall \beta \geq \alpha : x_\beta \in Y \, .$$

Vi skriver i så fald $x_\alpha \in Y$ f.v.t.

Hvis (X,τ) er et topologisk rum og $(x_\alpha)_{\alpha \in D}$ er et net i X, så <u>konvergerer</u> (x_α) <u>mod</u> $x \in X$ hvis det for enhver omegn $N \in \mathcal{O}(x)$ gælder at $x_\alpha \in N$ f.v.t. Vi siger da også, at x er et <u>grænsepunkt</u> for $(x_\alpha)_{\alpha \in D}$. Et net kaldes <u>konvergent</u>, hvis det har mindst ét grænsepunkt.

Et punkt $x \in X$ er et <u>fortætningspunkt</u> for $(x_\alpha)_{\alpha \in D}$, hvis det for enhver omegn $N \in \mathcal{O}(x)$ gælder at (x_α) hyppigt er i N. (Bemærk at indexmængden sommetider ikke nævnes).

Endelig skal vi også indføre det til delfølger svarende begreb.

<u>**DEFINITION 2.5.**</u> Et net $(y_\beta)_{\beta \in E}$ er et <u>**delnet**</u> af et net $(x_\alpha)_{\alpha \in D}$ hvis der findes en afbildning $\varphi : E \to D$ der opfylder

i) $\forall \beta \in E : \; y_\beta = x_{\varphi(\beta)}$

ii) $\forall \alpha_0 \in D \; \exists \beta_0 \in E : \; \forall \beta \geq \beta_0 : \; \varphi(\beta) \geq \alpha_0$.

Bemærk at vi <u>ikke</u> forlanger at φ skal være ordenstro, men kan nøjes med at kræve, at delnettet indeholder "mange" elementer fra "halen" af $(x_\alpha)_{\alpha \in D}$. Heri ligger specielt, at et delnet af en følge ikke behøver være en delfølge. Eks. $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{N}$
$x \mapsto [x]$

Det følger umiddelbart af definitionen, at hvis et net $(x_\alpha)_{\alpha \in D}$ i det topologiske rum (X,τ) har et delnet $(y_\beta)_{\beta \in E}$, der konvergerer mod $x \in X$, så er x et fortætningspunkt for $(x_\alpha)_{\alpha \in D}$. (Lav ræsonnementet!) Vi skal se, at det omvendte også gælder. Men først et eksempel:

<u>Eksempel 2.6</u>. Lad (X,τ) være et topologisk rum, lad $x \in X$ og giv omegnssystemet $\mathcal{O}(x)$ den omvendte inklusionsordning. For hvert $N \in \mathcal{O}(x)$ vælg $x_N \in N$. Så er $(x_N)_{N \in \mathcal{O}(x)}$ et net, der konvergerer mod x.

<u>SÆTNING 2.7</u>. Lad Δ være en familie af delmængder af X som er stabil under dannelse af endelige fællesmængder. Hvis et net $(x_\alpha)_{\alpha \in D}$ forekommer hyppigt i enhver mængde $A \in \Delta$, så findes et delnet $(y_\beta)_{\beta \in E}$, som for ethvert A i Δ er i A fra et vist trin.

<u>Bevis</u>: Forudsætningen om Δ viser, at mht. omvendt inklusion er Δ en opad filtrerende mængde $[A_1, A_2 \in \Delta \Rightarrow A_1 \cap A_2 \in \Delta$ og $A_1 \cap A_2 \geq A_1$ og $\geq A_2$ i den omvendte inklusionsordning]. Lad så

$$M := \{(\alpha, A) \in D \times \Delta \mid x_\alpha \in A\}$$

være udstyret med produktordningen arvet fra $D \times \Delta$ (Bemærkning 2.12). Vi påstår, at M er opad filtrerende: lad nemlig (α_1, A_1) og $(\alpha_2, A_2) \in M$. Da (x_α) er hyppigt i $A_1 \cap A_2 \in \Delta$ så findes $\alpha_3 \geq \alpha_1$ og $\alpha_3 \geq \alpha_2$ så $x_{\alpha_3} \in A_1 \cap A_2$. Men så er $(\alpha_3, A_1 \cap A_2) \in M$ og $(\alpha_3, A_1 \cap A_2) \geq (\alpha_1, A_1)$ og $(\alpha_3, A_1 \cap A_2) \geq (\alpha_2, A_2)$. Afbildningen $h : M \to D$ givet ved $h(\alpha, A) = \alpha$ er åbenbart ordningsbevarende, og der gælder, at hvis $\alpha \in D$ og $A \in \Delta$, så findes $\alpha_1 \geq \alpha$ med $x_{\alpha_1} \in A$, altså er $\alpha \leq \alpha_1 = h((\alpha_1, A))$. Derfor er $(x_{h(\mu)})_{\mu \in M}$ et delnet af (x_α). Dette delnet tilhører ethvert $A \in \Delta$ fra et vist trin: hvis A er givet, så findes ifølge forudsætning $\alpha \in D$ så at $x_\alpha \in A$, altså $(\alpha, A) \in M$, og dermed gælder at $x_{h(\mu)} \in A$ for alle $\mu \geq (\alpha, A)$.

<u>SÆTNING 2.8</u>. For ethvert fortætningspunkt x for et net i et topologisk rum (X,τ) findes et delnet, der konvergerer mod x.

Bevis: Lad Δ være omegnsystemet for x og lad delnettet være det som Sætning 2.7 giver os. Det følger af definitionen på konvergens, at dette delnet konvergerer mod x.

Den næste sætning svarer til Sætning 4, s.I.2.5 i 2 MA 84/85-noterne.

Sætning 2.9. Lad Y være en delmængde i et topologisk rum (X,τ). Afslutningen $\overline{Y}$ består netop af de punkter x i X for hvilke der findes et net i Y, der konvergerer mod x.

Bevis: Antag $x \in \overline{Y}$; så er ifølge Sætning 1.5 $Y \cap A \neq \emptyset$ for enhver omegn A af x. Vælg $x_A \in Y \cap A$ for hver omegn A af x. Omegnssystemet $\mathcal{O}(x)$ er opad filtrerende ved omvendt inklusion (jvf. opgave 2c)) og nettet $(x_A)_{A \in \mathcal{O}(x)}$ konvergerer mod x (jvf. Eksempel 2.6).

Hvis omvendt $(x_\lambda)_{\lambda \in D}$ er et net i Y som konvergerer mod x og hvis A er en omegn af x, så findes λ_0, så det for $\lambda \geq \lambda_0$ gælder, at $x_\lambda \in A$. Altså er $A \cap Y \neq \emptyset$. Men så siger Sætning 1.5, at $x \in \overline{Y}$.

Et net $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ i X kaldes **universelt**, hvis det for enhver delmængde $Y \subseteq X$ gælder, at $x_\alpha \in Y$ f.v.t. eller at $x_\alpha \in X \setminus Y$ f.v.t.

Bemærk at hvis det universelle net $(x_\alpha)_{\alpha \in D}$ forekommer hyppigt i en mængde A, så er nettet i A fra et vist trin (hvis (x_α) er hyppigt i A, kan (x_α) jo ikke være i $X \setminus A$ fra et vist trin. Altså er (x_α) i A fra et vist trin). Heraf følger straks, at et universelt net konvergerer mod ethvert af sine fortætningspunkter.

Vi skal nu se, at Zorn's lemma medfører, at et vilkårligt net har et universelt delnet.

Lemma 2.10. Lad $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ være et net i X. Så findes et system Δ af delmængder af X med følgende tre egenskaber

i) (x_α) er hyppigt i hver mængde i Δ.

ii) Δ er stabil mht. endelig fællesmængde-dannelse.

iii) $\forall D \subseteq X$: $D \in \Delta$ eller $X \setminus D \in \Delta$.

Bevis: Familien F af systemer med egenskaberne i) og ii) indeholder $\{X\}$, så $F \neq \emptyset$. Lad F være ordnet ved inklusion og betragt en totalt ordnet delmængde $C \subseteq F$. Vi viser, at $\Delta_0 := \cup_{\Delta \in C} \Delta$ opfylder i) og ii). Hvis $D \in \Delta_0$, så findes $\Delta \in C$, så $D \in \Delta$. Men så er (x_α) hyppigt i D. Hvis $D_1,\dots,D_n \in \Delta_0$ så findes $\Delta \in C$ så $D_1,\dots,D_n \in \Delta$ (C er jo totalt ordnet). Derfor er $D_1 \cap \dots \cap D_n \in \Delta \subseteq \Delta_0$. Zorn's lemma medfører da at F indeholder maximale elementer. Lad Δ være maximal i F. Vi viser nu, at iii) er opfyldt af Δ. Bemærk først, at systemet af mængder, der indeholder en mængde fra Δ, opfylder i) og ii), så Δ har den egenskab, at $E \in \Delta$ og $F \supseteq E \Rightarrow F \in \Delta$.

Lad $D \subseteq X$ være en vilkårlig delmængde. Vi bemærker først, at (x_α) er hyppigt i $D \cap E$ for alle $E \in \Delta$ eller hyppigt i $E \setminus D$ for alle $E \in \Delta$, hvis nemlig $E_1 \in \Delta$, så (x_α) ikke er hyppigt i $D \cap E_1$, og der også findes $E_2 \in \Delta$ så (x_α) ikke er hyppigt i $E_2 \setminus D$, så er (x_α) ikke hyppigt i den mindre mængde $D \cap (E_1 \cap E_2)$, og ikke hyppigt i $(E_1 \cap E_2) \setminus D$. Men det er absurd, for så findes $\alpha_0 \in A$, så det for $\alpha > \alpha_0$ gælder, at $x_\alpha \notin D \cap (E_1 \cap E_2)$ og $x_\alpha \notin (E_1 \cap E_2) \setminus D$. Men (x_α) er jo hyppigt i $E_1 \cap E_2$ ifølge ii).

Lad os antage, at (x_α) er hyppigt i $D \cap E$ for alle $E \in \Delta$. Sæt

$$\Delta' := \{Y \subseteq X \mid \exists E \in \Delta\colon D \cap E \subseteq Y\}.$$

Abenbart gælder, at $\Delta' \supseteq \Delta \cup \{D\}$. Det følger at $(x)_\alpha$ er hyppigt i hver mængde i Δ'. Betingelse ii) er opfyldt af Δ': hvis $Y_1, Y_2 \in \Delta'$ så findes $E_1, E_2 \in \Delta$ så $E_1 \cap D \subseteq Y_1$, $E_2 \cap D \subseteq Y_2$. Altså vil $(E_1 \cap E_2) \cap D \subseteq Y_1 \cap Y_2$, og da $E_1 \cap E_2 \in \Delta$, gælder $Y_1 \cap Y_2 \in \Delta'$. Af maximaliteten af Δ følger da, at $\Delta = \Delta'$, altså at $D \in \Delta$. Hvis i stedet (x_α) forekommer hyppigt i $E \setminus D = (X \setminus D) \cap E$, $E \in \Delta$, kunne vi slutte, at $X \setminus D \in \Delta$. Altså er iii) opfyldt og lemmaet bevist.

<u>Sætning 2.11</u>. Ethvert net $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ i X har et universelt delnet.

<u>Bevis</u>: Lad Δ have egenskaberne i Lemma 2.10. Af Sætning 2.7 følger eksistensen af et delnet, der er i hver mængde i Δ fra et vist trin. Dette delnet er universelt.

<u>Bemærkning 2.12</u>. Hvis $(M_1, \leq)$ og $(M_2, \leq)$ er præordnede mængder, er <u>produktordningen</u> $\leq$ på $M_1 \times M_2$ defineret ved at $(m_1, m_2) \leq (m_1', m_2')$ hvis og kun hvis $m_1 \leq m_1'$ og $m_2 \leq m_2'$.

3. KONTINUITET.

<u>DEFINITION 3.1</u>. Lad (X,τ) , (Y,σ) være topologiske rum. En funktion $f: X \to Y$ er <u>kontinuert i et punkt</u> $x_0 \in X$, hvis $f^{-1}(A) \in \mathcal{O}(x_0)$ for ethvert $A \in \mathcal{O}(f(x_0))$. Funktionen f er <u>kontinuert</u>, hvis den er kontinuert i alle punkter $x \in X$.

<u>SÆTNING 3.2</u>. En funktion $f: (X,\tau) \to (Y,\sigma)$ er kontinuert hvis og kun hvis $f^{-1}(A) \in \tau$ for ethvert $A \in \sigma$.

<u>Bevis</u>: [Sammenlign Mat 2 MA, Sætning 1, s.I.3.2 1984/85.] Antag f er kontinuert og lad $A \in \sigma$. For ethvert $a \in f^{-1}(A)$ gælder $f(a) \in A$. Da $A \in \sigma$ er $A \in \mathcal{O}(f(a))$. Da f er kontinuert i a er $f^{-1}(A) \in \mathcal{O}(a)$. Altså findes $B_a \in \tau$ således at $a \in B_a \subseteq f^{-1}(A)$. Det er klart, at $f^{-1}(A) = \bigcup_{a \in f^{-1}(A)} B_a$. Altså er $f^{-1}(A) \in \tau$ (Definition 1.1 (iii)).

Antag dernæst at $f^{-1}(A) \in \tau$ for ethvert $A \in \sigma$. Lad $x \in X$ og lad $A \in \mathcal{O}(f(x)) \cap \sigma$. Så er $f^{-1}(A) \in \tau$ og da $x \in f^{-1}(A)$ gælder $f^{-1}(A) \in \mathcal{O}(x)$. Altså er f kontinuert i x . [illegible]
[illegible] $A \in \mathcal{O}($[illegible] $\exists B \in \sigma$: $B \in \mathcal{O}(f$[illegible]$) \wedge B \subseteq A$ [illegible] da $f^{-1}(B) \in \tau$ og $f^{-1}(B) \subseteq f^{-1}(A)$, er f[illegible]

<u>SÆTNING 3.3</u>. En funktion $f: (X,\tau) \to (Y,\sigma)$ er kontinuert i punktet $x \in X$ hvis og kun hvis det for ethvert net $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ i X , der konvergerer mod x , gælder, at $(f(x_\alpha))_{\alpha \in A}$ konvergerer mod $f(x)$.

<u>Bevis</u>: [Sammenlign Mat 2 MA, Sætning, s.I.3.1.] Antag f kontinuert i x og $x_\alpha \to x$. Lad $U \in \mathcal{O}(f(x))$; så er $f^{-1}(U) \in \mathcal{O}(x)$ og derfor findes $\alpha_0 \in A$ så $x_\alpha \in f^{-1}(U)$ for alle $\alpha \geq \alpha_0$. Men så er $f(x_\alpha) \in U$ for alle $\alpha \geq \alpha_0$. Altså konvergerer $(f(x_\alpha))_{\alpha \in A}$ mod $f(x)$.

Antag f ikke er kontinuert i x ; så findes en omegn $U \in \mathcal{O}(f(x))$ for hvilken $f^{-1}(U)$ ikke er en omegn af x . Altså er x ikke indre punkt i $f^{-1}(U)$. Da $x \in f^{-1}(U)$, må $x \in f^{-1}(U) \setminus f^{-1}(U)^0$. Altså $x \in (X \setminus f^{-1}(U))^-$ (gør rede for det - brug Sætning 1.5). Men så findes ifølge Sætning 2.9 et net

$(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ i $X \setminus f^{-1}(U)$, der konvergerer mod x. Nettet $(f(x_\alpha))_{\alpha \in A}$ kan ikke konvergere mod $f(x)$, thi $f(x_\alpha) \in Y \setminus U$ for alle $\alpha \in A$., og U er jo en omegn af $f(x)$

<u>SÆTNING 3.4</u>. Hvis $f: (X,\tau) \to (Y,\sigma)$ er kontinuert og $g: (Y,\sigma) \to (Z,\rho)$ er kontinuert, så er $g \cdot f: (X,\tau) \to (Z,\rho)$ kontinuert.

<u>Bevis</u>: Øvelse. (Opgave 3g).)

<u>DEFINITION 3.5</u>. En afbildning $f: (X,\tau) \to (Y,\sigma)$ er <u>åben</u>, hvis billedet af enhver åben mængde i X er åben i Y, altså $A \in \tau \Rightarrow f(A) \in \sigma$.

Funktionen f er en <u>homeomorfi</u>, hvis f er bijektiv, kontinuert og åben. Bemærk at en bijektion f er åben netop når f^{-1} er kontinuert.

4. NYE TOPOLOGISKE RUM FRA GAMLE.

Vi har allerede nævnt en måde at danne topologiske rum ud fra givne rum, nemlig delmængder med den relative topologi. Et øjebliks overvejelse viser, at hvis (X,τ) er et topologisk rum og $Y \subseteq X$ så er den relative topologi på Y den groveste topologi, der gør inklusionsafbildningen, altså indlejringen $i: Y \to X$, kontinuert. Denne måde at beskrive denne topologi kan opfattes som et specielt tilfælde af følgende generelle procedure.

<u>DEFINITION 4.1</u>. Lad X være en mængde og lad F være en familie af funktioner f fra X ind i hver sit topologiske rum (Y_f, τ_f). Ved <u>initialtopologien</u> bestemt ved F forstås den groveste topologi på X, der gør alle afbildningerne $f \in F$ kontinuerte.

En subbasis for denne topologi udgøres åbenbart af alle mængder af formen $f^{-1}(A)$, hvor $A \in \tau_f$ og $f \in F$. Alle disse mængder skal jo med i topologien, hvis alle $f \in F$ skal være kontinuerte (Sætning 3.2).

En basis for initialtopologien udgøres derfor af samtlige fællesmængder af endelig mange mængder $f^{-1}(A)$, hvor $A \in \tau_f$ og $f \in F$. Det er en umiddelbar konsekvens af Korollar 1.9.

<u>SÆTNING 4.2</u>. Lad X have initialtopologien bestemt ved en familie F af afbildninger fra X. Et net $(x_\alpha)_{\alpha \in D}$ konvergerer da mod $x \in X$ hvis og kun hvis $(f(x_\alpha))_{\alpha \in D}$ konvergerer mod $f(x)$ for alle $f \in F$.

<u>Bevis</u>: Retningen "kun hvis" er klar (Sætning 3.3). Antag omvendt at $f(x_\alpha) \to f(x)$ for alle $f \in F$ og lad $U \in \mathcal{O}(x)$ være åben. Så findes en mængde i U fra den ovenfor nævnte basis for initialtopologien, der indeholder x: vi kan altså finde $f_1, \ldots, f_n \in F$ og $A_j \in \tau_{f_j}$, $j = 1, \ldots, n$, så

$$x \in f_1^{-1}(A_1) \cap \ldots \cap f_n^{-1}(A_n) \subseteq U .$$

Da $f_j(x_\alpha) \to f_j(x)$ og da $f_j(x) \in A_j$, $j = 1,\ldots,n$, findes $\alpha_j \in D$ så $f_j(x_\alpha) \in A_j$, for alle $\alpha \geq \alpha_j$, $j = 1,\ldots,n$. Vælg $\alpha_0 \geq \alpha_1,\ldots,\alpha_n$. Så vil $f_j(x_\alpha) \in A_j$ for $j = 1,\ldots,n$ og alle $\alpha \geq \alpha_0$. Altså vil $x_\alpha \in f_j^{-1}(A_j)$ for $j = 1,\ldots,n$ og alle $\alpha \geq \alpha_0$. Og det medfører jo at $x_\alpha \in U$ for alle $\alpha \geq \alpha_0$.

Det vigtigste eksempel på en initialtopologi er velsagtens produkttopologien, jvf. 2MA, I.4.2 .

DEFINITION 4.3. Lad $(X_i,\tau_i)_{i\in I}$ være en familie af topologiske rum og lad $X = \Pi_{i\in I} X_i$ være produktrummet (jvf. 2AL, Mængder s. 9). Lad $\pi_i : X \to X_i$ betegne projektionen på den i'te koordinat. Initialtopologien givet ved familien $(\pi_i)_{i\in I}$ er da <u>produkttopologien</u> på X.

Ifølge ovenstående udgør mængden af endelige fællesmængder $\cap\, \pi_j^{-1}(A_j)$, hvor $A_j \in \tau_j$, en basis for produkttopologien. Bemærk at disse basismængder netop er produktmængderne af formen $\Pi_{i\in I} A_i$, hvor $A_i \in \tau_i$ for alle $i \in I$ og hvor $A_i = X_i$ undtagen for endeligt mange indices i. Heraf følger iøvrigt, at projektionerne π_i alle er åbne afbildninger. (Lav argumentet!)

Lad (X,τ) være et topologisk rum og $\sim$ være en ækvivalensrelation i X. Lad $\tilde{X}$ være mængden af ækvivalensklasser og lad $Q: X \to \tilde{X}$ være kvotientafbildningen. Vi siger, at en mængde $A \subseteq \tilde{X}$ er åben i <u>kvotienttopologien</u> hvis og kun hvis $Q^{-1}(A) \in \tau$. Da originalmængdedannelse er stabil under vilkårlig foreningsmængde- og fællesmængdedannelse er det klart, at der herved er defineret en topologi på kvotientrummet $\tilde{X}$. Denne topologi kan iøvrigt også beskrives som den fineste på $\tilde{X}$, der gør Q kontinuert. (Giv argumentet!). Topologien [illegible] $Q^{-1}(A) \in \tau$

I en finere topologi findes altså [illegible] $Q^{-1}(B) \notin \tau$, dvs Q ej kont (5.2.2.)

τ er [illegible] (af Q) [illegible]

5. ADSKILLELSESAKSIOMER.

Jo grovere en topologi er, jo lettere er det for net at konvergere. I den trivielle topologi konvergerer et vilkårligt net endda mod ethvert af rummets punkter. For at øge hensigtsmæssigheden af topologiske overvejelser indfører man derfor et eller flere adskillelsesaksiomer, der skal sikre et rigt mål af åbne mængder. Vigtigst blandt disse er nok Hausdorff betingelsen (også kaldet T_2, hvor bogstavet stammer fra tysk "Trennung", adskillelse; men da vi ikke skal komme nærmere ind på de andre aksiomer $T_1, T_3, T_{3\frac{1}{2}}, T_4$, vil vi bruge den lange betegnelse). Begrebet er fra 1914.

DEFINITION 5.1. Et topologisk rum (X,τ) er et <u>Hausdorff rum</u> hvis alle punktpar x, y, hvor $x \neq y$, besidder disjunkte omegne.

Bemærk at punkter er afsluttede i et Hausdorff rum.

<u>SÆTNING 5.2.</u> (X,τ) er et Hausdorff rum hvis og kun hvis ethvert net i X har højst ét grænsepunkt.

<u>Bevis</u>: Antag først at (X,τ) er et Hausdorff rum. Hvis $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ konvergerer mod x og hvis $y \neq x$, så findes disjunkte omegne N_x og N_y og der findes da $\alpha_0 \in A$ så $\alpha \geq \alpha_0 \Rightarrow x_\alpha \in N_x$. Altså vil $x_\alpha \notin N_y$ for $\alpha \geq \alpha_0$ dvs. x_α konvergerer ikke mod y.

Antag omvendt at der findes $x \neq y$ i X, så der for hvert $N_x \in \mathcal{U}(x)$ og hvert $N_y \in \mathcal{U}(y)$ findes $z_{N_x,N_y} \in N_x \cap N_y$. Mængden $\mathcal{U}(x) \times \mathcal{U}(y)$ med produktordningen er opad filtrerende, så $(z_{N_x,N_y})_{N_x,N_y \in \mathcal{U}(x)\times\mathcal{U}(y)}$ er et net. Det er klart, at dette net konvergerer mod x og mod y. Altså gælder, at hvis (X,τ) ikke er Hausdorff, så er grænsepunkter ikke entydigt bestemte.

<u>SÆTNING 5.3.</u> Hvis X har initialtopologien bestemt ved en familie F af afbildninger, der adskiller punkterne i X (dvs. hvis $x \neq y$,

så findes $f \in F$ for hvilken $f(x) \neq f(y)$), og hvis alle rummene (Y_f, τ_f) er Hausdorff, så er X et Hausdorff rum.

Bevis: Lad $x \neq y$ og vælg $f \in F$ så $f(x) \neq f(y)$. Vælg disjunkte omegne $N_{f(x)}$ og $N_{f(y)}$. Så er $f^{-1}(N_{f(x)})$ og $f^{-1}(N_{f(y)})$ disjunkte omegne af hhv. x og y.

I mange forbindelser er det væsentligt at vide, at et topologisk rum er definitionsmængde for mange kontinuerte reelle funktioner. Det viser sig, at dertil er Hausdorff-betingelsen ikke helt tilstrækkelig. Vi indfører derfor et stærkere adskillelsesaksiom.

DEFINITION 5.4. **Et Hausdorff rum (X,τ) er normalt**, hvis der for ethvert par af afsluttede disjunkte mængder E, F i X findes åbne disjunkte mængder B, C i X, så $E \subseteq B$, $F \subseteq C$.

En ækvivalent betingelse er, at der for enhver afsluttet mængde $F \subseteq X$ og enhver åben mængde G, der indeholder F, findes en åben mængde A for hvilken $F \subseteq A \subseteq A^- \subseteq G$. (Overvej!)

Så kan vi bevise Urysohns lemma:

SÆTNING 5.5. I et normalt topologisk rum (X,τ) findes der for ethvert par E, F af disjunkte afsluttede mængder en kontinuert funktion $f: X \to [0,1]$, som er 0 på E og 1 på F.

Bevis: Lad $A_1 := X \setminus F$ og vælg en åben mængde $A_{\frac12}$ så $E \subseteq A_{\frac12} \subseteq \overline{A_{\frac12}} \subseteq A_1$. Den afsluttede mængde E er indeholdt i den åbne mængde $A_{\frac12}$, så der findes en åben mængde $A_{\frac14}$ for hvilken $E \subseteq A_{\frac14} \subseteq \overline{A_{\frac14}} \subseteq A_{\frac12}$. Tilsvarende ses ved betragtning af $\overline{A_{\frac12}} \subseteq A_1$, at vi kan finde en åben mængde $A_{\frac34}$ for hvilken $\overline{A_{\frac12}} \subseteq A_{\frac34} \subseteq \overline{A_{\frac34}} \subseteq A_1$. Ved sådanne fortsatte "indskydninger" af åbne mængder og disses afslutning kan vi til enhver binær brøk $r = m \cdot 2^{-n}$, $1 \leq m \leq 2^n$, $n = 1,2,\ldots$ knytte en åben mængde A_r, der omfatter E og for hvilken $\overline{A_r} \subseteq A_s$, hvis $r < s$.

Nu definerer vi $f: X \to [0,1]$ ved først at sætte $f(x) := 1$ for alle $x \in F = X \setminus A_1$ og iøvrigt sætte

$$f(x) := \inf\{r \mid x \in A_r\} .$$

Tydeligvis er f lig 1 på F og lig 0 på $A_0 := E$. Lad $t \in \mathbb{R}_+$ og bemærk at $f(x) < t$ hvis og kun hvis der findes $r < t$ så $x \in A_r$. Altså gælder at

$$f^{-1}([0,t[) = \bigcup_{r<t} A_r ,$$

således at $f^{-1}([0,t[)$ er åben i X. Lad dernæst $s \in [0,1[$. Så gælder at $f(x) \leq s$ hvis og kun hvis der for ethvert $r > s$ findes en binær brøk $p < r$ for hvilken $x \in A_p$; heraf

$$f^{-1}([0,s]) = \bigcap_{r>s} \; \bigcup_{p<r} A_p .$$

Vi påstår at $\bigcap_{r>s} \bigcup_{p<r} A_p = \bigcap_{q>s} \overline{A_q}$. Da $\bigcup_{p<r} A_p \subseteq A_r \subseteq \overline{A_r}$, er $\subseteq$ klar. Hvis $x \in \overline{A_v}$ for alle $v > s$ og hvis $r > s$, så kan vi vælge binære brøker p, q så $s < q < p < r$, hvoraf $x \in \overline{A_q} \subseteq A_p$. Dermed er $\supseteq$ vist. Og dermed er vist at $f^{-1}([0,s])$ er afsluttet, altså at $f^{-1}(]s,1[) = f^{-1}([0,1[) \setminus f^{-1}([0,s])$ er åben. Heraf følger så at

$$f^{-1}(]s,t[) = f^{-1}(]s,1[) \cap f^{-1}([0,t[)$$

er åben. Bemærk dernæst at samme konklusion holder for $s < 0$. Men enhver åben mængde $G \subseteq [0,1]$ er en foreningsmængde af intervaller $]s,t[\cap [0,1]$, $s < t$, $s,t \in \mathbb{R}$, så af det viste følger, at $f^{-1}(G)$ er åben, hvis $G \subseteq [0,1]$ er åben. Altså er f kontinuert.

Bemærkning. (Jvf. opgave 3.7, s.I.3.13 i 2 MA-noterne 84/85.) Hvis (M,d) er et metrisk rum, så er rummet normalt. Her kan Urysohns lemma nemlig bevises direkte (og som korollar fås normalitet, idet

$$E \subseteq f^{-1}([0,\tfrac13[) \qquad \text{og} \qquad F \subseteq f^{-1}(]\tfrac23,1])) .$$

For $x \in M$ og $\emptyset \neq E \subseteq M$ sættes $d(x,E) := \inf\{d(x,y) \mid y \in E\}$. Det er ikke svært at se at $x \to d(x,E)$ (E fastholdt) er en kontinuert afbildning og at $\overline{E}$ netop er originalmængden til $\{0\}$.

Hvis E og F er afsluttede, disjunkte, ikke-tomme delmængder af M kan vi sætte

$$f(x) := d(x,E) \,/\, (d(x,E) + d(x,F))$$

og derved få en funktion som den i Urysohns lemma.

LEMMA 5.6. Lad der være givet et normalt topologisk rum (X,τ), en afsluttet delmængde F af X, to reelle tal a og b med $b \geq 0$ og en kontinuert reel funktion f på F med $|f-a| \leq b$. Der findes en kontinuert reel funktion h på X med $|h-a| \leq \frac{1}{3} b$ og $|f(x) - h(x)| \leq \frac{2}{3} b$ for $x \in F$.

Bevis: Sæt $F_o = \{x \in F | f(x) \leq a - \frac{1}{3} b\}$ og $F_1 = \{x \in F | f(x) \geq a + \frac{1}{3} b\}$. Da F_o og F_1 er disjunkte afsluttede delmængder af X, findes der en kontinuert funktion $H : X \to [0,1]$, sådan at $H(x) = 0$ for $x \in F_o$ og $H(x) = 1$ for $x \in F_1$ (Urysohns Lemma). Sæt $h(x) = a - \frac{1}{3} b + \frac{2}{3} b\, H(x)$, $x \in X$; for $x \in X$ er $|h(x) - a| \leq \frac{1}{3} b$, og for $x \in F$ er $f(x)$ og $h(x)$ i den samme trediedel af $[a-b, a+b]$, så $|f(x) - h(x)| \leq \frac{2}{3} b$.

SÆTNING 5.7. (Tietzes udvidelsessætning). Lad (X,τ) være et normalt topologisk rum, F en afsluttet delmængde af X og f en kontinuert begrænset reel funktion på F. Der findes en kontinuert begrænset reel funktion g på X med $g|F = f$. Bevis: Vælg a og b i $\mathbb{R}$, $b > 0$, sådan at $|f-a| \leq b$. Vi kan ved Lemma 5.6 rekursivt vælge kontinuerte reelle funktioner $h_1, g_1, h_2, g_2, \ldots$ på X sådan at $g_n = h_1 + h_2 + \ldots + h_n$ og $|f(x) - g_n(x)| \leq (\frac{2}{3})^n b$, $x \in F$, $n = 1,2,\ldots,$ og $|h_1 - a| \leq \frac{1}{3} b$ og $|h_n| \leq (\frac{2}{3})^n \frac{1}{2} b$ $(= \frac{1}{3} (\frac{2}{3})^{n-1} b)$, $n = 2,3,\ldots$. For $x \in X$ og $m,n \in \mathbb{N}$, $m < n$, er $|g_n(x) - g_m(x)| \leq \sum_{i=m+1}^{n} |h_i(x)| \leq \sum_{i=m+1}^{\infty} (\frac{2}{3})^i \frac{1}{2} b = (\frac{2}{3})^m b$, så $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergerer ligeligt mod en kontinuert begrænset reel funktion g på X med $|f(x) - g(x)| = \lim_{n\to\infty} |f(x) - g_n(x)| = 0$ for $x \in F$.

6. KOMPAKTHED.

Som bekendt er en delmængde K af et metrisk rum (M,d) kompakt, hvis enhver punktfølge i K har et fortætningspunkt i K. Det er fremgået allerede af indholdet af både Matematik 1 og Matematik 2, at kompakthedsbegrebet er centralt i matematikken, navnlig i forbindelse med eksistensudsagn.

Det kan derfor ikke undre, at begrebet også spiller en væsentlig rolle i den generelle topologi. Blot må man gøre sig klart, at udsagn, der er ækvivalente for metriske rum, muligvis ikke er det i bredere almindelighed. Det gælder således ovenstående definition sammenholdt med udsagnet om udtynding af en åben overdækning til endelig overdækning.

Vi vælger her at definere kompakthed ved overdækningsegenskaben og dernæst vise, at hvis "følger" erstattes af "net" gælder et udsagn svarende til det vi nævnte allerførst ovenfor.

DEFINITION 6.1. Et topologisk rum (X,τ) er kompakt hvis enhver åben overdækning kan udtyndes til en endelig overdækning. Altså: for enhver familie $\mathcal{O}$ af åbne mængder $(G_i)_{i\in I} \subset \tau$ for hvilken $\cup G_i = X$ findes endelig mange mængder $G_1,\ldots,G_n \in \mathcal{O}$ så

$$X = G_1 \cup \ldots \cup G_n .$$

En delmængde $Y \subseteq X$ er kompakt, hvis den er kompakt i den relative topologi.

Man ser let, at Y er kompakt hvis og kun hvis enhver overdækning af Y med åbne delmængder af X kan udtyndes til en endelig overdækning af Y.

Eksempler er velkendte fra metriske rum, specielt fra talrummene $\mathbb{R}^k$ og $\mathbb{C}^k$. Med de sædvanlige metrikker er en delmængde $K \subset \mathbb{R}^k$ eller $\mathbb{C}^k$ kompakt, hvis og kun hvis K er en afsluttet og begrænset delmængde af $\mathbb{R}^k$ eller $\mathbb{C}^k$.

Andre eksempler dukker op i løbet af dette kursus.

Bemærkning. Mange forfattere forlanger foruden ovenstående også, at det kompakte rum skal være Hausdorff. I disse noter holdes begreberne dog adskilt.

SÆTNING 6.1. Følgende betingelser på det topologiske rum (X,τ) er ækvivalente.

i) X er kompakt.

ii) Hvis et system Δ af afsluttede delmængder af X har den egenskab, at enhver fællesmængde af endelig mange mængder fra Δ er ikke-tom, så er fællesmængden af alle mængderne i Δ ikke-tom.

iii) Ethvert net i X har et fortætningspunkt.

iv) Ethvert net i X har et konvergent delnet.

v) Ethvert universelt net i X er konvergent.

Bevis: i) $\Rightarrow$ ii). Hvis ii) ikke gælder findes en familie Δ af afsluttede mængder for hvilke $F_1 \cap \ldots \cap F_n \neq \emptyset$ for alle valg af $n \in \mathbb{N}$ og $F_1,\ldots,F_n \in \Delta$, men $\cap_{F\in\Delta} F = \emptyset$. Mængderne $X \setminus F$, $F \in \Delta$, udgør så en åben overdækning af X. Da X er kompakt, findes $n \in \mathbb{N}$ og $F_1,\ldots,F_n \in \Delta$ så $X = (X\setminus F_1) \cup \ldots \cup (X \setminus F_n) = X \setminus (\cap_{j=1}^n F_j)$. Altså er $\cap_{j=1}^n F_j = \emptyset$ i strid med det om Δ forudsatte.

ii) $\Rightarrow$ iii). Lad $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ være et net og lad $F_\alpha := \overline{\{x_\beta \mid \beta \geq \alpha\}}$. Hvis $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ er givet, kan vi vælge en fælles majorant α, $\alpha \geq \alpha_1,\ldots,\alpha \geq \alpha_n$. Heraf ses at $F_\alpha \subseteq F_{\alpha_j}$, $j = 1,2,\ldots,n$, så $\cap_{j=1}^n F_{\alpha_j} \neq \emptyset$. Men så findes altså $x \in \cap_{\alpha\in A} F_\alpha$. Hvis $N \in \mathcal{O}(x)$ og $\alpha \in A$ så findes altså $\beta \geq \alpha$ så $x_\beta \in N$ (Sætning 1.5). Det betyder jo netop, at (x_α) forekommer hyppigt i N. Altså er x et fortætningspunkt for (x_α).

iii) $\Rightarrow$ iv) følger direkte af Sætning 2.8.

iv) $\Rightarrow$ i). Lad σ være en familie af åbne mængder i X, der overdækker X. Betragt systemet Λ af endelige delfamilier af σ, og giv Λ inklusionsordningen. Det er klart, at Λ er opad filtre-

rende. Antag at der ikke findes nogen endelig udtynding $\lambda \in \Lambda$, der overdækker X. Så kan vi, for hvert $\lambda \in \Lambda$, finde

$$x_\lambda \in X \setminus \bigcup_{G\in\lambda} G .$$

Herved er defineret et net $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, som ifølge forudsætningen har et konvergent delnet, med et grænsepunkt, som vi kan kalde x.

Vælg $G \in \sigma$, så $x \in G$. Så findes et element λ fra indexmængden Λ med egenskaben $\lambda \geq \{G\}$ (d.v.s. $G \in \lambda$) og $x_\lambda \in G$. Af definitionen af x_λ ses at $x_\lambda \in X \setminus G$; altså har vi en modstrid.

v) $\Rightarrow$ iv). Da ethvert net har et universelt delnet (Sætning 2.11) er dette klart.

iii) $\Rightarrow$ v). Hvis $(x_\alpha)_{\alpha\in D}$ er et universelt net, har $(x_\alpha)_{\alpha\in D}$ ifølge iii) et fortætningspunkt x. Men så vil (x_α) konvergere mod x.

LEMMA 6.2. Lad (X,τ) være et Hausdorff rum og $C \subseteq X$ en kompakt delmængde. Hvis $x \notin C$, så findes åbne og disjunkte mængder B_1 og B_2, så $x \in B_1$, $C \subseteq B_2$.

Bevis: For hvert $y \in C$ findes disjunkte åbne omegne $N_y \in \mathcal{O}(y)$ og $M_y \in \mathcal{O}(x)$. Familien $\{N_y \mid y \in C\}$ er en åben overdækning af C (og derfor er $\{N_y \cap C \mid y \in C\}$ en åben overdækning af C i den relative topologi). Der findes derfor endelig mange punkter $y_1,\ldots,y_n \in C$ og omegne $N_{y_1},\ldots,N_{y_n}$ af disse, så $C \subseteq N_{y_1} \cup \ldots \cup N_{y_n}$. Sæt

$$B_1 := \bigcap_{j=1}^{n} M_{y_j}$$

og

$$B_2 := \bigcup_{j=1}^{n} N_{y_j} .$$

Så er B_1 og B_2 åbne og disjunkte omegne af hhv. x og C.

SÆTNING 6.3. Enhver kompakt delmængde C af et Hausdorff rum X er afsluttet.

<u>Bevis</u>: Dette følger umiddelbart af Lemma 6.2. Et net-bevis kører således: Lad $x \in \bar{C}$ og vælg et net $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ fra C med x som grænsepunkt (Sætning 2.9). Da C er kompakt har (x_α) et konvergent delnet, med grænsepunkt $y \in C$. Delnettet konvergerer også mod x og da X er Hausdorff er $x = y$. Altså er $x \in C$.

<u>LEMMA 6.4</u>. En afsluttet delmængde F af et kompakt topologisk rum (X,τ) er kompakt.

<u>Bevis</u>: Øvelse: Giv to beviser, et baseret på definitionen og et baseret på net.

<u>SÆTNING 6.5</u>. Et kompakt Hausdorff rum er normalt.

<u>Bevis</u>: Lad E, F være disjunkte og afsluttede delmængder af det kompakte rum (X,τ). Så er E, F selv kompakte. For hvert $x \in F$ findes ifølge Lemma 6.2 åbne, disjunkte mængder $U(x)$ og $B(x)$ så $x \in U(x)$, $E \subseteq B(x)$. Familien $\{U(x)\}_{x \in F}$ er en åben overdækning af F, og kan derfor udtyndes til $U(x_1), \dots, U(x_n)$, så $F \subseteq G_1 := U(x_1) \cup \dots \cup U(x_n)$. Mængden

$$G_2 := B(x_1) \cap \dots \cap B(x_n)$$

er, ligesom G_1, åben. Og G_2 omfatter E. Da $G_1 \cap G_2 = \emptyset$ er hermed vist at X er normalt.

<u>SÆTNING 6.6</u>. Hvis (X,τ) er kompakt og $f: X \to Y$ er kontinuert, så er $f(X)$ en kompakt delmængde af Y.

<u>Bevis</u>: [Sml. 2 MA, s. I.6.4.] Lad $(y_\alpha)_{\alpha \in A}$ være et net i $f(X)$ og lad $x_\alpha \in f^{-1}(y_\alpha)$. Nettet $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ har et konvergent delnet $(z_\beta)_{\beta \in B}$ og da f er kontinuert, vil $(f(z_\beta))_{\beta \in B}$ være et konvergent delnet af (y_α) i $f(X)$.

Prøv at lave et "overdæknings-bevis" for ovenstående sætning.

<u>SÆTNING 6.7</u>. Lad $f: X \to Y$ være en kontinuert og injektiv afbildning af det kompakte rum X ind i et Hausdorff rum Y. Så er f en homeomorfi af X på $f(X)$, udstyret med den relative topologi.

<u>Bevis</u>: Lad $A \subseteq X$ være åben. Så er $X \setminus A$ afsluttet og derfor kompakt (Lemma 6.4). Af Sætning 6.6 følger, at $f(X \setminus A)$ er kompakt, og da Y er Hausdorff, er $f(X \setminus A)$ afsluttet (Sætning 6.3). Altså er $f(A)$ relativt åben i $f(X)$ [f er jo en injektion, så $f(A) = f(X) \setminus f(X \setminus A)$]. Altså har vi vist, at hvis A er åben i X, så er $(f^{-1})^{-1}(A) = f(A)$ åben i $f(X)$, dvs. vi har vist, at afbildningen $f^{-1}: f(X) \to X$ er kontinuert. Heraf følger, at f er en homeomorfi på $f(X)$.

Endelig skal vi vise den vigtige sætning, der kaldes Tychonoff's sætning [Tychonoff 1930].

<u>SÆTNING 6.8</u>. Lad $(X_j, \tau_j)_{j \in J}$ være en familie af kompakte rum. Så er produktrummet $X = \pi_{j \in J} X_j$, udstyret med produkttopologien, et kompakt rum.

<u>Bevis</u>: Lad $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ være et universelt net i X, og lad $(\pi_j(x_\alpha))_{\alpha \in A}$ være projektionen på den j'te koordinat. Det er klart, at $(\pi_j(x_\alpha))$ er universelt (jvf. opgave 2e)), og derfor er $(\pi_j(x_\alpha))$ konvergent; mod et punkt $x_j \in X_j$. Lad $x = (x_j)_{j \in J} \in X$. $\pi_j x_\alpha \to \pi_j x = x_j$, så af Sætning 4.2 slutter vi, at $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ konvergerer mod x. Altså er universalnettet konvergent, så X er kompakt.

Vi afslutter behandlingen af kompakthed med en beskrivelse af dette begreb i metriske rum.

Husk at et metrisk rum siges at være fuldstændigt, hvis enhver Cauchy følge er konvergent (Mat 2MA, I.5.1).

Vi minder om, at hvis en Cauchy følge har en konvergent delfølge, er den selv konvergent.

Bevis. Antag, at Cauchy følgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ i det metriske rum (X,d) har den konvergente delfølge $(x_{n_i})_{i \in \mathbb{N}}$ med grænseværdi x. Lad $\varepsilon > 0$ være givet ; vælg $N \in \mathbb{N}$, sådan at $d(x_m,x_n) < \frac{1}{2}\varepsilon$ for $m,n \geq N$, og vælg $i \in \mathbb{N}$, sådan at $n_i \geq N$ og $d(x_{n_i},x) < \frac{1}{2}\varepsilon$; for $n \geq n_i$ er $d(x_n,x) \leq d(x_n,x_{n_i}) + d(x_{n_i},x) < \varepsilon$.

DEFINITION 6.9. En delmængde B af et metrisk rum (X,d) er *fuldstændigt begrænset*, hvis der for ethvert $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ findes endeligt mange punkter $x_1,x_2,\ldots,x_n \in X$, så $B \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} \{x \in X \mid d(x,x_j) < \varepsilon\}$. En mængde $B \subseteq K$ er således fuldstændigt begrænset, når den for hvert $\varepsilon > 0$ kan dækkes med endeligt mange kugler med radius $\leq \varepsilon$.

SÆTNING 6.10. Lad (X,d) være et metrisk rum. Følgende betingelser er ækvivalente:

1. X er kompakt.
2. Enhver følge i X har en konvergent delfølge.
3. (X,d) er et fuldstændigt og et fuldstændigt begrænset rum.

Bevis: Antag, at X er kompakt, og lad $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ være en følge i X ; så har $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et fortætningspunkt x (Sætning 6.1). Vælg rekursivt en voksende følge $(n_i)_{i \in \mathbb{N}}$ af naturlige tal, sådan at $d(x_{n_i},x) < i^{-1}$; så er $(x_{n_i})_{i \in \mathbb{N}}$ en konvergent delfølge af $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
Antag nu, at enhver følge i X har en konvergent delfølge. Specielt har enhver Cauchy følge i X en konvengent delfølge og er derfor selv konvergent, så (X,d) er et fuldstændigt metrisk rum. Antag, at (X,d) ikke er et fuldstændigt begrænset rum, og vælg $\varepsilon > 0$, sådan at for en vilkårlig endelig familie $x_1,x_2,\ldots,x_n$ af punkter i X findes der et punkt $x \in X$ med afstand $d(x,x_j) \geq \varepsilon$ for $j=1,2,\ldots,n$. Vælg et punkt $x_1 \in X$; vælg rekursivt en følge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ i X, sådan at $d(x_n,x_m) \geq \varepsilon$ for $m < n$. Ingen delfølge af $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ er en Cauchy følge, i modstrid med antagelsen at $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ har en konvergent delfølge.

Antag nu, at (X,d) er et fuldstændigt og fuldstændigt begrænset rum, og at X ikke er kompakt. Lad $(O_a)_{a \in A}$ være en familie af åbne delmængder af X, sådan at $X = \bigcup_{a \in A} O_a$, men X ikke er dækket af nogen endelig delfamilie. Vælg endeligt mange delmængder $K_1^1,K_2^1,\ldots,K_{n_1}^1$ af X med diameter ≤ 1, der dækker X. Vælg $i_1 \in \{1,2,\ldots,n_1\}$, sådan at $L_1 = K_{i_1}^1$ ikke er dækket af nogen endelig delfamilie af $(O_a)_{a \in A}$, og vælg et punkt x_1 i L_1. Vælg rekursivt for $N = 2,3,\ldots$ endeligt mange delmængder $K_1^N,K_2^N,\ldots,K_{n_N}^N$ af X med diameter $\leq N^{-1}$, der dækker L_{N-1}, og $i_N \in \{1,2,\ldots,n_N\}$, sådan at $L_N = L_{N-1} \cap K_{i_N}^N$ ikke er dækket af nogen endelig delfamilie af $(O_a)_{a \in A}$, og et punkt x_n i L_N. Idet $L_1 \supseteq L_2 \supseteq \ldots$ og L_N har diameter $\leq N^{-1}$, er $(x_N)_{N \in \mathbb{N}}$ en Cauchy følge og konvergerer derfor mod et punkt $x \in X$. Vælg $b \in A$, sådan at $x \in O_b$; da O_b er en omegn af x, kan vi vælge $N \in \mathbb{N}$, sådan at kuglen $\{y \in X \mid d(y,x) < N^{-1}\}$ er indeholdt i O_b. Vælg $n \geq 2N$, sådan at $d(x_n,x) < (2N)^{-1}$. For $y \in L_n$ er $d(y,x) \leq d(y,x_n) + d(x_n,x) < n^{-1} + (2N)^{-1} \leq N^{-1}$, så $L_n \subseteq O_b$, i modstrid med at L_n ikke er dækket af nogen endelig delfamilie af $(O_a)_{a \in A}$.

7. LOKALKOMPAKTE RUM.

DEFINITION 7.1. Et topologisk rum (X,τ) er **lokalkompakt** hvis (X,τ) er et Hausdorff rum og hvert punkt $x \in X$ besidder en kompakt omegn.

Som eksempler på lokalkompakte rum kan vi straks nævne kompakte Hausdorff rum samt de euklidiske rum.

DEFINITION 7.2. En **kompaktificering** af et topologisk rum X er et par $(\hat{X},\varphi)$, hvor $\hat{X}$ er et kompakt rum og φ er en homeomorfi af X på en tæt delmængde af $\hat{X}$.

SÆTNING 7.3. Et lokalkompakt rum har en kompaktificering, som er et Hausdorff rum.

Bevis: Antag (X,τ) er lokalkompakt, men ikke kompakt. Lad ∞ betegne et punkt, der ikke ligger i X. Lad $X_\infty := X \cup \{\infty\}$. Vi topologiserer X_∞: $G \subseteq X_\infty$ er åben hvis enten

$$\infty \notin G \quad \text{og} \quad G \text{ er åben i } X$$

eller

$$\infty \in G \quad \text{og} \quad \text{enten er } G = X_\infty \text{ eller } X_\infty \setminus G \text{ er kompakt.}$$

Det er en rutinesag at se efter, at der hermed er defineret en topologi på X. Det fremgår også direkte af definitionen, at dennes relative topologi på X er den samme som den oprindelige.

Da X er Hausdorff kan punkter i X adskilles ved disjunkte omegne. Og hvis $x \in X$ findes en kompakt omegn K af x. Men så er K og $X_\infty \setminus K$ disjunkte omegne af x og ∞. Altså er X_∞ Hausdorff.

Lad $\{G_i\}_{i \in I}$ være en åben overdækning af X_∞ og lad $\infty \in G_{i_0}$. Da G_{i_0} er åben, er $X_\infty \setminus G_{i_0}$ en kompakt delmængde af X.

Mængderne G_i, $i \neq i_0$ er en åben overdækning af $X_\infty \setminus G_{i_0}$, som derfor kan udtyndes til en endelig overdækning af $X_\infty \setminus G_{i_0}$. Men så har $\{G_i\}$ et endeligt delsystem, der dækker X_∞ (hvilket?). Altså er X_∞ kompakt.

Da X ikke er kompakt, må X være en tæt delmængde af X_∞.

X_∞ kaldes ét-punktskompaktificeringen af X.

SÆTNING 7.4. Lad X være lokalkompakt og $K \subseteq X$ være kompakt. Lad $F \subseteq X$ være afsluttet og disjunkt fra K. Så findes en kontinuert funktion $f: X \to [0,1]$ med $f(K) = \{1\}$, $f(F) = \{0\}$ og kompakt støtte, dvs.

$$\operatorname{supp} f := \overline{\{x \in X \mid f(x) \neq 0\}}$$

er kompakt.

Bevis: K og $F \cup \{\infty\}$ er disjunkte og afsluttede delmængder af X_∞. Da X_∞ er normalt (Sætning 6.5), kan vi vælge en åben mængde U så $F \cup \{\infty\} \subseteq U$ og $K \cap \overline{U} = \emptyset$. Brug nu Urysohn's lemma til at få en kontinuert funktion $f: X_\infty \to [0,1]$ med $f(\overline{U}) = \{0\}$ og $f(K) = \{1\}$.

Mængden $X_\infty \setminus U$ er en kompakt delmængde af X og indeholder støtten for f. Heraf følger sætningen. Da supp f [illegible] sluttet delmængde af [illegible] kompakt mængde [illegible]

8. BAIRE'S SÆTNING.

SÆTNING 8.1. Lad (X,d) være et fuldstændigt metrisk rum og lad $A_1, A_2, \ldots$ være en følge af tætte åbne delmængder af X. Så er $\cap_{j=1}^{\infty} A_j$ tæt i X.

Bevis: Lad B_0 være en åben kugle i X med radius $r > 0$. Vi vil vise at $\bar{B}_0 \cap (\cap A_j) \neq \emptyset$.

Da A_1 er tæt i X er $A_1 \cap B_0$ åben og ikke-tom; altså indeholder $A_1 \cap B_0$ en afsluttet kugle $\bar{B}_1$ med radius $< r/2$. Mængden A_2 er tæt i X, så $A_2 \cap B_1$ er åben og ikke-tom. Vi kan derfor finde en afsluttet kugle $\bar{B}_2 \subseteq A_2 \cap B_1$ med radius $< r/4$. Således fortsættes; i det n'te skridt finder vi en afsluttet kugle $\bar{B}_n \subseteq A_n \cap B_{n-1}$ med radius $< r/2^n$. Kuglerne $\bar{B}_n$ har ikke-tom fællesmængde: vælger vi $x_n \in \bar{B}_n$ og bemærker, at for $m > n$ gælder, at $d(x_n, x_m) \leq r/2^n$, ser vi at (x_n) er en Cauchy følge. Der findes derfor $x \in X$, så $x_n \to x$. Men $x \in \bar{B}_n$ for alle n. Da det netop fundne x også tilhører A_n for alle n, ser vi, at $x \in \bar{B}_0 \cap (\cap A_n)$.

KOROLLAR 8.2. Hvis (X,d) er et fuldstændigt metrisk rum og $X = \cup_{n=1}^{\infty} F_n$, hvor hvert F_n er afsluttet, så findes $n_0 \in \mathbb{N}$ for hvilket F_{n_0} har indre punkter.

Bevis: Hvis $F_n^0 = \emptyset$ for alle n, så er $A_n := X \setminus F_n$ åben og tæt for alle n. Altså er $\cap A_n = \cap (X \setminus F_n) = X \setminus \cup F_n$ tæt, en modstrid.

DEFINITION 8.3. Et topologisk rum X kaldes et **Baire rum**, hvis det for en vilkårlig følge $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$ af åbne tætte delmængder af X gælder, at $\cap_{n=1}^{\infty} G_n$ er tæt i X.

Ethvert fuldstændigt metrisk rum er altså et Baire rum. Man kan vise, at ethvert lokalkompakt rum er et Baire rum (jf. opgave 8c)).

OPGAVER TIL AFSNIT 1.

a) (Hausdorffs definition af topologisk rum.)
9.9 Antag at der til ethvert punkt x i en mængde X er givet et ikke-tomt system $\mathcal{O}(x)$ af delmængder af X som opfylder

i) $x \in A$ for ethvert A i $\mathcal{O}(x)$.

ii) Hvis $A \subseteq B$ og $A \in \mathcal{O}(x)$ så er $B \in \mathcal{O}(x)$.

iii) Hvis $A, B \in \mathcal{O}(x)$ så vil $A \cap B \in \mathcal{O}(x)$.

Vis at der findes præcis én topologi τ på X, således at $A \in \tau$ hvis og kun hvis $A \in \mathcal{O}(x)$ for alle $x \in A$. Vis at $\mathcal{O}(x)$ er omegnssystemet for x i topologien τ, hvis der også gælder

iv) Hvis $A \in \mathcal{O}(x)$ så findes $B \subseteq A$ så $B \in \mathcal{O}(y)$ for alle $y \in B$ og $x \in B$.

16.9 b) Lad $\mathcal{D}(X)$ være familien af delmængder af en mængde X og definer en afbildning $Y \sim cl(Y) : \mathcal{D}(X) \sim \mathcal{D}(X)$ som opfylder Kuratowski's axiomer

i) $cl(\emptyset) = \emptyset$.

ii) $Y \subseteq cl(Y)$ for ethvert $Y \in \mathcal{D}(X)$.

iii) $cl(cl(Y)) = cl(Y)$ for ethvert $Y \in \mathcal{D}(X)$.

iv) $cl(Y) \cup cl(Z) = cl(Y \cup Z)$ for alle $Y, Z \in \mathcal{D}(X)$.

Vis at $\{F \in \mathcal{D}(X) \mid F = cl(F)\}$ udgør de afsluttede mængder i en topologi på X med $\bar{Y} = cl(Y)$ for hvert $Y \in \mathcal{D}(X)$.

c) Lad Y være tæt i (X,τ). Vis at $(Y \cap A)^- = A^-$ for enhver mængde $A \in \tau$.

99 d) Vis at mængderne $]t, \infty[$, $t \in \mathbb{R}$ samt $\emptyset$ og $\mathbb{R}$ udgør en topologi på $\mathbb{R}$. Angiv $\{s\}^-$ for et punkt $s \in \mathbb{R}$.

e) Lad (X,τ) være et topologisk rum og $A \neq \emptyset$ en delmængde af X. Lad τ_A betegne den relative topologi på A. Gælder det for $B \subseteq A$ at det indre af B i (A, τ_A) er lig $B^0 \cap A$?

f) Gælder at hvis $A \subseteq X$, hvor (X,τ) er et topologisk rum, så er

$$((A^0)^-)^0 = A^0 \ ?$$

g) Lad $(X,\leq)$ være en fuldstændigt ordnet mængde. Lad ρ bestå af $\emptyset$, X og alle mængder af formen

$$\{x \in X \mid x < y\},$$

hvor $y \in X$. Vis at ρ er en basis for en topologi på X.

h) Angiv samtlige topologier på $\{1,2\}$ og $\{1,2,3\}$.

i) Giv et forslag til en naturlig topologi på $\mathbb{R}^* := [-\infty,\infty]$.

j) Lad (X_i,τ_i) være topologiske rum for $i = 1,2$ og antag $X_1 \cap X_2 = \emptyset$. Giv et forslag til en naturlig topologi på $X_1 \cup X_2$.

k) Lad τ bestå af $\emptyset$, $\mathbb{R}$ samt alle intervaller i $\mathbb{R}$ af formen $]-\infty,k[$, hvor $k \in \mathbb{R}$. Er τ en topologi på $\mathbb{R}$? (Jvf. opgave 1d)).

l) Lav en oversigt der giver alle almengyldige inklusioner mellem $A \cap B$, $(A \cap B)^0$, $(A \cap B)^-$, $A^0 \cap B^0$, $A^0 \cap B$, $A^0 \cap B^-$, $A \cap B^-$, $A^- \cap B^-$.

Giv modeksempler til de øvrige.

9.9 m) Vis at afslutningen $\overline{Y}$ af en mængde Y er afsluttet.

9.9 n) Hvis Y er en mængde i et topologisk rum (X,τ) definerer vi randen af Y som

$$\partial Y := Y^- \setminus Y^0.$$

Vis at randen kan være tom. Vis at

$$\partial(Y^-) \subseteq \partial Y \quad \text{og at} \quad \partial(Y^0) \subseteq \partial Y$$

for enhver mængde $Y \subseteq X$. Vis at de tre mængder kan være forskellige.

o) Vis at en delmængde A af et topologisk rum (X,τ) har ikke-tom fællesmængde med enhver tæt delmængde af X hvis og kun hvis $A^0 \neq \emptyset$.

p) Hvis A, B er delmængder af et topologisk rum, så er $A^0 \cup B^0 \subseteq (A \cup B)^0$. Kan inklusionen være ægte?

q) Vis at en mængde er åben hvis og kun hvis den er en omegn af
9.9 hvert af sine punkter.
Vis også at det indre af en mængde indeholder enhver åben delmængde af mængden.

9.9 r) Hvis $Y \subseteq (X,\tau)$ så er

$$X \setminus \overline{Y} = (X \setminus Y)^0.$$

s) Giv et eksempel på et topologisk rum, der ikke er separabelt.

t) Lad (M,d) være et pseudo-metrisk rum (jvf. MA-noterne 84/85, s. I.1.2). Gør rede for at pseudo-metrikken d definerer en topologi på M.

OPGAVER TIL AFSNIT 2.

19 a) Antag at følgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ er et universelt net i X. Vis at der findes et $m \in \mathbb{N}$ så $x_n = x_m$ for alle $n \geq m$.

b) Lad τ_1 og τ_2 være to topologier på en mængde X. Antag $\tau_1 \subsetneq \tau_2$. Vis at der findes et net $(x_\alpha)_{\alpha\in D}$ i X og et punkt $x \in X$, så $(x_\alpha)_{\alpha\in D}$ konvergerer mod x i τ_1, men ikke i τ_2.

c) Vis at hvis $x \in (X,\tau)$ så er $\mathcal{O}(x)$ udstyret med omvendt inklusion opad filtrerende.

d) Vis at Sætning 2.9 gælder hvis ordene "konvergerer mod x" erstattes med "har x som fortætningspunkt".

9.9 e) Vis at ved en vilkårlig afbildning $f: X \to Y$ afbildes et universalnet $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ i X i et universalnet $(f(x_\alpha))_{\alpha\in A}$ i Y.

f) Vis at mængden af kontinuerte funktioner af $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der er punktvis mindre eller lig en given (ikke nødvendigvis kontinuert) funktion udstyret med den punktvise ordning er opad filtrerende.

g) Lad (M,d) være et pseudo-metrisk rum (jvf. opgave 1t)). Lad $(x_\alpha)_{\alpha\in D}$ være et net i M og lad $x \in M$. Vis at $x_\alpha \to x$ hvis og kun hvis $d(x_\alpha,x) \to 0$.

16.9 h) Lad vektorrummet X være topologiseret af familien P af seminormer (Eksempel 1.11). Gør rede for at et net $(x_\alpha)_{\alpha\in D}$ konvergerer mod x hvis og kun hvis

$$p(x-x_\alpha) \to 0 \quad \text{for alle } p \in P.$$

OPGAVER TIL AFSNIT 3.

16.9 a) Angiv en kontinuert funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ som ikke er åben.

b) Lad $f: \mathbb{R} \to [0,\infty[$ være givet ved $f(x) = x$ for $x \geq 0$ og $= |x| + 1$ for $x < 0$. Vis at f er åben, men ikke kontinuert.

16.9 c) Lad $X := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y = 0 \text{ eller } xy = 1\}$ og giv X den relative topologi. Lad $f: X \to \mathbb{R}$ være projektion på x-aksen, altså $f(x,y) = x$. Er f kontinuert? Åben? Afbilder f afsluttede mængder på afsluttede mængder?

23.9 d) Lad (X_1,τ_1), (X_2,τ_2) være topologiske rum og lad $f: X_1 \to X_2$ være en funktion. Antag A, B er åbne, ikke-tomme delmængder af (X_1,τ_1) og at $X_1 = A \cup B$. Vis at hvis restriktionerne $f|_A$ og $f|_B$ er kontinuerte, når A og B er udstyret med de relative topologier, så er f kontinuert.

e) Lad (X_1,τ_1) og (X_2,τ_2) være topologiske rum og $f: X_1 \to X_2$ kontinuert og surjektiv. Vis at hvis (X_1,τ_1) er separabelt, så er (X_2,τ_2) separabelt.

16.9 f) Lad (X_1,τ_1), (X_2,τ_2) være topologiske rum og $f: X_1 \to X_2$ en funktion. Vis at følgende udsagn er ækvivalente.

a) f er kontinuert.

b) Der findes en subbasis ν for τ_2 for hvilken $f^{-1}(\nu) \subseteq \tau_1$.

c) For enhver afsluttet mængde $F \subseteq (X_2,\tau_2)$ er $f^{-1}(F)$ afsluttet i (X_1,τ_1).

d) $f(A_1^-) \subseteq f(A_1)^-$ for alle $A_1 \subseteq X_1$.

e) $f^{-1}(A_2)^- \subseteq f^{-1}(A_2^-)$ for alle $A_2 \subseteq X_2$.

g) Bevis Sætning 3.4.

h) Er en sammensætning af to åbne afbildninger en åben afbildning?

i) Lad X være et vektorrum, topologiseret af familien P af seminormer (opgave 2h)). Lad ρ være en vilkårlig seminorm på X. Vis at følgende udsagn er ækvivalente:

a) ρ er kontinuert.

b) $\{x \in X \mid \rho(x) < 1\}$ er åben.

c) $0 \in \{x \in X \mid \rho(x) < 1\}^0$.

d) $0 \in \{x \in X \mid \rho(x) \leq 1\}^0$.

e) ρ er kontinuert i 0.

f) Der findes en kontinuert seminorm q på X for hvilken $\rho(x) \leq q(x)$ for alle $x \in X$.

OPGAVER TIL AFSNIT 4.

a) Lad (X,τ), (Y,σ) være topologiske rum og giv $X \times Y$ produkttopologien. Vis at hvis $A \subseteq X$ og $B \subseteq Y$, så gælder

$$(A \times B)^- = A^- \times B^- \quad \text{og} \quad (A \times B)^0 = A^0 \times B^0 .$$

b) For et topologisk rum (X,τ) definerer vi $C(X)$ som mængden af kontinuerte funktioner fra X ind i $\mathbb{R}$. Vis at hvis $f,g \in C(X)$ og $\alpha \in \mathbb{R}$ så gælder at αf, $|f|$, $1/f$ (hvis $0 \notin f(X)$), $f+g$, fg, $f \vee g$, $f \wedge g$ alle tilhører $C(X)$.

c) Lad $(X_i,\tau_i)_{i\in I}$ være en familie af topologiske rum. Lad σ være systemet af delmængder af produktrummet πX_i af formen $\pi \mathcal{O}_i$, hvor $\mathcal{O}_i \in \tau_i$ for alle $i \in I$. Vis at σ er basis for en topologi som er finere end produkttopologien.

d) Gør rede for at den sædvanlige topologi på $\mathbb{R}^n$ er produkttopologien.

16.9 e) Lad X være en mængde og giv X initialtopologien mht. funktionerne $f_i: X \to \mathbb{R}$, $i \in I$ ($\mathbb{R}$ har den sædvanlige topologi). Lad x og y være punkter i X for hvilke $f_i(x) = f_i(y)$ for alle $i \in I$. Lad $f: X \to \mathbb{R}$ være kontinuert. Vis at $f(x) = f(y)$.

30.9 f) Beskriv topologien i Eksempel 1.10 som en initialtopologi.

g) Vis at en afbildning $g: Z \to X$ fra et topologisk rum Z ind i X, udstyret med initialtopologien givet ved familien F, er kontinuert hvis og kun hvis $f \circ g: Z \to Y_f$, $f \in F$, er kontinuert.

h) Lad $(X,\|\cdot\|)$ være et normeret vektorrum over $\mathbb{C}$ og lad $Y \subseteq X$ være et afsluttet underrum. Definer $\sim$ ved at $x_1 \sim x_2$ hvis og kun hvis $x_1 - x_2 \in Y$. Relationen $\sim$ er en ækvivalensrelation.
Definer for $x_1, x_2 \in X$ og $\alpha \in \mathbb{C}$

$$\|\tilde{x}_1\| := \inf\{\|x+y\| \mid y \in Y\}$$

$$\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 := (x_1+x_2)^\sim$$

$$\alpha(x_1)^\sim := (\alpha x_1)^\sim .$$

Vis at $\tilde{X}$ herved bliver et normeret vektorrum og at den af normen inducerede topologi er kvotienttopologien.

30.9. i) Lad X og P være som i opgave 3i). Vis at vektoraddition $(x,y) \to x+y : X \times X \to X$ og skalarmultiplikation $(\alpha,x) \to \alpha x : \mathbb{F} \times X \to X$ (hvor $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$) er kontinuerte afbildninger.

OPGAVER TIL AFSNIT 5.

a) Formuler og bevis en omvendt sætning til Urysohns lemma.

16.9 b) Lad X være et Hausdorff rum og Y et topologisk rum. Lad $f,g: Y \to X$ være kontinuerte afbildninger. Hvis f og g stemmer overens på en tæt delmængde af Y da er f og g identiske.

c) Vis at enhver kompakt Hausdorff topologi på en mængde M er minimal i mængden af alle Hausdorff topologier på M, ordnet ved inklusion.

7/10 d) Lad (X,τ) være et topologisk rum og giv X^2 produkttopologien. Vis at X er Hausdorff hvis og kun hvis diagonalen $\{(x,y) \in X^2 \mid x = y\}$ er afsluttet.

23.9. e) Lad $f: X \to Y$ være en kontinuert afbildning mellem topologiske rum og betragt grafen for f

$$\{(x,f(x)) \mid x \in X\} \subseteq X \times Y .$$

Vis at hvis Y er Hausdorff så er grafen en afsluttet delmængde af $X \times Y$ i produkttopologien.

f) Lad (X_i,τ_i) være en familie af Hausdorff rum. Vis at produktrummet med produkttopologien er et Hausdorff rum.

6.9 g) Lad (X,τ) være et Hausdorff rum og $f: X \to X$ være en kontinuert afbildning. Antag $f^2 = f$. Vis at $f(X)$ er afsluttet.

h) Vis at nettet (x_α) i begyndelsen af beviset for Sætning 5.2 end ikke har y som fortætningspunkt.

i) Det fremgår af noterne, at endelige mængder i et Hausdorff rum er afsluttede. Lad (X,τ) være et topologisk rum, hvori enhver endelig mængde er afsluttet. Er (X,τ) Hausdorff?

j) Betragt et pseudometrisk rum (M,d) (jvf. opgave 1t) og 2g)). Vis at (M,d) er et Hausdorff rum hvis og kun hvis d er en metrik.

k) Lad vektorrummet X være topologiseret af familien P af seminormer (Eksempel 1.11, opgave 2k), 3i) og 4i)). Vis at med denne topologi er X et Hausdorff rum hvis og kun hvis

$$\cap_{\rho\in P} \{x \in X \mid \rho(x) = 0\} = \{0\}$$

23.9.

l) En delmængde Y af et topologisk rum X siges at være af type G_δ, eller en G_δ mængde, hvis Y er fællesmængde af en følge af åbne mængder i X.
Vis, at en delmængde Y af et normalt rum X er en afsluttet mængde af type G_δ, hvis og kun hvis der findes en kontinuert funktion $f: X \to [0,1]$, sådan at $Y = \{x \in X \mid f(x) = 0\}$. (Vink: Brug en kombination $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} h_n$ af funktioner givet ved Urysohns lemma).

30.9

m) Lad X være et normalt rum og Y en afsluttet delmængde af type G_δ (jf. opgave 5 . Lad f være en kontinuert reel funktion på Y. Vis, at der findes en kontinuert reel funktion g på X med $g|Y = f$.

OPGAVER TIL AFSNIT 6.

23.9.

a) Lad $f: X \to Y$ være en afbildning mellem kompakte Hausdorff rum. Vis at hvis grafen for f er afsluttet i $X \times Y$, så er f kontinuert (sammenlign med opgave 5e)).

23.9.

b) Lad $f: X \to \mathbb{R}$ være kontinuert på det kompakte rum X. Vis at f er begrænset. Vis at f antager såvel sit supremum som sit infimum på X.

23.9

c) (Dinis lemma) Lad $(f_\lambda)_{\lambda\in D}$ være et net af kontinuerte reelle funktioner på et kompakt rum X. Antag at (f_λ) konvergerer punktvis mod en kontinuert funktion f og at konvergensen er monotont voksende. Vis at (f_λ) konvergerer uniformt mod f.

d) Lad X være en uendelig mængde og lad τ bestå af $\emptyset$ samt alle delmængder af X med endeligt komplement. Vis at τ er en topologi på X. Vis at (X,τ) er kompakt, men ikke Hausdorff. Vis at $\{x\}$ er afsluttet for ethvert punkt $x \in X$. Vis at enhver uendelig delmængde af X er tæt i X, så X er altså separabelt.

23.9.

e) Lad Y være en tæt delmængde af et Hausdorff rum X. Antag $A \subseteq B \subseteq X$, hvor A er åben og $B \cap Y$ er kompakt. Vis at $A \subseteq Y$. (Vink: Hvis $x \in A \setminus Y$ findes en åben omegn A_0 af x der er disjunkt fra $B \cap Y$. Benyt så opgave 1c) på $A \cap A_0 \cap Y$.)

30.9.

f) Lad (X,τ) være et topologisk rum og lad $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ være en konvergent følge. Betegn grænsepunktet med x_0. Vis at $\{x_n \mid n = 0,1,2,\dots\}$ er kompakt.

30.9.

g) Lad f være en kontinuert afbildning af et kompakt Hausdorff rum ind i sig selv. Vis at der findes en ikke-tom kompakt delmængde A for hvilken $f(A) = A$. (Vink: Brug Zorn's lemma.)

h) Udstyr $\mathbb{R}$ med topologien defineret i opgave 1d). Lad $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ og lad $b := \inf A$. Vis at A er kompakt hvis og kun hvis $b \in A$.

i) Lad (X_1,τ_1) og (X_2,τ_2) være Hausdorff rum og $A_1 \subseteq X_1$ være kompakt. Lad $x_2 \in X_2$. Vis at $A \times \{x_2\}$ er kompakt i $X_1 \times X_2$, udstyret med produkttopologien.

j) Lad $(X,\leq)$ være en fuldstændigt ordnet mængde og topologien på X som i opgave 1g). Vis at enhver ikke-tom kompakt delmængde A af X har et sidste element a^* (dvs. $a \leq a^*$ for alle $a \in A$).

k) Vis at hvis K er en norm-kompakt delmængde af det normerede vektorrum $(X,\|\cdot\|)$ så er K et fuldstændigt metrisk rum (med metrikken svarende til $\|\cdot\|$) og K er fuldstændig begrænset.

l) Vis at et kompakt metrisk rum er separabelt.

30.9.

OPGAVER TIL AFSNIT 7.

30.9 a) Et endeligt produkt af lokalkompakte rum er lokalkompakt.

30.9. b) Lad X være et Hausdorff rum og $A \subseteq X$ en tæt delmængde, der er lokalkompakt i den relative topologi. Vis at A er åben. (Vink: opgave 6e).)

c) En åben delmængde af et lokalkompakt rum er lokalkompakt i den relative topologi. Det samme gælder for en afsluttet delmængde.

OPGAVER TIL AFSNIT 8.

a) Lad X være et topologisk rum. En delmængde A af X siges at være intetsteds tæt, hvis afslutningen ikke har indre punkter, $(\bar{A})^{\circ} = \emptyset$; A siges at være af 1. kategori i X (eller mager), hvis den er foreningsmænde af en følge af intetsteds tætte delmængder; A siges at være af 2. kategori i X, hvis den ikke er af 1. kategori.

0.9

Vis, at en delmængde A af X er intetsteds tæt, hvis og kun hvis komplementærmængden indeholder en tæt åben mængde.

Vis, at X er et Baire rum, hvis og kun hvis enhver ikke-tom åben delmængde af X er af 2. kategori i X.

b) Lad X være et Baire rum og Y en tæt G_δ mængde i X (jf. opgaver 5(1)).

7/

Vis, at Y (med relativ topologi) er et Baire rum.

Vis, at $\mathbb{Q}$ ikke er en G_δ mængde i $\mathbb{R}$.

c) Vis, at ethvert lokalkompakt rum er et Baire rum. (Vink: Udnyt, at fællesmængden af en dalende følge af ikke-tomme kompakte mængder er ikke-tom).

7/