Mat 323
1977

INDHOLD

§ 1	Absolut kontinuitet	1 - 8
§ 2	Formlen for spektralradius	9 - 14
§ 3	Foldning	15 - 25
§ 4	Spektret for $L^1(\mathbb{R}^n)$	26 - 32
§ 5	Topologier på $B(H)$	33 - 39
§ 6	Definition af projektionsmål	40 - 45
§ 7	Spektret for en normal begrænset operator	46 - 53
§ 8	Integration af en ubegrænset funktion m.h.t. et projektionsmål	54 - 60
§ 9	Polar opløsning	61 - 66
§ 10	Stone's sætning	67 - 73
KOMMENTARER		74
LITTERATUR		74

Desuden øvelser 1-94, s. 1 - 37 og

Appendix 1: H. Mc Faden: Gaussian Quadrature Formulas 1 - 4

Appendix 2: H. Mc Faden: Næsten periodiske funktioner 1 - 4

Supplerende noter til Mat 323

Esben Kehlet

§ 1. Absolut kontinuitet.

Lad der være givet et kompakt interval $I = [a,b] \subseteq \mathbb{R}$, $-\infty < a < b < \infty$. En funktion $F: I \to \mathbb{C}$ kaldes absolut kontinuert, hvis der findes en Lebesgue-integrabel funktion $f: I \to \mathbb{C}$, $f \in \mathcal{L}^1(I)$, med den egenskab, at

$$\forall t \in I: F(t) = F(a) + \int_a^t f(s)ds.$$

Mængden af absolut kontinuerte funktioner på I betegnes $AC(I)$.

Hvis F er differentiabel på I med kontinuert differentialkvotient F', er som bekendt $F(t) = F(a) + \int_a^t F'(s)ds$ for alle $t \in I$. Så $C^1(I) \subseteq AC(I)$.

<u>Lemma</u>: Lad $f \in \mathcal{L}^1(I)$ være givet. Til ethvert $\varepsilon > 0$ findes et $\delta > 0$, så at $\int_E |f(t)|dt < \varepsilon$ for enhver Borelmængde $E \subseteq I$ med $m(E) < \delta$.

<u>Bevis</u>: Vælg en funktion $g \in \mathcal{L}^1(I)$, for hvilken $\int_a^b |f(t) - g(t)|dt < \frac{\varepsilon}{2}$ og $\sup|g(t)| = c < \infty$. For enhver Borelmængde $E \subseteq I$ med $c\, m(E) < \frac{\varepsilon}{2}$ er

$$\int_E |f(t)|dt \leq \int_E |f(t) - g(t)|dt + \int_E |g(t)|dt \leq$$

$$\int_I |f(t)-g(t)|dt + cm(E) < \varepsilon.$$

<u>Korollar</u>: Lad $F \in AC(I)$ være givet. Til ethvert $\varepsilon > 0$ findes et $\delta > 0$, således at det for enhver endelig familie af parvis disjunkte åbne delintervaller $]e_i,d_i[$, $i = 1,2,\cdots,r$ af I med samlet længde $\sum_{i=1}^{r} (d_i-e_i) < \delta$ gælder, at $\sum_{i=1}^{r} |F(d_i)-F(e_i)| < \varepsilon$.

<u>Bevis</u>: Antag $F(t) = F(a) + \int_a^t f(s)ds$ med $f \in \mathcal{L}^1(I)$, og anvend lemmaet. For passende lille $\delta > 0$ fås

$$\sum_{i=1}^{r} |F(d_i) - F(c_i)| = \sum_{i=1}^{r} \left|\int_{c_i}^{d_i} f(s)ds\right| \leq \sum_{i=1}^{r} \int_{c_i}^{d_i} |f(s)|ds$$

$$= \int_E |f(s)|ds < \varepsilon,$$ når E er foreningsmængde af parvis disjunkte åbne delintervaller $]e_i,d_i[$, $i = 1,2,\cdots,r$ af I med samlet længde $< \delta$.

Man kan vise, at en funktion $F: I \to \mathbb{C}$ har den i korollaret beskrevne egenskab, hvis og kun hvis den er absolut kontinuert.

Det følger let af lemmaet, at $AC(I) \subseteq C(I)$.

<u>Lemma</u>: Lad $g \in \mathcal{L}^1(I)$ være givet. Antag, at $\int_a^t g(s)ds = 0$ for ethvert $t \in I$. $g(t) = 0$ for næsten alle $t \in I$.

<u>Bevis</u>: For ethvert delinterval $[c,d]$ af I er $\int_c^d g(s)ds = \int_a^d g(s)ds - \int_a^c g(s)ds = 0$. Heraf fås, at $\int_a^b \varphi(s)g(s)ds = 0$ for enhver trappefunktion φ på I, dernæst, ved ligelig approksimation, for enhver kontinuert funktion φ, dernæst, ved majoriseret følge konvergens, for karakteristiske funktioner for kompakte delmængder af I.

Antag gerne, at g er reel. Hvis $n \in \mathbb{N}$, og K er en kompakt del af $\{t \in I | g(t) > n^{-1}\}$, gælder $0 = \int_K g(t)dt \geq n^{-1}m(K) \geq 0$, så $m(K) = 0$. Da målet er regulært, fås $m(\{t \in I | g(t) > n^{-1}\}) = 0$ for hvert n, så $g(t) \leq 0$ for næsten alle t. Tilsvarende vises, at $g(t) \geq 0$ for næsten alle t.

Det følger heraf, at relationen $F(t) = F(a) + \int_a^t f(s)ds$, $F \in AC(I)$, $f \in \mathcal{L}^1(I)$, fastlægger f entydigt næsten overalt for givet F. Vi sætter $f = DF$. Det er let at se, at $AC(I)$ er et underrum af $C(I)$, og at D bestemmer en lineær afbildning af $AC(I)$ på $L^1(I)$. For $F \in C^1(I)$ er $DF = F'$.

<u>Lemma</u>: Lad f og $g \in \mathcal{L}^1(I)$ være givne.

$$\int_a^b \int_a^s f(t)g(s)dtds = \int_a^b \int_t^b f(t)g(s)dsdt.$$

<u>Bevis</u>: For enhver målelig del A af I er $A \times I$ og $I \times A$ målelige dele af $I \times I$ (Hvis f.eks. A afviger fra en Borelmængde B med en nulmængde N, så afviger

$A \times I$ fra Borelmængden $B \times I$ med nulmængden $N \times I$). Derfor er $(s,t) \mapsto f(t)$ og $(s,t) \mapsto g(s)$ målelige på $I \times I$, og $(s,t) \mapsto f(t)g(s)$ er målelig. Af Tonelli's sætning (se nedenfor) fås, at $(s,t) \mapsto f(t)g(s)$ er integrabel. Det ønskede fås nu ved anvendelse af Fubini's sætning på den integrable funktion $(s,t) \mapsto \varphi(s,t)f(t)g(s)$, hvor φ betegner den karakteristiske funktion for $\{(s,t) \in I \times I | s \geq t\}$.

<u>Lemma (Tonelli's sætning)</u>: Lad der være givet en målelig funktion $\varphi: I \times I \to \mathbb{C}$. Hvis $\int_I \int_I |\varphi(s,t)| dtds < \infty$, så er $\varphi \in \mathcal{L}^1(I \times I)$.

<u>Bevis</u>: For $n \in \mathbb{N}$ er $|\varphi| \wedge n \in \mathcal{L}^1(I \times I)$, og $\int_I \int_I |\varphi| \wedge n \, dm(s,t) = \int_I \int_I |\varphi| \wedge n \, dtds \leq \int_I \int_I |\varphi| dtds$ ifølge Fubini's sætning. Af sætningen om monoton konvergens fås, at $|\varphi|$ og dermed φ er integrabel.

<u>Sætning (delt integration)</u>: Lad F og $G \in AC(I)$ være givne. $\int_a^b F(s)DG(s)ds + \int_a^b DF(s)G(s)ds = F(b)G(h) - F(a)G(a)$.

<u>Bevis</u>: $\int_a^b F(s)DG(s)ds = \int_a^b [F(a)+\int_a^s DF(t)dt]DG(s)ds =$

$$F(a)[G(b)-G(a)] + \int_a^b \int_t^b DF(t)DG(s)dsdt =$$
$$F(a)[G(b)-G(a)] + \int_a^b DF(t)[G(b)-G(t)]dt =$$
$$F(a)[G(b)-G(a)] + [F(b)-F(a)]G(b) - \int_a^b DF(t)G(t)dt.$$

<u>Korollar</u>: $AC(I)$ er en delalgebra af $C(I)$; for F og $G \in AC(I)$ er $D(FG) = (DF)G + F\,DG$.

<u>Bevis</u>: Ved anvendelse af formlen for delt integration på et delinterval $[a,t]$, $t \in [a,b]$, fås

$$F(t)G(t) = F(a)G(a) + \int_a^t [F(s)DG(s) + DF(s)G(s)]ds,$$

hvor $FDG + (DF)G \in \mathcal{L}^1(I)$, da DF og $DG \in \mathcal{L}^1(I)$ og F og $G \in C(I)$.

For fuldstændighedens skyld, og for at retfærdiggøre betegnelsen DF, beviser vi nu, at en absolut kontinuert funktion F på I i næsten ethvert punkt af I er differentiabel med differentialkvotient DF.

<u>Lemma</u>: Lad $\mathcal{S}$ være en mængde af åbne intervaller $\subseteq \mathbb{R}$ med foreningsmængde $\bigcup_{S \in \mathcal{S}} S = W \neq \emptyset$; for ethvert positivt tal $t < m(W)$ findes en endelig delmængde $\mathcal{T}$ af $\mathcal{S}$ bestående af parvis disjunkte intervaller med samlet længde $\sum_{S \in \mathcal{T}} m(S) > \frac{1}{3}t$.

<u>Bevis</u>: Til $t < m(W)$ kan vi vælge en kompakt delmængde K af W med $m(K) > t$; dernæst kan vi vælge en endelig delmængde $\mathcal{S}_o$ af $\mathcal{S}$, der overdækker K.

Vælg et interval $S_1 \in \mathcal{S}_o$ med størst mulig længde, og fravælg alle andre intervaller i $\mathcal{S}_o$, der skærer S_1; foreningsmængden af S_1 og de fravalgte intervaller er indeholdt i et interval med længde $3m(S_1)$. Vælg om muligt

blandt de resterende intervaller i $\mathcal{S}_o$ et interval S_2 med størst mulig længde, og så videre. Når $\mathcal{S}_o$ er opbrugt, har vi valgt parvis disjunkte intervaller $S_1, S_2, \cdots, S_n$ med samlet længde $\sum_{\nu=1}^{n} m(S_\nu) \geq \frac{1}{3} m(\bigcup_{S \in \mathcal{S}_o} S) \geq \frac{1}{3} m(K) > \frac{1}{3} t$.

<u>Lemma</u>: Lad g være en funktion ≥ 0 i $\mathcal{L}^1(I)$. Sæt $A = \{t \in I \mid g(t) = 0\}$. Til $\varepsilon > 0$ findes en åben mængde $V \supseteq A$, således at $\int_V g(t)dt < \varepsilon$.

<u>Bevis</u>: Vælg en dalende følge V_n af åbne omegne af A, så at $m(\bigcap_n V_n \setminus A) = 0$. Da $g\, 1_{V_n} \to g\, 1_{\bigcap_n V_n}$ majoriseret af g, er

$$0 = \int_A g(t)dt = \int_{\bigcap_n V_n} g(t)dt = \lim_{n\to\infty} \int_{V_n} g(t)dt.$$

<u>Lemma</u>: Lad g være en funktion ≥ 0 i $\mathcal{L}^1(I)$. Sæt $A = \{t \in I \mid g(t) = 0\}$, og $G(t) = \int_a^t g(t)dt$, $t \in [a,b]$. G er differentiabel med differential kvotient 0 i næsten ethvert punkt af A.

<u>Bevis</u>: Sæt $d(t,h) = \frac{1}{2h}(G(t+h)-G(t-h))$ for $t \in]a,b[$ og tilpas små $h > 0$. G er differentiabel med $G'(t) = 0$ i ethvert punkt $t \in]a,b[$, hvor

$\lim_{h\to 0^+} d(t,h) = 0$, idet $0 \leq \frac{1}{h}(G(t)-G(t-h)) \leq 2d(t,h)$
og $0 \leq \frac{1}{h}(G(t+h)-G(t)) \leq 2d(t,h)$.

Sæt $P_n = \{t \in A \mid \forall h > 0\ \exists k \in]0,h]: d(t,k) > n^{-1}\}$.

For $t \in]a,b[\cap (A \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} P_n)$ vil $d(t,h) \to 0$ for $h \to 0^+$.

Vælg $\varepsilon > 0$. Vælg en åben mængde $V \supseteq A$ med $\int_V g(t)dt < \varepsilon$. Vælg for hvert $t \in P_n$ et tal $h_t > 0$, således at $]t-h_t, t+h_t[\subset V$ og $d(t,h_t) > n^{-1}$.

Sæt $W = \bigcup_{t \in P_n}]t-h_t, t+h_t[$ og vælg $c < m(W)$. Vælg endelig mange punkter $t_1, t_2, \cdots, t_r \in P_n$, således at de tilsvarende intervaller er disjunkte parvis og har samlet længde $> \frac{1}{3}c$.

Så er $c < 3 \sum_{p=1}^{r} 2h_{t_p} < 3n \sum_{p=1}^{r} 2h_{t_p} d(t_p, h_{t_p}) =$

$3n \sum_{p=1}^{r} \int_{t_p-h_{t_p}}^{t_p+h_{t_p}} g(s)ds \leq 3n \int_V g(s)ds < 3\, n\, \varepsilon$. Heraf fås

$m(W) < 3n\, \varepsilon$. Da P_n for hvert $\varepsilon > 0$ er indeholdt i en åben mængde med mål $< 3\, n\, \varepsilon$, er P_n en nulmængde. Derfor er $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} P_n \cup \{a,b\}$ en nulmængde.

<u>Sætning</u>: Lad der være givet en funktion $F \in AC(I)$ og en funktion $f \in \mathcal{L}^1(I)$, således at

$$\forall t \in I: F(t) = F(a) + \int_a^t f(s)ds.$$

I næsten ethvert punkt $t \in I$ er F differentiabel med differentialkvotient $F'(t) = f(t)$.

<u>Bevis</u>: Antag gerne, at f er reel. For $r \in \mathbb{Q}$ sættes $A_r = \{t \in I \mid f(t) \leq r\}$, $B_r = \{t \in I \mid f(t) \geq r\}$,

$F_r(t) = \int_a^t (f(s)-r) \vee 0 \, ds$ og $G_r(t) = \int_a^t (r-f(s)) \vee 0 \, ds$.

Der findes målelige mængder $A_r' \subseteq A_r$ og $B_r' \subseteq B_r$, således at $m(A_r \setminus A_r') = m(B_r \setminus B_r') = 0$ og $F_r'(t) = 0$ for $t \in A_r'$ og $G_r'(t) = 0$ for $t \in B_r'$. Lad Y betegne nulmængden $\bigcup_{r \in \mathbb{Q}} (A_r \setminus A_r') \cup (B_r \setminus B_r') \cup \{a,b\}$. Lad $t \notin Y$ være givet.

Til $\varepsilon > 0$ vælges q og $r \in \mathbb{Q}$, så at $f(t) - \varepsilon < q \leq f(t) \leq r < f(t) + \varepsilon$. Så vil $t \in A_r \setminus Y \subseteq A_r'$ og $t \in B_q \setminus Y \subseteq B_q'$. Vi kan derfor finde $k > 0$, så at for $h \in]0,k]$ er $f(t) - 2\varepsilon < q - \varepsilon$

$$\leq q - h^{-1}(G_q(t)-G_q(t-h)) = h^{-1} \int_{t-h}^{t} (q-(q-f(s)) \vee 0) ds$$

$$\leq h^{-1} \int_{t-h}^{t} f(s) ds \leq h^{-1} \int_{t-h}^{t} ((f(s)-r) \vee 0 + r) ds =$$

$$h^{-1}(F_r(t)-F_r(t-h)) + r \leq \varepsilon + r < 2\varepsilon + f(t) \quad \text{og}$$

tilsvarende $f(t) - 2\varepsilon < h^{-1} \int_t^{t+h} f(s) ds < 2\varepsilon + f(t)$.

Dette viser, at $h^{-1}(F(t+h)-F(t)) \to f(t)$ for $h \to 0$.

En funktion F på et åbent interval $J \subseteq \mathbb{R}$ kaldes absolut kontinuert, hvis der findes $a \in J$ og $f \in \mathcal{L}^1_{\text{lok}}(J)$, så at $F(t) = F(a) + \int_a^t f(s) ds$ for $t \in J$. Så gælder $F(t) = F(b) + \int_b^t f(s) ds$ for ethvert $b \in J$. f er entydigt bestemt ved F næsten overalt, og betegnes DF. Mængden $AC(J)$ af absolut kontinuerte funktioner på J er en delalgebra af $C(J)$ og indeholder $C^1(J)$.

$F \in AC(J)$ hvis og kun hvis $F|I \in AC(I)$ for ethvert kompakt delinterval $I \subseteq J$, og $D(F|I) = (DF)|I$.

En funktion $F \in AC(J)$ er næsten overalt differentiabel med differentialkvotient DF.

§ 2. Formlen for spektralradius.

Lad $\mathcal{A}$ være en algebra over C med ét element $1 \neq 0$, og x et element i $\mathcal{A}$.

Vi definerer spektret $\sigma(x)$ af x som mængden af $\lambda \in \mathbb{C}$, for hvilke $x - \lambda$ ikke har en invers i $\mathcal{A}$.

Hvis $\mathcal{A}$ ikke er en normeret algebra, kan $\sigma(x)$ være tom. Dette sker f.eks., hvis $\mathcal{A}$ er algebraen af rationale funktioner i én variabel og $x \in \mathcal{A} \setminus \mathbb{C}$. Hvis $\sigma(x)$ ikke er tom, definerer vi spektralradius $\rho(x)$ for x ved $\rho(x) = \sup_{\lambda \in \sigma(x)} |\lambda|$. Hvis $\mathcal{A}$ ikke er en Banach algebra, kan $\sigma(x)$ være ubegrænset, så $\rho(x) = \infty$. Dette sker f.eks., hvis $\mathcal{A}$ er algebraen af polynomier i én variabel, normeret ved

$$\|P\| = \sup_{t \in [0,1]} |P(t)|, \quad \text{og} \quad x \in \mathcal{A} \setminus \mathbb{C}.$$

<u>Lemma</u>: Antag $\mathcal{A}$ er normeret og $\|x\| < 1$. $1 - x$ er invertibel, hvis og kun hvis $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ er konvergent, og i givet fald er $(1-x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ og

$$\|(1-x)^{-1} - 1\| \leq (1 - \|x\|)^{-1} \|x\|.$$

<u>Bevis</u>: For $N \in \mathbb{N}$ er $(1-x) \sum_{n=0}^{N} x^n = \sum_{n=0}^{N} x^n (1-x) = 1 - x^{N+1}$.

Hvis $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ er konvergent, fås ved grænseovergang $(1-x) \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n (1-x) = 1$. Hvis $(1-x)$ er invertibel,

fås $(1-x)^{-1} - \sum_{n=0}^{N} x^n = (1-x)^{-1}x^{N+1} \to 0$ for $N \to \infty$,

så $(1-x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, og

$$\|(1-x)^{-1}-1\| = \|\sum_{n=1}^{\infty} x^n\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|x\|^n = (1-\|x\|)^{-1}\|x\|.$$

<u>Korollar</u>: Antag $\mathcal{A}$ er en Banach algebra og $\|x\| < 1$. $1 - x$ er invertibel og $(1-x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$.

<u>Lemma</u>: Antag $\mathcal{A}$ er normeret, x er invertibel, og $h \in \mathcal{A}$ med $\|h\| < \frac{1}{2}\|x^{-1}\|^{-1}$. Hvis $x + h$ er invertibel er $\|(x+h)^{-1} - x^{-1}\| \leq 2\|x^{-1}\|^2\|h\|$. $y \mapsto y^{-1}$ er kontinuert, hvor afbildningen er defineret. Hvis $\mathcal{A}$ er Banach algebra, er $x + h$ invertibel.

<u>Bevis</u>: $1 + hx^{-1} = (x+h)x^{-1}$, så $1 + hx^{-1}$ er invertibel; da $\|hx^{-1}\| < 1$, er $\|(1+hx^{-1})^{-1}-1\| \leq (1-\|hx^{-1}\|)^{-1}\|hx^{-1}\|$, så $\|(x+h)^{-1}-x^{-1}\| = \|x^{-1}[(1+hx^{-1})^{-1}-1]\| \leq (1-\|h\|\|x^{-1}\|)^{-1}\|x^{-1}\|^2\|h\|$. Dette går mod nul for $h \to 0$. Hvis $\mathcal{A}$ er fuldstændig, er $1 + hx^{-1}$ invertibel, så $x + h = (1+hx^{-1})x$ er invertibel.

<u>Korollar</u>: Hvis $\mathcal{A}$ er en Banach algebra, er mængden $G(\mathcal{A})$ af invertible elementer i $\mathcal{A}$ åben.

<u>Lemma</u>: Antag $\mathcal{A}$ normeret. $(\|x^n\|^{\frac{1}{n}})_{n\in\mathbb{N}}$ er en konvergent talfølge med grænseværdi $\inf_{n\geq 1}\|x^n\|^{\frac{1}{n}}$.

<u>Bevis</u>: Det er klart, at $\inf \|x^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \liminf \|x^n\|^{\frac{1}{n}}$ $\leq \limsup \|x^n\|^{\frac{1}{n}}$. Lad $K > \inf_{n\in\mathbb{N}} \|x^n\|^{\frac{1}{n}}$ være givet.

Det er nok at vise, at $\limsup \|x^n\|^{\frac{1}{n}} \leq K$. Vælg $m \in \mathbb{N}$, så at $\|x^m\|^{\frac{1}{m}} < K$. Et vilkårligt tal $n \in \mathbb{N}$ kan skrives $n = pm + q$, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, $q \in \{0,1,\cdots,m-1\}$.

$$\|x^n\|^{\frac{1}{n}} = \|x^{pm+q}\|^{\frac{1}{n}} \leq \|x^m\|^{\frac{p}{n}}\|x\|^{\frac{q}{n}} \leq K^{\frac{pm}{n}} \|x\|^{\frac{q}{n}} \leq K(K^{-1}\|x\|)^{\frac{q}{n}}.$$

For $n \to \infty$ vil $\frac{q}{n} \to 0$, så $\limsup \|x^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \lim K(K^{-1}\|x\|)^{\frac{q}{n}} = K$ for $x \neq 0$, og $= 0 < K$ for $x = 0$.

<u>Lemma</u>: Antag $\mathcal{A}$ er normeret. Hvis $\lambda \in \sigma(x)$ og $n \in \mathbb{N}$, vil $\lambda^n \in \sigma(x^n)$.

<u>Bevis</u>: Hvis $y \in \mathcal{A}$ opfylder $y(x^n-\lambda^n) = (x^n-\lambda^n)y = 1$, så er $y(x^{n-1}+\lambda x^{n-2}+\cdots+\lambda^{n-1})(x-\lambda) =$ $(x-\lambda)(x^{n-1}+\lambda x^{n-2}+\cdots+\lambda^{n-1})\, y = 1$. Da $x - \lambda$ både har en højre invers og en venstre invers, er disse ens og $x - \lambda$ er invertibel. Dette viser, at $\lambda^n \notin \sigma(x^n)$ medfører $\lambda \notin \sigma(x)$.

<u>Lemma</u>: Antag $\mathcal{A}$ er en Banachalgebra. $\sigma(x)$ er en kompakt delmængde af $\{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \leq \lim\|x^n\|^{\frac{1}{n}}\}$.

<u>Bevis</u>: $\sigma(x)$ er afsluttet, da $\sigma(x)$ er komplementærmængden til urbilledet af den åbne mængde $G(\mathcal{A})$ af invertible elementer i $\mathcal{A}$ ved den kontinuerte afbildning $\lambda \mapsto x - \lambda$ af $\mathbb{C}$ ind i $\mathcal{A}$.

For $y \in \mathcal{A}$ og $\lambda \in \mathbb{C}$ med $|\lambda| > \|y\|$ er $\lambda \notin \sigma(y)$, idet $(y-\lambda)^{-1} = -\lambda^{-1}(1-\lambda^{-1}y)^{-1} = -\lambda^{-1}(\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda^{-1}y)^n = -\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^{-n-1}y^n$. Så $\sigma(y) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \leq \|y\|\}$.

For $\lambda \in \sigma(x)$ er $\lambda^n \in \sigma(x^n)$, så $|\lambda^n| \leq \|x^n\|$ for hvert $n \in \mathbb{N}$, og $|\lambda| \leq \inf_{n\in\mathbb{N}} \|x^n\|^{\frac{1}{n}}$.

<u>Lemma</u>: Lad $\alpha \in \mathbb{C}$ være givet. Sæt $q_n = e^{2\pi i \cdot \frac{1}{n}}$, $n \in \mathbb{N}$. Hvis $x - \alpha q_n^{\,j}$ er invertibel i $\mathcal{A}$ for $j = 1,2,\cdots,n$, så er $x^n - \alpha^n$ invertibel, og $x^n(x^n-\alpha^n)^{-1} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x(x-q_n^{\,j})^{-1}$.

<u>Bevis</u>: $x^n - \alpha^n$ er invertibel, da
$x^n - \alpha^n = (x-\alpha q_n)(x-\alpha q_n^{\,2})\cdots(x-\alpha q_n^{\,n})$. Da
$x^n - \alpha^n = (x-\alpha q_n^{\,j})(x^{n-1}+\alpha q_n^{\,j}x^{n-2}+\cdots+(\alpha q_n^{\,j})^{n-1})$,
er $(x-\alpha q_n^{\,j})^{-1} = (x^{n-1}+\alpha q_n^{\,j}x^{n-2}+\cdots+(\alpha q_n^{\,j})^{n-1})(x^n-\alpha^n)^{-1}$
for $j = 1,2,\cdots,n$, og $\sum_{j=1}^{n}(x-\alpha q_n^{\,j})^{-1} = nx^{n-1}(x^n-\alpha^n)^{-1}$,

idet

$$\sum_{j=1}^{n} q_n^{jk} = q_n^k(1-q_n^{kn})(1-q_n^k)^{-1} \quad \text{for } k = 1,2,\cdots,n-1.$$

<u>Lemma</u>: Antag $\mathcal{A}$ er en normeret algebra. For ethvert tal $\eta > 0$ er $\sigma(x) \cap \{\alpha \in \mathbb{C} \mid \lim\|x^n\|^{\frac{1}{n}} \leq |\alpha| \leq \lim\|x^n\|^{\frac{1}{n}} + \eta\} \neq \emptyset$.

<u>Bevis</u>: Sæt $J = \lim \|x^n\|^{\frac{1}{n}}$, og sæt $q_n = e^{2\pi i \cdot \frac{1}{n}}$ for $n \in \mathbb{N}$. Antag, at der findes et tal $\eta > 0$, så at $x - \alpha$ er invertibel for $J \leq |\alpha| \leq J + \eta$. Så er $x^n - \alpha^n$ også invertibel for hvert $n \in \mathbb{N}$. Da $y \mapsto y^{-1}$ er kontinuert, hvor den er defineret, og $\{\alpha \in C | J \leq |\alpha| \leq J + \eta\}$ er kompakt, er $\alpha \mapsto (x-\alpha)^{-1}$ ligeligt kontinuert på denne mængde.

Vi viser først, at $x^n(x^n-J^n)^{-1} \to 0$ for $n \to \infty$. Til $\varepsilon > 0$ kan vi vælge $\mu \in]J, J+\eta]$, så at $\|(x-J\,e^{i\theta})^{-1}-(x-\mu e^{i\theta})^{-1}\| < \varepsilon$ for alle $\theta \in \mathbb{R}$. Så er $\|x^n(x^n-J^n)^{-1}-x^n(x^n-\mu^n)^{-1}\| \leq \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \|x(x-Jq_n^j)^{-1}-x(x-\mu q_n^j)^{-1}\| \leq \varepsilon\|x\|$ for $n \in \mathbb{N}$. For $M \in]J,\mu[$ er $\|x^n\|^{\frac{1}{n}} < M$ for alle på nær endelig mange n, så $\|(\mu^{-1}x)^n\| < (\mu^{-1}M)^n$ for alle på nær endelig mange n, og $(\mu^{-1}x)^n \to 0$, så $(1-(\mu^{-1}x)^n)^{-1} \to 1$ og $x^n(x^n-\mu^n)^{-1} = -(\mu^{-1}x)^n(1-(\mu^{-1}x)^n)^{-1} = 1 - (1-(\mu^{-1}x)^n)^{-1} \to 0$ for $n \to \infty$. For alle tilstrækkeligt store $n \in \mathbb{N}$ er derfor
$\|x^n(x^n-J^n)^{-1}\| \leq \varepsilon\|x\| + \|x^n(x^n-\mu^n)^{-1}\| \leq \varepsilon(\|x\|+1)$.

For $J = 0$ er $x^n(x^n-J^n)^{-1} = 1$ for alle n, i modstrid med, at $x^n(x^n-J^n)^{-1} \to 0$. For $J > 0$ finder vi, at $1 - x^n(x^n-J^n)^{-1} = 1 + (J^{-1}x)^n(1-(J^{-1}x)^n)^{-1} = (1-(J^{-1}x)^n)^{-1} \to 1$, så $(J^{-1}x)^n \to 0$, for $n \to \infty$. Men heraf følger, at $\|(J^{-1}x)^n\| < 1$ og $\|x^n\|^{\frac{1}{n}} < J$ for alle på nær endelig mange n, i modstrid med at

$$J = \inf_{n\in\mathbb{N}} \|x^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

Sammenstilling af det foregående giver følgende to sætninger:

<u>Sætning</u>: Lad $\mathcal{A}$ være en normeret algebra med ét element over $\mathbb{C}$. Ethvert element $x \in \mathcal{A}$ har ikke-tomt spektrum $\sigma(x)$.

<u>Sætning</u>: Lad $\mathcal{A}$ være en Banach algebra med ét element over $\mathbb{C}$. For $x \in \mathcal{A}$ er spektret kompakt og ikke tomt, og spektralradius $\rho(x) = \lim \|x^n\|^{\frac{1}{n}}$.

§ 3. Foldning.

Vi betragter mål på $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$.

Et positivt mål α på $\mathbb{R}^n$ kaldes begrænset, hvis $\alpha(\mathbb{R}^n) < \infty$; et vilkårligt mål kaldes begrænset, hvis det er en linearkombination af begrænsede positive mål. Vi betegner mængden af begrænsede mål på $\mathbb{R}^n$ $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$, og forudsætter det bekendt, at $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ kan identificeres med det duale rum til Banach rummet $C_o(\mathbb{R}^n)$ af kontinuerte funktioner på $\mathbb{R}^n$, der går mod nul i det uendeligt fjerne.

Til et mål α på $\mathbb{R}^n$ defineres et positivt mål $|\alpha|$ ved $|\alpha|(f) = \sup\{|\alpha(g)| \mid g \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n),\ |g| \leq f\}$ for $f \geq 0$, $f \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$, hvor $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ betegner rummet af kontinuerte funktioner på $\mathbb{R}^n$ med kompakt støtte. Vi sætter $\mathcal{L}^1(\alpha) = \mathcal{L}^1(|\alpha|)$. For $f \in \mathcal{L}^1(\alpha)$ er $|\int_{\mathbb{R}^n} f(x)d\alpha(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|d|\alpha|(x)$. α er begrænset, hvis og kun hvis $|\alpha|$ er begrænset, og i givet fald har α og $|\alpha|$ samme norm. For $\alpha \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ og $f \in \mathcal{L}^\infty(\alpha)$ er $|\alpha(f)| \leq |\alpha|(|f|) \leq |\alpha|\ (\|f\|_\infty) = \|\alpha\|\,\|f\|_\infty$.

Vi minder om, at hvis α og β er mål på $\mathbb{R}^n$ og $f \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, så er funktionerne $y \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} f(x,y)d\alpha(x)$ og $x \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} f(x,y)d\beta(y)$ kontinuerte med kompakt støtte,

$$\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} f(x,y)\,d\alpha(x)\,d\beta(y) = \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} f(x,y)\,d\beta(y)\,d\alpha(x),$$ og

afbildningen $f \mapsto \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} f(x,y)\,d\alpha(x)\,d\beta(y)$ definerer et

mål $\alpha \times \beta$ på $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. (Man kan f.eks. benytte, at for en vilkårlig åben, relativt kompakt delmængde $\mathcal{O}$ af $\mathbb{R}^n$ er mængden af linearkonbinationer af funktioner af form $(x,y) \mapsto f(x)g(y)$, hvor f og $g \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ er nul udenfor $\overline{\mathcal{O}}$, tæt i $\{h \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n) \mid h$ er nul uden for $\overline{\mathcal{O} \times \mathcal{O}}\}$ i følge Weierstrass' approksimationssætning). For dette produktmål gælder Fubini's sætning: Hvis $f \in \mathcal{L}^1(\alpha\times\beta)$, så er funktionen $x \mapsto f(x,y)$ i $\mathcal{L}^1(\alpha)$ for β næsten ethvert $y \in \mathbb{R}^n$, og $y \mapsto \int f(x,y)\,d\alpha(x)$ definerer et element i $L^1(\beta)$, og $\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} f(x,y)\,d\alpha(x)\,d\beta(y) =$

$$\int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} f(x,y)\,d\alpha\times\beta(x,y) \quad \left(\text{og } = \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} f(x,y)\,d\beta(y)\,d\alpha(x)\right).$$

Desuden gælder Tonelli's sætning: Hvis α og β er positive mål og f er en $\alpha \times \beta$ målelig funktion på $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ og $\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} |f(x,y)|\,d\alpha(x)\,d\beta(y) < \infty$, så er

$f \in \mathcal{L}^1(\alpha\times\beta)$.

For α og $\beta \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ er $\alpha \times \beta \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ og $\|\alpha\times\beta\| \leq \|\alpha\|\,\|\beta\|$, idet $\left|\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} f(x,y)\,d\alpha(x)\,d\beta(y)\right| \leq$

$$\|\beta\| \sup_{y\in\mathbb{R}^n} \left|\int_{\mathbb{R}^n} f(x,y)\,d\alpha(x)\right| \leq \|\beta\|\,\|\alpha\|\,\|f\|_\infty \quad \text{for } f \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n).$$

For α og $\beta \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ definerer vi et mål $\alpha*\beta$ på $\mathbb{R}^n$, foldningen af α og β, ved

$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,d\alpha*\beta(x) = \int_{\mathbb{R}^{2n}} f(x+y)\,d\alpha\times\beta(x,y)$; $\alpha*\beta$ er et begrænset mål med $\|\alpha*\beta\| \leq \|\alpha\|\,\|\beta\|$, idet

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} f(x+y)\,d\alpha(x)\,d\beta(y)\right| \leq \|\beta\| \sup_{y\in\mathbb{R}^n}\left|\int_{\mathbb{R}^n} f(x+y)\,d\alpha(x)\right| \leq$$

$\|\beta\|\,\|\alpha\|\,\|f\|_\infty$ for $f \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$.

$\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ bliver herved organiseret som en abelsk Banachalgebra; thi for $\alpha,\beta,\gamma \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, og $f \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ gælder $(\alpha*\beta)*\gamma(f) = \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} f(u+z)\,d\alpha*\beta(u)\,d\gamma(z) =$

$$\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} f(x+y+z)\,d\alpha(x)\,d\beta(y)\,d\gamma(z) = \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} f(x+v)\,d\alpha(x)\,d\beta*\gamma(v) =$$

$\alpha*(\beta*\gamma)(f)$, og $\alpha*\beta(f) = \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} f(x+y)\,d\alpha(x)\,d\beta(y) =$

$$\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} f(y+x)\,d\beta(y)\,d\alpha(x) = \beta*\alpha(f), \quad \text{og} \quad (\alpha+\lambda\beta)*\gamma = \alpha*\gamma + \lambda\beta*\gamma,$$

og $\lambda(\alpha*\beta) = (\lambda\alpha)*\beta = \alpha*(\lambda\beta)$.

For en kompleks funktion f på $\mathbb{R}^n$ definerer vi en funktion $\check{f}$ ved $\check{f}(x) = f(-x)$ og en funktion f^* ved $f^*(x) = \overline{f(-x)} = \check{\bar{f}}(x)$. For $f \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$, eller $C_o(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$, er $\check{f}$ og f^* i det samme rum. Afbildningen $f \mapsto f^*$ er konjugeret lineær, $(fg)^* = g^*f^*$, og $f^{**} = f$, og $\|f^*\|_p = \|f\|_p$, $1 \leq p \leq \infty$.

For et mål α på $\mathbb{R}^n$ definerer vi et mål $\overline{\alpha}$ på $\mathbb{R}^n$ ved $\overline{\alpha}(f) = \overline{\alpha(\overline{f})}$ og et mål $\check{\alpha}$ ved $\check{\alpha}(f) = \alpha(\check{f})$ og et mål α^* ved $\alpha^*(f) = \check{\overline{\alpha}}(f) = \overline{\alpha(f^*)}$. $\alpha \mapsto \alpha^*$ er en konjugeret lineær (anti-) homomorfi med periode to. For $\alpha \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ er $\overline{\alpha}, \check{\alpha}$ og $\alpha^* \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$, og $\|\alpha^*\| = \|\check{\alpha}\| = \|\overline{\alpha}\| = \|\alpha\|$.

Vi minder om, at vi for $x \in \mathbb{R}^n$ definerer translationen τ_x af en funktion f på $\mathbb{R}^n$ ved $(\tau_x f)(y) = f(y-x)$. $x \mapsto \tau_x$ er en homomorfi af $\mathbb{R}^n$ ind i de lineære afbildninger af vektorrummet af funktioner på $\mathbb{R}^n$. Hvert af rummene $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$, $C_o(\mathbb{R}^n)$ og $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$, afbildes herved i sig selv, og $\|\tau_x f\|_p = \|f\|_p$, $1 \leq p \leq \infty$.

For $x \in \mathbb{R}^n$ og et mål α på $\mathbb{R}^n$ definerer vi et mål $\tau_x\alpha$ på $\mathbb{R}^n$ ved $(\tau_x\alpha)(f) = \alpha(\tau_{-x}f)$ for $f \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$. $x \mapsto \tau_x$ er en homomorfi af $\mathbb{R}^n$ ind i de lineære afbildninger af vektorrummet af mål på $\mathbb{R}^n$. $\mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$ afbildes i sig selv, og $\|\tau_x\alpha\| = \|\alpha\|$.

For $x \in \mathbb{R}^n$ lader vi ε_x betegne målet $f \mapsto f(x)$, $f \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$. $\varepsilon_x \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ med $\|\varepsilon_x\| = 1$, og for $\alpha \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ er $\varepsilon_x * \alpha = \tau_x$, idet

$$\varepsilon_x * \alpha(f) = \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} f(u+v)\,d\varepsilon_x(u)\,d\alpha(v) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x+v)\,d\alpha(v).$$

Specielt er ε_o ételement i $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$. Det ses let, at $\varepsilon_x * \varepsilon_y = \varepsilon_{x+y}$ og at $\varepsilon_x^* = \varepsilon_{-x}$.

Lad α være et positivt mål på $\mathbb{R}^n$. For $g \in \mathcal{L}^1(\alpha)$ definerer vi et mål $g\alpha$ på $\mathbb{R}^n$ ved $(g\alpha)(f) = \alpha(fg)$, $f \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$. $g\alpha \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ og $\|g\alpha\| = \int_{\mathbb{R}^n} |g| d\alpha$; thi

for $f \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ er $|\int_{\mathbb{R}^n} fgd\alpha| \leq \|f\|_\infty \int_{\mathbb{R}^n} |g| d\alpha$; og

for en passende valgt Borel funktion h er $|g| = gh\,\alpha$ næsten overalt og $\|h\|_\infty = 1$, så $\int_{\mathbb{R}^n} |g| d\alpha = \int_{\mathbb{R}^n} hgd\alpha \leq \|g\alpha\| \|h\|_\infty = \|g\alpha\|$. $g \mapsto g\alpha$ definerer

således en isometri af $L^1(\alpha)$ på et fuldstændigt og dermed afsluttet underrum af $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$. Man kan vise, at $f \in \mathcal{L}^1(g\alpha)$ hvis og kun hvis $fg \in \mathcal{L}^1(\alpha)$, og at i givet fald $\int_{\mathbb{R}^n} f\, d(g\alpha) = \int_{\mathbb{R}^n} fgd\alpha$; og man kan vise, at et mål

$\beta \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ har formen $g\alpha$, $g \in \mathcal{L}^1(\alpha)$, hvis og kun hvis $\beta(K) = 0$ for enhver kompakt mængde $K \subseteq \mathbb{R}^n$ med $\alpha(K) = 0$ (Lebesgue-Radon-Nikodym's sætning).

Vælg et positivt forskydningsinvariant mål $m_n \neq 0$ på $\mathbb{R}^n$; m_n er altså en positiv konstant gange Lebesgue målet på $\mathbb{R}^n$. Forsyn $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ med den tilsvarende 1-seminorm $\|f\|_1 = \int_{\mathbb{R}^n} |f| dm_n$. $f \mapsto fm_n$ bliver herved

en isometri af $L^1(\mathbb{R}^n)$ på et afsluttet underrum af $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$. Bemærk, at $(fm_n)^* = f^*m_n$, idet

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi d(fm)^* = \overline{\int_{\mathbb{R}^n} \overline{\varphi(-s)} f(s) dm_n(s)} = \int \varphi(s) \overline{f(-s)} dm_n(s), \quad \text{og}$$

at $\tau_x(fm_n) = (\tau_x f) m_n$ for $x \in \mathbb{R}^n$, idet

$m_n((\tau_x f)\varphi) = m_n(f(\tau_{-x}\varphi))$. Vi vil vise, at billedet $\{fm_n \mid f \in L^1(\mathbb{R}^n)\}$ er et ideal i $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$.

<u>Lemma</u>: For enhver m_n målelig funktion φ på $\mathbb{R}^n$ og ethvert positivt mål α på $\mathbb{R}^n$ er $(x,y) \mapsto \varphi(y-x)$ en $\alpha \times m_n$ målelig funktion på $\mathbb{R}^{2n}$.

<u>Bevis</u>: $(x,y) \mapsto (x,y-x)$ er en homeomorfi ω af $\mathbb{R}^{2n}$ på $\mathbb{R}^{2n}$. For $f \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^{2n})$ er $\alpha \times m_n(f \circ \omega) =$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x,y-x) dm_n(y) d\alpha(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x,y) dm_n(y) d\alpha(x) =$$

$\alpha \times m_n(f)$. Til en kompakt mængde $K \subseteq \mathbb{R}^{2n}$ kan vi vælge en følge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ af funktioner i $\mathcal{K}(\mathbb{R}^{2n})$, så at $f_n \downarrow 1_K$; så vil $f_n \circ \omega \downarrow 1_K \circ \omega = 1_{\omega^{-1}(K)}$, og

$\alpha \times m_n(\omega^{-1}(K)) = \alpha \times m_n(K)$. For enhver Borel mængde $B \subseteq \mathbb{R}^{2n}$ er $\omega^{-1}(B)$ en Borelmængde, og ω afbilder mængden af kompakte delmængder af $\omega^{-1}(B)$ på mængden af kompakte delmængder af B, så $\alpha \times m_n(\omega^{-1}(B)) =$

$$\sup_{L \text{ kompakt}, L \subseteq \omega^{-1}(B)} \alpha \times m_n(L) = \sup_{K \text{ kompakt}, K \subseteq B} \alpha \times m_n(K) = \alpha \times m_n(B).$$

En delmængde C af $\mathbb{R}^{2n}$ er $\alpha \times m_n$ målelig, hvis og kun hvis der findes Borel mængder A og B, så at $A \subseteq C \subseteq B$ og $\alpha \times m_n(B \setminus A) = 0$. Af det foregående fås, at en mængde C er $\alpha \times m_n$ målelig, hvis og kun hvis $\omega^{-1}(C)$ er $\alpha \times m_n$ målelig; så for en vilkårlig $\alpha \times m_n$ målelig funktion ψ på $\mathbb{R}^{2n}$ er $\psi \circ \omega$ $\alpha \times m_n$ målelig.

Antag nu, at φ er m_n målelig; sæt $\varphi_2(x,y) = \varphi(y)$ for $(x,y) \in \mathbb{R}^{2n}$. φ_2 er $\alpha \times m_n$ målelig, så $(x,y) \mapsto \varphi_2 \circ \omega(x,y) = \varphi_2(x,y-x) = \varphi(y-x)$ er $\alpha \times m_n$ målelig.

For $\alpha \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ og $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ er $(x,y) \mapsto g(y-x)$ en $\alpha \times m_n$ målelig funktion, og

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |g(y-x)| dm_n(y) d|\alpha|(x) = \|g\|_1 \|\alpha\| < \infty, \text{ så}$$

$(x,y) \mapsto g(y-x)$ er $|\alpha| \times m_n$ integrabel, og for m_n næsten alle $y \in \mathbb{R}^n$ er $x \mapsto g(y-x)$ en $|\alpha|$ integrabel funktion, og $y \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} g(y-x) d\alpha(x)$ bestemmer et element $\alpha * g$ i $L^1(\mathbb{R}^n)$ med norm

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} g(y-x) d\alpha(x) \right| dm_n(y) \leq \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |g(y-x)| d|\alpha|(x) dm_n(y) =$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |g(y-x)| dm_n(y) d|\alpha|(x) = \|g\|_1 \|\alpha\|.$$ For $\alpha \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ og $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ kan vi derfor definere et element

$\alpha * g = g * \alpha \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ved $\alpha * g(y) = \int_{\mathbb{R}^n} g(y-x)\,d\alpha(x)$

for m_n næsten alle $y \in \mathbb{R}^n$, med $\|\alpha * g\|_1 \leq \|\alpha\|\,\|g\|_1$.

For $\varphi \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ er $(x,y) \mapsto \varphi(y)g(y-x)$ $|\alpha| \times m_n$ integrabel, og $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi\, d(\alpha * g)m_n = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y)\alpha * g(y)\,dm_n(y) =$

$$\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y)g(y-x)\,d\alpha(x)\,dm_n(y) = \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y)g(y-x)\,dm_n(y)\,d\alpha(x) =$$

$$\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x+y)g(y)\,dm_n(y)\,d\alpha(x) = \alpha * (gm_n)(\varphi), \quad \text{så}$$

$\alpha * (gm_n) = (\alpha * g)m_n$. F.eks. er $(\varepsilon_x * g)m_n = \varepsilon_x * (gm_n) = \tau_x(gm_n) = (\tau_x g)m_n$ for $x \in \mathbb{R}^n$. $\varepsilon_x * g = \tau_x g$ ses let direkte.

For f og $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ sætter vi $(fm_n) * g = f * g$, så $f * g(y) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(y-x)\,dm_n(x)$ for næsten alle $y \in \mathbb{R}^n$,

og $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1\|g\|_1$. $L^1(\mathbb{R}^n)$ bliver herved en Banach algebra (uden ét element), isomorf med et afsluttet ideal i $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$. Bemærk, at $(\tau_x f) * g = (\varepsilon_x * f) * g = \varepsilon_x * (f * g) = \tau_x(f * g)$ for $x \in \mathbb{R}^n$.

For $\alpha \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ defineres den Fourier transformerede funktion $\hat{\alpha}$ på $\mathbb{R}^n$ ved $\hat{\alpha}(t) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-it\cdot x}\,d\alpha(x)$. $\hat{\alpha}$ er

en begrænset, kontinuert funktion; thi $|\hat{\alpha}(t)| \leq \|\alpha\|$ for $t \in \mathbb{R}^n$, og $|\hat{\alpha}(t+h) - \hat{\alpha}(t)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |e^{-ih\cdot x} - 1|\,d|\alpha|(x) \to 0$ for

$h \to 0$, da konvergensen er majoriseret af den $|\alpha|$ integrable funktion 2. Det ses let, at $\widehat{\alpha^*} = \overline{\hat{\alpha}}$ og $\overline{\hat{\alpha}} = \hat{\alpha}^*$, og at $(\alpha*\beta)^\wedge = \hat{\alpha}\hat{\beta}$. Bemærk også, at $\widehat{\varepsilon_x}(t) = e^{-it\cdot x}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}^n$.

For $\alpha \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ og $g \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$, er $(x,y) \mapsto g(y-x)$ en $\alpha \times m_n$ målelig funktion og $\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} |g(y-x)|^p dm_n(y)d|\alpha|(x) = \|g\|_p^p\|\alpha\| < \infty$, så

$(x,y) \mapsto g(y-x)$ er en funktion i $\mathcal{L}^p(|\alpha|\times m_n)$ og for m_n næsten alle $y \in \mathbb{R}^n$ er $x \mapsto g(y-x)$ en funktion i $\mathcal{L}^p(|\alpha|)$, og $y \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} |g(y-x)|^p d|\alpha|(x)$ definerer et element $(|\alpha|*|g|^p)$

i $L^1(\mathbb{R}^n)$. Da $1 \in \mathcal{L}^q(|\alpha|)$, for $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, er $x \mapsto g(y-x)$ en funktion i $\mathcal{L}^1(|\alpha|)$ for m_n næsten alle $y \in \mathbb{R}^n$, og

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n} g(y-x)d\alpha(x)\right| \le \left(\int_{\mathbb{R}^n} |g(y-x)|^p d|\alpha|(x)\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{\mathbb{R}^n} 1 d|\alpha|(x)\right)^{\frac{1}{q}},$$

så $y \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} g(y-x)d\alpha(x)$ definerer et element $\alpha*g \in L^p(\mathbb{R}^n)$

med norm $\left(\int_{\mathbb{R}^n}\left|\int_{\mathbb{R}^n} g(y-x)d\alpha(x)\right|^p d\, m_n(y)\right)^{\frac{1}{p}} \le$

$$\|\alpha\|^{\frac{1}{q}}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} |g(y-x)|^p d|\alpha|(x)d\, m_n(y)\right)^{\frac{1}{p}} = \|\alpha\|^{\frac{1}{q}+\frac{1}{p}}\|g\|_p.$$

For $\alpha \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ og $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ kan vi derfor definere et element $\alpha*g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ ved $\alpha*g(y) = \int_{\mathbb{R}^n} g(y-x)d\alpha(x)$ for

m_n næsten alle $y \in \mathbb{R}^n$, med $\|\alpha*g\|_p \le \|\alpha\|\,\|g\|_p$.

Tilsvarende ses, at for $\alpha \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ og $g \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^n)$ er $x \mapsto g(y-x)$ en $|\alpha|$ integrabel funktion for m_n næsten alle $y \in \mathbb{R}^n$, og $y \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} g(y-x)\,d\alpha(x)$ definerer

et element $\alpha * g \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ med $\|\alpha * g\|_\infty \leq \|\alpha\|\,\|g\|_\infty$.

For $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ og $g \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$ definerer vi $f*g(y) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(y-x)\,dm_n(x)$ for m_n næsten alle y;

$f*g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ med $\|f*g\|_p \leq \|f\|_1\|g\|_p$, $1 \leq p \leq \infty$.

For f og $g \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ er $f*g \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$; kontinuiteten vises ved udnyttelse af den ligelige kontinuitet af g, og støtten for $f*g$ er indeholdt i summen af støtterne for f og g.

For $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$ og $g \in \mathcal{L}^q(\mathbb{R}^n)$, hvor $1 < p < \infty$ og $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, er $x \mapsto g(y-x)$ en funktion i $\mathcal{L}^q(\mathbb{R}^n)$ med samme q norm som g for hvert $y \to \mathbb{R}^n$, så $x \mapsto f(x)g(y-x)$ er en funktion i $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ for hvert y, og $\left|\int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(y-x)\,dm_n(x)\right| \leq \|f\|_p\|g\|_q$. Vi definerer $f*g(y) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(y-x)\,dm_n(x)$; $f*g$ er begrænset med

$\|f*g\|_\infty \leq \|f\|_p\|g\|_q$. Ved approksimation af g i q norm med funktioner fra $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ for fastholdt $f \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$

og dernæst approksimation i p norm af f med funktioner fra $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ for fastholdt $g \in \mathcal{L}^q(\mathbb{R}^n)$ findes, at $f*g \in C_o(\mathbb{R}^n)$.

Lad $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ være en følge af positive funktioner i $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ med $\|\varphi_n\|_1 = 1$ for alle n. Antag, at der til hvert $\varepsilon > 0$ findes et $N \in \mathbb{N}$, så at $\varphi_n(x) = 0$ for $n \geq N$ og $\|x\| > \varepsilon$. For $g \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ vil $\varphi_n*g \to g$ i L^p for $1 \leq p \leq \infty$, idet g er ligeligt kontinuert. Ved approksimation findes, at $\varphi_n*g \to g$ i $L^p(\mathbb{R}^n)$ for hvert $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$. Man kan vise, at $\varphi_n*\alpha(f) \to \alpha(f)$ for $\alpha \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ og f begrænset og ligeligt kontinuert, og at $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_n*g(y)f(y)dm_n(y) \to$

$\int_{\mathbb{R}^n} g(y)f(y)dm_n(y)$ for $y \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, og $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

$(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ kaldes en approksimativ enhed for $L^1(\mathbb{R}^n)$.

§ 4. Spektret for $L^1(\mathbb{R}^n)$.

Vælg et positivt translations invariant mål $m_n \neq 0$ på $\mathbb{R}^n$.

Vektorrummet $L^1(\mathbb{R}^n)$ organiseret ved multiplikationen $(f,g) \mapsto f*g$, hvor $f * g(y) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(y-x)dm_n(x)$ for m_n næsten alle $y \in \mathbb{R}^n$, og forsynet med normen $f \mapsto \|f\|_1 = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|dm_n(x)$, er en Banachalgebra (uden ételement). Vi vil vise, at spektret Δ for $L^1(\mathbb{R}^n)$, altså mængden af homomorfier af $L^1(\mathbb{R}^n)$ på $\mathbb{C}$, kan identificeres med $\mathbb{R}^n$, på en sådan måde at Gelfandtransformering identificeres med ko-Fourier transformering.

Ved en karakter på $\mathbb{R}^n$ forstår vi en kontinuert homomorfi af $\mathbb{R}^n$ ind i gruppen $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$.

<u>Sætning</u>: For hvert $t \in \mathbb{R}^n$ er $x \mapsto e^{ix\cdot t}$ en karakter på $\mathbb{R}^n$, og enhver karakter på $\mathbb{R}^n$ har én fremstilling af denne form. For enhver karakter χ på $\mathbb{R}^n$ defineres ved $f \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} f(t)\chi(t)dm_n(t)$ en homomorfi af $L^1(\mathbb{R}^n)$ på $\mathbb{C}$, og enhver homomorfi af $L^1(\mathbb{R}^n)$ på $\mathbb{C}$ har én fremstilling af denne form. Den herved definerede sammensatte afbildning af $\mathbb{R}^n$ på spektret Δ for $L^1(\mathbb{R}^n)$ er en homeomorfi.

<u>Bevis</u>: 1) For hvert $t \in \mathbb{R}^n$ er $x \mapsto e^{ix\cdot t}$ en kontinuert homomorfi af $\mathbb{R}^n$ ind i $\mathbb{T}$. For forskellige t fås forskellige karakterer, idet $t_\nu = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_\nu} e^{it\cdot x}\Big|_{x=0}$, $\nu = 1,2,\cdots,n$.

2) Lad χ betegne en Lebesguemålelig homomorfi af $\mathbb{R}^n$ ind i $\mathbb{T}$. Da $\chi \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^n)$, er $f \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\chi(x)dm_n(x)$ en kontinuert lineær funktional π_χ på $L^1(\mathbb{R}^n)$ med norm ≤ 1. $\pi_\chi \neq 0$, da $\pi_\chi(\bar{\chi}1_{[-l,l]^n}) = \int_{[-l,l]^n} 1dm_n(x) \neq 0$ for $l > 0$. For f og $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ er $\pi_\chi(f*g) = \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(y-x)\chi(y)dm_n(x)dm_n(y) =$

$$\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} g(y-x)\chi(y-x)dm_n(y)f(x)\chi(x)dm_n(x) = \pi_\chi(f)\pi_\chi(g),$$ idet

anvendelsen af Fubini's sætning retfærdiggøres ved Torelli's sætning. Bemærk, at for $x \in \mathbb{R}^n$ og $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ er $\pi_\chi(\tau_x f) = \chi(x)\pi_\chi(f)$, og at $\pi_\chi(f^*) = \overline{\pi_\chi(f)}$.

3) Lad π betegne en homomorfi af $L^1(\mathbb{R}^n)$ på $\mathbb{C}$. π er kontinuert med $\|\pi\| \leq 1$ (hvis der fandtes $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ med $\|f\|_1 < 1$ og $\pi(f) = 1$, så ville $f + f*f + f*f*f + \cdots$ bestemme et element $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, for hvilket $f*g = g - f$ og $\pi(g) = \pi(f)\pi(g) = \pi(g)-1$). $\mathrm{Ker}(\pi)$ er et afsluttet ideal i $L^1(\mathbb{R}^n)$ forskelligt fra $L^1(\mathbb{R}^n)$, da π er surjektiv.

<u>Lemma</u>: Lad J være et afsluttet ideal i $L^1(\mathbb{R}^n)$. J er translationsinvariant.

<u>Bevis</u>: Vælg en approksimativ enhed $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ for $L^1(\mathbb{R}^n)$. For $x \in \mathbb{R}^n$ og $g \in J$ er $(\tau_x\varphi_i)*g \in J$, og $(\tau_x\varphi_i)*g = \varphi_i*(\tau_x g) \to \tau_x g$ i $L^1(\mathbb{R}^n)$, så $\tau_x g \in J$.

Lad $x \in \mathbb{R}^n$. Da $\ker(\pi)$ er translationsinvariant, er den lineære afbildning $f \mapsto \pi(\tau_x f)$ af $L^1(\mathbb{R}^n)$ på $\mathbb{C}$ nul på $\ker(\pi)$; derfor er $\pi(f) \mapsto \pi(\tau_x f)$ en veldefineret lineær afbildning af $\mathbb{C}$ på $\mathbb{C}$, altså multiplikation med et komplekst tal $\chi_\pi(x)$, $\pi(\tau_x f) = \chi_\pi(x)\pi(f)$ for $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Heraf fås, at $\chi_\pi(0) = 1$, og at $\chi_\pi(x+y) = \chi_\pi(x)\chi_\pi(y)$, så at χ_π er en homomorfi af $\mathbb{R}^n$ ind i $\{z \in \mathbb{C} | z \neq 0\}$. Vælg en approksimativ enhed $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ for $L^1(\mathbb{R}^n)$; da $|\pi((\tau_x\varphi_n)*f)| \leq \|\tau_x\varphi_n\|_1 |\pi(f)| = |\pi(f)|$ og $(\tau_x\varphi_n)*f \to \tau_x f$, er $|\chi_\pi(x)||\pi(f)| = |\pi(\tau_x f)| \leq |\pi(f)|$ for $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, og $|\chi_\pi(x)| \leq 1$. Da også $|\chi_\pi(x)^{-1}| = |\chi_\pi(-x)| \leq 1$, er $|\chi_\pi(x)| = 1$ for alle $x \in \mathbb{R}^n$.

<u>Lemma</u>: For hvert $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ er $x \mapsto \tau_x f$ en kontinuert afbildning $\mathbb{R}^n \to L^1(\mathbb{R}^n)$.

<u>Bevis</u>: For $f \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ og x og $y \in \mathbb{R}^n$ er

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\tau_x f - \tau_y f| dm_n = \int_{\mathbb{R}^n} |f(u) - f(u+x-y)| dm_n(u) \to 0 \quad \text{for}$$

$y \to x$. Til $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ kan vi vælge $f \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$, så at $\|f-g\|_1 < \frac{\varepsilon}{3}$; så er

$$\|\tau_x g - \tau_y g\|_1 \leq \|\tau_x g - \tau_x f\|_1 + \|\tau_x f - \tau_y f\|_1 + \|\tau_y f - \tau_y g\|_1 < \varepsilon$$

for alle y tilstrækkeligt tæt ved x.

Da $x \mapsto \tau_x f$ er kontinuert og $\tau_x f \mapsto \pi(\tau_x f) = \chi_\pi(x)\pi(f)$ er kontinuert, er χ_π kontinuert. χ_π er således en karakter på $\mathbb{R}^n$.

4) Lad χ være en m_n målelig homomorfi af $\mathbb{R}^n$ ind i $\mathbb{T}$. For $x \in \mathbb{R}^n$ og $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ er $\chi_{\pi_\chi}(x)\pi_\chi(f) = \pi_\chi(\tau_x f) = \chi(x)\pi(f)$, så $\chi_{\pi_\chi} = \chi$. Hermed har vi vist

<u>Sætning</u>: Enhver Lebesgue målelig homomorfi af $\mathbb{R}^n$ ind i $\mathbb{T}$ er kontinuert.

5) Lad π være en homomorfi af $L^1(\mathbb{R}^n)$ på $\mathbb{C}$. π er kontinuert med $\|\pi\| \leq 1$.

<u>Lemma</u>: For f og $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ gælder:

$$\pi(f*g) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\pi(\tau_x g)\, dm_n(x).$$

<u>Bevis</u>: Vi benytter, at det duale rum til $L^1(\mathbb{R}^n)$ er $L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Da π er en kontinuert lineær funktional på $L^1(\mathbb{R}^n)$, findes der en funktion $h \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^n)$,

så at $\pi(f) = \int_{\mathbb{R}^n} f\,h\,dm_n$ for $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. For f og

g i $L^1(\mathbb{R}^n)$ er

$$\pi(f*g) = \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(y-x)\,dm_n(x)\,h(y)\,dm_n(y) =$$

$$\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} g(y-x)h(y)\,dm_n(y)\,f(x)\,dm_n(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,\pi(\tau_x g)\,dm_n(x)$$

ved Tonelli's sætning og Fubini's sætning.

For f og $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ er $\pi(f)\pi(g) = \pi(f*g) =$

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,\pi(\tau_x g)\,dm_n(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,\chi_\pi(x)\,\pi(g)\,dm_n(x) = \pi_{\chi_\pi}(f)\,\pi(g),$$

så $\pi_{\chi_\pi} = \pi$.

Vi har hermed vist, at forbindelsen mellem karakterer på $\mathbb{R}^n$ og homomorfier af $L^1(\mathbb{R}^n)$ på $\mathbb{C}$ er bijektiv. Desuden har vi set, at for $\pi \in \Delta$ og $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ gælder $\pi(f^*) = \overline{\pi(f)}$.

6) Lad ψ være en karakter på $\mathbb{R}$.

$\theta \mapsto e^{i\theta}$ afbilder $]-\pi,\pi[$ homeomorft på $\mathbb{T}\setminus\{1\}$.

Lad Arg betegne den omvendte afbildning.

Bestem $a > 0$, så at $\psi(]-a,a]) \subseteq \{z\in\mathbb{T} \mid |\mathrm{Arg}\, z| \leq \frac{2\pi}{3}\}$.

For $|x| < a$ og $n \in \mathbb{N}$ er $\mathrm{Arg}\,\psi(2^{-n}x) = 2^{-n}\mathrm{Arg}\,\psi(x)$;

thi af $|x| < a$ fås $|2^{-1}x| < a$ og $\psi(2^{-1}x)^2 = \psi(x)$, så

$\psi(2^{-1}x) = \pm e^{i\,2^{-1}\mathrm{Arg}\psi(x)}$, og $\mathrm{Arg}\,\psi(2^{-1}x) \in$

$(2^{-1}\,\mathrm{Arg}\,\psi(x) + \pi\mathbb{Z}) \cap \left]-\frac{2\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right[= \{2^{-1}\,\mathrm{Arg}\,\psi(x)\}$, idet

$2^{-1}\,\mathrm{Arg}\,\psi(x) \in \left]-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right[$; af $|2^{-1}x| < a$ og
$\mathrm{Arg}\ \psi(2^{-1}x) = 2^{-1}\,\mathrm{Arg}\psi(x)$ fås nu $|2^{-2}x| < a$ og
$\mathrm{Arg}\ \psi(2^{-2}x) = 2^{-1}\,\mathrm{Arg}\psi(2^{-1}x) = 2^{-2}\,\mathrm{Arg}\psi(x)$, o.s.v..

Vælg $k \in \mathbb{Z}$, så at $|2^{-k}| < a$, og sæt
$t = 2^{k}\,\mathrm{Arg}\psi(2^{-k})$. For $n \geq k$, $n \in \mathbb{Z}$, er
$\mathrm{Arg}\ \psi(2^{-n}) = 2^{-(n-k)}\ \mathrm{Arg}\psi(2^{-k}) = 2^{-n}t$, så
$\psi(2^{-n}) = e^{i2^{-n}t}$, og $\psi(q2^{-n}) = \psi(2^{-n})^{q} = e^{iq2^{-n}t}$ for
$q \in \mathbb{Z}$. Da $\{q2^{-n} \mid q \in \mathbb{Z}\ ,\ n \geq k\}$ er tæt i $\mathbb{R}$, er
$\psi(x) = e^{itx}$ for ethvert $x \in \mathbb{R}$.

7) Lad ψ være en karakter på $\mathbb{R}^n$. Der findes $t \in \mathbb{R}^n$, så at $\psi(x) = e^{it\cdot x}$ for enhver vektor $x \in \mathbb{R}^n$, der har alle koordinater på nær højst én lig nul. Så er $\psi(x) = e^{it\cdot x}$ for alle $x \in \mathbb{R}^n$.

8) Vi har nu en afbildning $t \to \pi_t$ af $\mathbb{R}^n$ på Δ givet ved, at $\pi_t(f) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{it\cdot x}dm_n(x)$ = værdien i

t af den koFouriertransformerede af f, for $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

Lad $\mathbb{R}^n_\infty$ betegne étpunkts kompaktificeringen af $\mathbb{R}^n$. Sæt $\pi_\infty = 0$.

Da $t \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{it\cdot x}dm_n(x)$ er kontinuert på $\mathbb{R}^n$,

og går imod nul for $t \to \infty$, for hvert $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, og da $\Delta \cup \{0\}$ har den svageste topologi, der gør alle afbildninger $\pi \mapsto \pi(f)$, $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, kontinuerte, er

$t \mapsto \pi_t$ en kontinuert afbildning af $\mathbb{R}^n_\infty$ på $\Delta \cup \{0\}$.

Da $\mathbb{R}^n_\infty$ er kompakt, og da afbildningen også er injektiv, er den en homeomorfi, og restriktionen til $\mathbb{R}^n$ er en homeomorfi af $\mathbb{R}^n$ på Δ.

§ 5. Topologier på $\mathcal{B}(H)$.

Lad der være givet et Hilbertrum H.

Vi har tidligere på $\mathcal{B}(H)$, rummet af kontinuerte lineære afbildninger af H ind i H, betragtet topologien givet ved operatornormen

$T \mapsto \|T\| = \sup_{x \in H, \|x\| \leq 1} \|Tx\|$. Forsynet med denne norm

er $\mathcal{B}(H)$ jo en C^*-algebra.

Ved den stærke topologi på $\mathcal{B}(H)$ vil vi forstå den svageste topologi, der gør alle afbildninger $T \mapsto Tx$, $x \in H$, kontinuerte: $\mathcal{B}(H) \to H$. En basis for omegne af et punkt $S \in \mathcal{B}(H)$ er givet ved mængder $\{T \in \mathcal{B}(H) \mid \|(T-S)x_o\| < \varepsilon \text{ for } o = 1,2,\cdots,n\}$, hvor $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$, og $x_1, x_2, \cdots, x_n \in H$. Et net $(T_i)_{i \in I}$, $T_i \in \mathcal{B}(H)$, konvergerer i denne topologi mod $T \in \mathcal{B}(H)$, hvis og kun hvis $T_i x \to Tx$ for ethvert $x \in H$. Forsynet med denne topologi er $\mathcal{B}(H)$ et topologisk vektorrum. $(S,T) \mapsto ST$ er ikke en kontinuert afbildning: $\mathcal{B}(H) \times \mathcal{B}(H) \to \mathcal{B}(H)$, når $\mathcal{B}(H)$ i alle tre tilfælde forsynes med stærk topologi, men for enhver norm begrænset delmængde M af $\mathcal{B}(H)$ er restriktionen af denne afbildning til $M \times \mathcal{B}(H)$ kontinuert; thi hvis $S_i \to S$, $T_j \to T$ og $\|S_i\| \leq m < \infty$ for alle i, så har for hvert $x \in H$ $(ST - S_i T_j)x = (S - S_i)Tx + S_i(T - T_j)x$

vilkårligt lille norm for alle tilstrækkeligt store i og j. $T \to T^*$ er ikke stærkt kontinuert: $\mathcal{B}(H) \to \mathcal{B}(H)$.

Ved den svage topologi på $\mathcal{B}(H)$ vil vi forstå den svageste topologi, der gør alle afbildninger $T \mapsto (Tx|y)$, $x,y \in H$, kontinuerte $\mathcal{B}(H) \to \mathbb{C}$. En basis for omegne af en operator $S \in \mathcal{B}(H)$ i denne topologi er givet ved mængden af mængder $\{T \in \mathcal{B}(H) \mid |((T-S)x_\nu|y_\nu)| < \varepsilon$ for $\nu = 1,2,\cdots,n\}$, hvor $\varepsilon > 0$, $n \in \mathbb{N}$ og $x_1,y_1,x_2,\cdots,y_n \in H$. Et net $(T_i)_{i\in I}$, $T_i \in \mathcal{B}(H)$ konvergerer mod $T \in \mathcal{B}(H)$ svagt, hvis og kun hvis $(T_i x|y) \to (Tx|y)$ for x og y vilkårlige i H; ved polarisering ses, at det er nok at kræve, at $(T_i x|x) \to (Tx|x)$ for ethvert $x \in H$. Forsynet med svag topologi er $\mathcal{B}(H)$ et topologisk vektorrum. Multiplikation er ikke svagt $\times$ svagt $\to$ svagt kontinuert, heller ikke på normbegrænsede mængder. $T \mapsto T^*$ er en kontinuert afbildning af $\mathcal{B}(H)$ med svag topologi på $\mathcal{B}(H)$ med svag topologi, idet $|((T^*-S^*)x|y)| = |(x|(T-S)y)| = |((T-S)y|x)|$.

<u>Sætning</u>: Enhedskuglen i $\mathcal{B}(H)$ er svagt kompakt.

<u>Bevis</u>: Sæt $C_{(x,y)} = \{z\in\mathbb{C} \mid |z| \leq \|x\|\,\|y\|\}$ for x og $y \in H$. $T \mapsto ((Tx|y))_{(x,y)\in H\times H}$ definerer en homeomorfi af en-

hedskuglen i $\mathcal{B}(H)$ på den afsluttede delmængde

$\{\varphi \in \prod_{(x,y)\in H\times H} C_{(x,y)} \mid \forall \alpha,\beta \in \mathbb{C}$

$\forall x_1,x_2,y_1,y_2 \in H: \varphi_{(\alpha x_1+x_2,y_1)} = \alpha\varphi_{(x_1,y_1)} + \varphi_{(x_2,y_2)} \wedge$

$\varphi_{(x_1,\beta\, y_1+y_2)} = \overline{\beta}\varphi_{(x_1,y_1)} + \varphi_{(x_2,y_2)}\}$ af det kompakte

rum $\prod_{(x,y)\in H\times H} C_{(x,y)}$, jfr. Rudin: Functional Analysis

Ch. 12.8, og Tychonoff's sætning.

Den svage topologi er svagere end den stærke, som igen er svagere end normtopologien.

Vi definerer en partiel ordning $\leq$ på mængden af selvadjungerede operatorer i $\mathcal{B}(H)$ ved: $A \leq B$ når $(Ax|x) \leq (Bx|x)$ for alle $x \in H$. $A \leq B$ gælder, hvis og kun hvis $B - A \geq 0$. Mængden af selvadjungerede operatorer $A \geq 0$ i $\mathcal{B}(H)$ udgør en svagt afsluttet konveks kegle. Hvis $A \leq B$ og $C \in \mathcal{B}(H)$, så er $C^*AC \leq C^*BC$, idet $(C^*ACx|x) = (ACx|Cx) \leq (BCx|Cx) = (C^*BCx|x)$ for ethvert $x \in H$. Af Schwarz' ulighed fås, at $-\|A\| \leq A \leq \|A\|$ for $A = A^* \in \mathcal{B}(H)$.

<u>Lemma</u>: Lad der være givet en operator $B \geq 0$ i $\mathcal{B}(H)$. $B^2 \leq \|B\|B$.

<u>Bevis</u>: Vi kan gerne antage, at $\|B\| = 1$, så $0 \leq B \leq 1$. $B - B^2 = (1-B)B(1-B) + B(1-B)B \geq 0$, så $B^2 \leq B$.

Vi siger, at en delmængde $\mathcal{F}$ af en partielt ordnet mængde $\mathcal{B}$ er opad filtrerende, hvis $\mathcal{F} \neq \emptyset$, og

$$\forall A,B \in \mathcal{F} \quad \exists C \in \mathcal{F} : A \leq C \text{ og } B \leq C,$$

og at $\mathcal{F}$ er opad begrænset i $\mathcal{B}$, hvis

$$\exists D \in \mathcal{B} \ \forall A \in \mathcal{F} : A \leq D.$$

$\mathcal{F}$ er opad filtrerende, hvis og kun hvis $\{\{A \in \mathcal{F} \mid B \leq A\} \mid B \in \mathcal{F}\}$ er en filterbasis.

<u>Sætning</u>: Lad $\mathcal{F}$ være en opad filtrerende mængde af selvadjungerede operatorer i $\mathcal{B}(H)$. Antag, at $\{(Ax|x) \mid A \in \mathcal{F}\}$ er opad begrænset i $\mathbb{R}$ for ethvert $x \in H$. $\mathcal{F}$ har en mindste majorant $D \in \mathcal{B}(H)$. Filterbasen $\{\{A \in \mathcal{F} \mid B \leq A\} \mid B \in \mathcal{F}\}$ konvergerer mod D i den stærke topologi på $\mathcal{B}(H)$.

<u>Bevis</u>: Vælg $A_o \in \mathcal{F}$; sæt $\mathcal{F}_o = \{A \in \mathcal{F} \mid A_o \leq A\}$. For $A \in \mathcal{F}_o$ og $x \in H$ er $-\|A_o\|(x|x) \leq (A_o x|x) \leq (Ax|x)$; så for $x \in H$ er $\{(Ax|x) \mid A \in \mathcal{F}_o\}$ nedad begrænset foruden opad begrænset. Ved polarisering:
$4(Ax|y) = \sum_{\nu=0}^{3} i^\nu (A(x+i^\nu y)|x+i^\nu y)$, findes, at der til x og $y \in H$ eksisterer en konstant $c_{x,y} \in \mathbb{R}$, så at $|(Ax|y)| \leq c_{x,y}$ for alle $A \in \mathcal{F}_o$. Af Banach-Steinhaus' sætning fås, at mængden af funktionaler $y \mapsto (y|Ax)$, $A \in \mathcal{F}_o$, er ensartet begrænset for hvert $x \in H$, d.v.s. for hvert $x \in H$ eksisterer $d_x \in \mathbb{R}$, så at

$\|Ax\| \leq d_x$ for alle $A \in \mathcal{F}_o$. Af Banach-Steinhaus' sætning fås, at der findes $k \in \mathbb{R}$, så at $\|A\| \leq k$ for alle $A \in \mathcal{F}_o$.

Da $\{S \in \mathcal{B}(H) \mid \|S\| \leq k\}$ er svagt kompakt, har filterbasen $\{\{A \in \mathcal{F}_o \mid B \leq A\} \mid B \in \mathcal{F}_o\}$ et fortætningspunkt D i den svage topologi, d.v.s. D tilhører fællesmængden af de svage afslutninger af mængderne $\{A \in \mathcal{F}_o \mid B \leq A\}$, $B \in \mathcal{F}_o$. $\|D\| \leq k$.

For hvert $B \in \mathcal{F}_o$ er $\{S \in \mathcal{B}(H) \mid S = S^*, B \leq S\}$ svagt afsluttet; da $\{A \in \mathcal{F}_o \mid B \leq A\}$ er indeholdt i denne mængde, er også D i mængden, så $B \leq D$. Til ethvert $A \in \mathcal{F}$ findes $B \in \mathcal{F}$, så $A \leq B$ og $A_o \leq B$; da $B \in \mathcal{F}_o$, er $B \leq D$, og $A \leq D$. D er altså en majorant for $\mathcal{F}$.

D tilhører specielt den svage afslutning af $\mathcal{F}$. Hvis $T \in \mathcal{B}(H), T = T^*$, er en majorant for $\mathcal{F}$, så er $\mathcal{F}$ indeholdt i den svagt afsluttede mængde $\{S \in \mathcal{B}(H) \mid S = S^*, S \leq T\}$, så $D \leq T$. D er altså mindste majorant for $\mathcal{F}$.

Til $\varepsilon > 0$, $n \in \mathbb{N}$ og $x_1, x_2, \cdots, x_n \in H$ findes $B \in \mathcal{F}_o$, så at $((D-B)x_\nu \mid x_\nu) \leq \varepsilon$ for $\nu = 1,2,\cdots,n$. For $A \in \{C \in \mathcal{F} \mid B \leq C\}$ og $\nu \in \{1,2,\cdots,n\}$ er $\|(D-A)x_\nu\|^2 = ((D-A)^2 x_\nu \mid x_\nu) \leq \|D-A\|((D-A)x_\nu \mid x_\nu)$ $\leq 2k((D-B)x_\nu \mid x_\nu) \leq 2k\varepsilon$. Så filterbasen $\{\{A \in \mathcal{F} \mid B \leq A\} \mid B \in \mathcal{F}\}$ konvergerer mod D i den stærke topologi.

D er den eneste majorant for $\mathcal{F}$, der tilhører den svage afslutning af $\mathcal{F}$.

Specielt gælder, at en opad begrænset, voksende følge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ af selvadjungerede operatorer i $\mathcal{B}(H)$ har en mindste majorant A, og at $A_n x \to Ax$ for alle $x \in H$.

Mængden af (orthogonale) projektioner i $\mathcal{B}(H)$ er lig $\{S \in \mathcal{B}(H) \mid \|Sx\|^2 = (Sx|x) \text{ for alle } x \in H\}$ og dermed stærkt afsluttet. En vilkårlig mængde af projektioner har en mindste majorant indenfor mængden af projektioner, nemlig projektionen på det mindste afsluttede underrum, der indeholder alle værdirummene for de enkelte projektioner.

En opad filtrerende mængde af projektioner er opad begrænset, af 1, og har derfor en mindste majornat D indenfor mængden af selvadjungerende operatorer $\in \mathcal{B}(H)$. Da D tilhører den stærke afslutning af den givne mængde af projektioner, er D en projektion, så D er også den mindste majorant inden for mængden af projektioner.

Lad $(E_i)_{i\in I}$ betegne en familie af parvis orthogonale projektioner. Med $\sum_{i\in I} E_i$ betegnes projektionen på det mindste afsluttede underrum, der indeholder alle rummene $E_i H$, $i \in I$. Familien af summer af endelige delfamilier er opad filtrerende, og den tilsvarende filterbasis konvergerer strækt mod $\sum_{i\in I} E_i$. Hvis

I er numerabel, og $n \mapsto i_n$ er en vilkårlig bijektiv afbildning af $\mathbb{N}$ på I, er den mindste majorant for familien $(E_i)_{i \in I}$ lig med den mindste majorant for den voksende følge $(\sum_{\nu=1}^{n} E_i)_{n \in \mathbb{N}}$, idet enhver endelig delmængde af I er indeholdt i en mængde af form $\{i_1, i_2, \cdots, i_n\}$, $n \in \mathbb{N}$. $\sum_{\nu=1}^{n} E_i$ konvergerer derfor ubetinget mod $\sum_{i \in I} E_i$ i den stærke topologi for $n \to \infty$.

§ 6. Definition af projektionsmål.

Lad der være givet et rum Ω med en fremhævet σ-algebra $\mathcal{M}$ af delmængder, et Hilbertrum H, og en afbildning $E: \mathcal{M} \to \mathcal{B}(H)$.

I Rudin: Functional Analysis, Ch. 12.7 fastlægges begrebet opløsning af én ved følgende betingelser:

(a) $E(\emptyset) = 0$, $E(\Omega) = 1$.

(b) $\forall M \in \mathcal{M}$: $E(M)$ er en (orthogonal) projektion.

(c) $\forall M,N \in \mathcal{M}$: $E(M \cap N) = E(M)E(N)$.

(d) $\forall M,N \in \mathcal{M}$: $M \cap N = \emptyset \Rightarrow E(M \cup N) = E(M) + E(N)$

(e) $\forall x,y \in H$: $M \mapsto E_{x,y}(M) = (E(M)x|y)$ definerer et mål $E_{x,y}$ på $\mathcal{M}$.

Af (e) følger (d), idet $(E(M \cup N)x|y) = E_{x,y}(M \cup N) = E_{x,y}(M) + E_{x,y}(N) = ((E(M)+E(N)x|y)$ for $M,N \in \mathcal{M}$, $M \cap N = \emptyset$, $x,y \in H$. Af (d) følger, at $E(\emptyset) = 2E(\emptyset)$, så $E(\emptyset) = 0$.

<u>Lemma</u>: Når E,F og $E + F$ er idempotenter, er $EF = FE = 0$.

<u>Bevis</u>: Af $E + F = (E+F)(E+F) = E + EF + FE + F$ fås $EF = - FE$ og $EF = EEF = - EFE = FEE = FE$, så $2EF = 0$, og $EF = FE = 0$.

(b) og (d) medfører (c): Antag først, at M og N er disjunkte mængder i $\mathcal{M}$; da $E(M)$ og $E(N)$ og

$E(M) + E(N) = E(M \cup N)$ er projektioner, er $E(M)E(N) = 0 = E(M \cap N)$. For M og N vilkårlige i $\mathcal{M}$ fås: $E(M)E(N) = (E(M \setminus N) + E(M \cap N))(E(N \setminus M) + E(M \cap N)) = E(M \cap N)$.

Man kan i stedet bruge følgende betingelser:

(1) $E(\Omega) = 1$,

(2) $\forall M \in \mathcal{M}: E(M) \geq 0$,

(3) For en vilkårlig følge $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ af parvis disjunkte mængder i $\mathcal{M}$ er $E(\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n) = \sum_{n=1}^{\infty} E(M_n)$, hvor summen er konvergent i den stærke topologi på $\mathcal{B}(H)$,

(4) $\forall M \in \mathcal{M}: E(M) = E(M)^2$,

eller lige så godt betingelserne (1) og (4) sammen med

(5) $\forall x \in H: M \mapsto E_{x,x}(M) = (E(M)x|x)$ definerer et positivt mål $E_{x,x}$ på $\mathcal{M}$.

Det er klart, at (a) medfører (1), og at (b) er ækvivalent med (2) og (4).

(e) og(2) medfører (5), og omvendt ved polarisering.

(5) medfører (3): Lad $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ være en følge af parvis disjunkte mængder i $\mathcal{M}$. Da $E(M) \geq 0$ for

$M \in \mathcal{M}$, og da $\bigcup_{n=1}^{K} M_n$ og $\bigcup_{n=K+1}^{\infty} M_n$ er disjunkte mængder i $\mathcal{M}$ med foreningsmængde $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ for $K \in \mathbb{N}$, er

$$E(\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n) = E(\bigcup_{n=1}^{K} M_n)+E(\bigcup_{n=K+1}^{\infty} M_n) \geq \sum_{n=1}^{K} E(M_n) \quad \text{for } K \in \mathbb{N}.$$

$\sum_{n=1}^{K} E(M_n) \to E(\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n)$ i den svage topologi på $\mathcal{B}(H)$, idet $(E(\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n)x|x) = \sum_{n=1}^{\infty} E_{x,x}(M_n) = \sum_{n=1}^{\infty} (E(M_n)x|x)$. Derfor er $E(\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n)$ mindste majorant for følgen $(\sum_{n=1}^{K} E(M_n))_{K\in\mathbb{N}}$, og $E(\sum_{n=1}^{\infty} M_n) = \sum_{n=1}^{\infty} E(M_n)$, hvor summen er stærkt konvergent.

(2) og (3) medfører (5): Hvis vi i (3) sætter $M_n = \emptyset$ for alle n, fås $E(\emptyset) = \sum_{n=1}^{\infty} E(\emptyset)$, så $E(\emptyset) = 0$. Sættes $M_n = \emptyset$ for $n > 2$, fås (d). Da rækken i (3) konvergerer svagt, fås, at for $x \in H$ er

$$E_{x,x}(\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n) = (E(\sum_{n=1}^{\infty} M_n)x|x) = \sum_{n=1}^{\infty} (E(M_n)x|x) = \sum_{n=1}^{\infty} E_{x,x}(M_n).$$

Da $E_{x,x}(M) \geq 0$, er $E_{x,x}$ et positivt begrænset mål på Ω for ethvert $x \in H$, med $E_{x,x}(\Omega) \leq \|x\|^2$.

De ønskede ækvivalenser af betingelser fås nu ved sammenfatning af det ovenstående.

En opspaltning af én kaldes også et spektralmål eller et projektionsmål. En afbildning E, der opfylder (2) og (3), kaldes et positivt operator mål.

For simple funktioner og, ved norm grænseovergang, for begrænsede målelige funktioner f på Ω er

$((\int_\Omega f dE)x|x) = \int_\Omega f dE_{x,x}$ for hvert $x \in H$.

Antag nu, at Ω er et kompakt Hausdorff rum, og lad $\mathcal{M}$ betegne mængden af Borelmængder i Ω. Et Radon positivt operator mål på $\mathcal{M}$ et et positivt operator mål E, der også opfylder

$$\forall B \in \mathcal{M}: E(B) = \sup\{E(K) \mid K \text{ kompakt}, K \subseteq B\}.$$

E er et Radon positivt operator mål, hvis og kun hvis alle målene $E_{x,x}$, $x \in H$, er Radon mål.

Lad der nu være givet et kompakt Hausdorff rum Δ, et Hilbert rum H og en lineær afbildning $\phi: C(\Delta) \to \mathcal{B}(H)$, der opfylder

$$\forall f \in C(\Delta): f \geq 0 \Rightarrow \phi(f) \geq 0.$$

ϕ opfylder da også: $\forall f \in C(\Delta): \phi(\overline{f}) = \phi(f)^*$.

Der findes ét Radon positivt operator mål E på mængden $\mathcal{B}$ af Borelmængder i Δ med egenskaben

$$\forall f \in C(\Delta): \phi(f) = \int_\Delta f \, dE.$$

<u>Bevis</u>: $f \mapsto (\phi(f)x|x)$ er en positiv lineær funktional på $C(\Delta)$ og bestemmer derfor ét Radon mål $\mu_{x,x}$ på $\mathcal{B}$.

Et Radon positivt operator mål, der opfylder de ønskede betingelser, opfylder også

$$\int_\Delta f \, d\, E_{x,x} = ((\int_\Delta f \, d\, E)x|x) = (\phi(f)x|x) = \int_\Delta f \, d\mu_{x,x}$$

for alle $f \in C(\Delta)$ og $x \in H$, så $E_{x,x} = \mu_{x,x}$, og E er entydigt bestemt.

Definer $E(K) = \inf\{\phi(f) | f \in C(\Delta),\ f \geq 1_K\}$ for K kompakt $\subset \Delta$, og $E(B) = \sup\{E(K) | K$ kompakt, $K \subseteq B\}$ for $B \in \mathcal{B}$. $E(B) \geq 0$ for hvert B, og for hvert $x \in H$ er

$\mu_{x,x}(K) = \inf\{(\phi(f)x|x) | f \in C(\Delta),\ f \geq 1_K\} = (E(K)x|x)$ for K kompakt, og $\mu_{x,x}(B) = \sup\{\mu_{x,x}(K) | K \subseteq B, K$ kompakt$\}$ $= \sup\{(E(K)x|x) | K$ kompakt, $K \subseteq B\} = (E(B)x|x)$ for $B \in \mathcal{B}$, så $E_{x,x} = \mu_{x,x}$ er et Radon mål for hvert $x \in H$.

Derfor er E et Radon positivt operator mål, og for $f \in C(\Delta)$ er $((\int_\Delta f \, d\, E)x|x) = \int_\Delta f \, d\, E_{x,x} = \int_\Delta f \, d\mu_{x,x}$ $= (\phi(f)x|x)$, så $\int_\Delta f \, d\, E = \phi(f)$.

Hvis ϕ også opfylder

$\forall f,g \in C(\Delta)$: $\phi(fg) = \phi(f)\phi(g)$, og

$\phi(1) = 1$,

så er E et projektionsmål.

Det er åbenbart nok at vise, at $E(K)^2 = E(K)$ for K kompakt. Lad $\varepsilon > 0$ og $x \in H$ være givne; vælg $f \in C(\Delta)$, $1_K \leq f \leq 1$, så at

$$\|(\phi(g)-E(K))x\| \leq \varepsilon \quad \text{og} \quad \|(\phi(g)-E(K))E(K)x\| \leq \varepsilon$$

for $g \in C(\Delta)$, $1_K \leq g \leq f$. Af $E(K)^2 - E(K) =$ $E(K)^2-\phi(f)^2 + \phi(f^2) - E(K) = (E(K)-\phi(f))E(K)$ $+ \phi(f)(E(K) - \phi(f)) + \phi(f^2) - E(K)$ og $1_K \leq f^2 \leq f \leq 1$ fås $\|(E(K)^2-E(K))x\| \leq \|(E(K)-E(f))E(K)x\|$ $+ \|\phi(f)\|\|(E(K)-\phi(f))x\| + \|(\phi(f^2)-E(K))x\| \leq 3\varepsilon$.

($\|\phi(g)\| \leq 1$ for $\|g\| \leq 1$, da $\|\phi(g)y\|^2 - (\phi(\overline{g}\, g)y|y) \leq (\phi(|g|^2)y|y) + (\phi(1-|g|^2)y|y) = \|y\|^2$ for $y \in H$). Derfor er $E(K)^2x = E(K)x$ for ethvert $x \in H$.

§ 7. Spektret for en normal begrænset operator.

Lad der være givet en mængde Ω, en σ algebra $\mathcal{M}$ af delmængder af Ω, et Hilbertrum H og et projektionsmål $E: \mathcal{M} \to \mathcal{B}(H)$. Sæt $\Psi(f) = \int_\Omega f d E$ for $f \in \mathcal{L}^\infty(E)$. Idet målet $B \mapsto (E(B)x|x)$, $B \in \mathcal{M}$, betegnes $E_{x,x}$, er $\int_\Omega f d E_{x,x} = (\psi(f)x|x)$ for $f \in \mathcal{L}^\infty(E)$, $x \in H$.

<u>Lemma</u>: For $\mathcal{U} \in \mathcal{M}$ og $x \in H$ gælder: $x \in E(\mathcal{U})H$ hvis og kun hvis $E_{x,x}$ er koncentreret i $\mathcal{U}$.

<u>Bevis</u>: $E_{x,x}(\Omega \setminus \mathcal{U}) = ((1-E(\mathcal{U}))x|x) = \|(1-E(\mathcal{U})x\|^2$, så $E_{x,x}(\Omega \setminus \mathcal{U}) = 0$ hvis og kun hvis $x = E(\mathcal{U})X$.

<u>Korollar</u>: For $f \in \mathcal{L}^\infty(E)$ og $\lambda \in \mathbb{C}$ gælder

$$E(f^{-1}(\lambda))H = (\psi(f)-\lambda)^{-1}(0).$$

<u>Bevis</u>: $x \in E(f^{-1}(\lambda))H$ hvis og kun hvis $E_{x,x}$ er koncentreret i $f^{-1}(\lambda)$, og dette gælder, hvis og kun hvis

$$0 = \int_\Omega |f-\lambda|^2 d E_{x,x} = (\psi((\overline{f}-\overline{\lambda})(f-\lambda))x|x) = \|(\psi(f)-\lambda)x\|^2 .$$

<u>Lemma</u>: Et positivt begrænset mål μ på Ω er koncentreret i $\{\omega \in \Omega \mid |f(\omega)-c| \leq r\}$, hvis og kun hvis der findes $K > 0$, så $\int_\Omega |f(\omega)-c|^{2n} d\mu(\omega) \leq Kr^{2n}$ for alle $n \in \mathbb{N}$.

<u>Bevis</u>: Sæt $\mathcal{V}_\varepsilon = \{\omega \in \Omega \mid |f(\omega)-c| \geq r+\varepsilon\}$, $\varepsilon > 0$;
hvis $\int_\Omega |f-c|^{2n} d\mu \leq Kr^{2n}$ for alle n, så er
$(r+\varepsilon)^{2n}\mu(\mathcal{V}_\varepsilon) \leq \int_{\mathcal{V}_\varepsilon} |f-c|^{2n} d\mu \leq Kr^{2n}$ for alle $n \in \mathbb{N}$
og $\varepsilon > 0$, så $\mu(\mathcal{V}_\varepsilon) = 0$ for alle $\varepsilon > 0$, og μ er
koncentreret i $f^{-1}(\{z \in \mathbb{C} \mid |z-c| \leq r\})$. Den omvendte
implikation er triviel, med $K = \mu(\Omega)$.

<u>Korollar</u>: Sæt $D(c,r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-c| \leq r\}$, $c \in \mathbb{C}$,
$r \geq 0$. For $f \in \mathcal{L}^\infty(E)$ og $x \in H$ gælder:
$x \in E(f^{-1}(D(c,r)))$ hvis og kun hvis der findes $K > 0$,
så at $\|(\psi(f)-c)^n x\| \leq Kr^n$ for alle $n \in \mathbb{N}$.

<u>Bevis</u>: $x \in E(f^{-1}(D(c,r)))H$ hvis og kun hvis $E_{x,x}$ er
koncentreret i $f^{-1}(D(c,r))$, og dette gælder, hvis og
kun hvis der findes $K > 0$, så
$\|(\psi(f)-c)^n x\|^2 = \int_\Omega |f-c|^{2n} d\, E_{x,x} \leq Kr^{2n}$ for alle n.

<u>Sætning (Fuglede)</u>: Lad $N \in \mathcal{B}(H)$ være en normal operator. Enhver operator $B \in \mathcal{B}(H)$, der kommuterer med N, kommuterer også med N^*.

<u>Bevis</u>: Lad N have spektralfremstillingen $N = \int_{\mathbb{C}} z \, d\, E$,
hvor E er et projektionsmål på $\mathbb{C}$, koncentreret på
$\sigma(N)$. Sæt $D(c,r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-c| \leq r\}$ for $c \in \mathbb{C}$,
$r > 0$; så er $E(D(c,r))H = \{x \in H \mid \exists K > 0, \forall n \in \mathbb{N}:$
$\|(N-c)^n x\| \leq Kr^n\}$. For $x \in E(D(c,r))H$ er

$\|(N-c)^n Bx\| \leq \|B\| \|(N-c)^n x\| \leq \|B\| Kr^n$, så $Bx \in E(D(c,r))H$. Sæt R lig mængden af Borelmængder $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$, for hvilke $BE(\mathcal{U})H \subseteq E(\mathcal{U})H$; hvis $\mathcal{U}_1$ og $\mathcal{U}_2 \in R$, er $\mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2 \in R$, idet $x \in E(\mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2)H$ kan skrives $x = x_1 + x_2$, hvor $x_1 \in E(\mathcal{U}_1)H$ og $x_2 \in E(\mathcal{U}_2 \setminus \mathcal{U}_1)H$, så $Bx \in E(\mathcal{U}_1)H + E(\mathcal{U}_2)H \subseteq E(\mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2)H$; hvis $(\mathcal{U}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ er en voksende følge af mængder i R, er $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{U}_n \in R$, idet $B \bigcup_{n=1}^{\infty} E(\mathcal{U}_n)H \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} E(\mathcal{U}_n)H$ og $\bigcup_{n=1}^{\infty} E(\mathcal{U}_n)H$ er tæt i $E(\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{U}_n)H$. R indeholder alle afsluttede cirkelskiver, derfor også alle åbne cirkelskiver og alle åbne mængder i $\mathbb{C}$; specielt er $\mathbb{C} \setminus D(c,r) \in R$ for $c \in \mathbb{C}$, $r > 0$, så $B[(E(D(c,r))H)^{\perp}] \subseteq (E(D(c,r))H)^{\perp}$, og B kommuterer med $E(D(c,r))$. Mængden af Borelmængder $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$, for hvilke $E(\mathcal{U})$ kommuterer med B, er en σ-algebra; da den indeholder alle afsluttede cirkelskiver, indeholder den alle Borelmængder i $\mathbb{C}$. B kommuterer da også med $\int_{\mathbb{C}} f dE$ for enhver Borelfunktion f på $\mathbb{C}$, der er begrænset på $\sigma(N)$, specielt med $\int_{\mathbb{C}} \bar{z}\, d\, E = N^*$.

<u>Sætning: (H. Weyl)</u>: Lad $N \in \mathcal{B}(H)$ være en normal operator. $\lambda \in \mathbb{C}$ er et fortætningspunkt for $\sigma(N)$ eller en egenværdi for N af uendelig multiplicitet, hvis og kun hvis der findes en orthonormal følge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ af vektorer i H, for hvilken $(N-\lambda)x_n \to 0$.

<u>Bevis</u>: Hvis λ er egenværdi for N med uendelig multiplicitet, kan vi vælge alle x_n i det tilsvarende egenrum.

Antag λ er fortætningspunkt for $\sigma(N)$. Antag N har spektralfremstillingen $N = \int_{\sigma(N)} z dE$; projektionsmålet E på $\sigma(N)$ har da støtte $\sigma(N)$. Sæt $\mathcal{U}_n = \{z \in \sigma(N) \mid 2^{-n-1} \leq |z-\lambda| < 2^{-n}\}$ for $n \in \mathbb{N}$; så er $\sum_{n=N}^{\infty} E(\mathcal{U}_n) = E(\{z \in \sigma(N) \mid 0 \neq |z-\lambda| < z^{-N}\}) \neq 0$ for ethvert $N \in \mathbb{N}$. Vi kan derfor vælge en delfølge $(\mathcal{U}_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, så $E(\mathcal{U}_{n_k}) \neq 0$ for alle k. Vælg for hvert $k \in \mathbb{N}$ en enhedsvektor $x_k \in E(\mathcal{U}_{n_k})H$; $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ er en orthonormal følge, og da $|z-\lambda|^2 1_{\mathcal{U}_{n_k}} \leq 2^{-2n_k} 1_{\mathcal{U}_{n_k}}$ for $z \in \sigma(N)$,

er $\|(N-\lambda)x_k\|^2 = \int_{\sigma(N)} |z-\lambda|^2 1_{\mathcal{U}_{n_k}} d\, E_{x_k,x_k} \leq 2^{-2n_k} \to 0$

for $k \to \infty$.

Antag nu, at der findes en orthonormal følge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i H, så $(N-\lambda)x_n \to 0$. Så har $N-\lambda$ ingen begrænset invers, d.v.s. $\lambda \in \sigma(N)$, og H er uendelig dimentionalt. Antag, at λ ikke er fortætningspunkt for $\sigma(N)$ og ikke egenværdi med uendelig multiplicitet. Da λ er et isoleret punkt i $\sigma(N)$, er λ egenværdi. λ har endelig multiplicitet, så $\sigma(N) \setminus \{\lambda\} \neq \emptyset$. Lad

$\delta > 0$ betegne afstanden fra λ til $\sigma(N)\setminus\{\lambda\}$.

$E(\{\lambda\})x_n \to 0$, da $E(\{\lambda\})H$ har endelig dimension og $(E(\{\lambda\})x_n|y) = (x_n|y) \to 0$ for $y \in E(\{\lambda\})H$. Da x_n ikke konvergerer mod 0, vil $E(\sigma(N)\setminus\{\lambda\})x_n$ ikke konvergere mod 0; men $\|(N-\lambda)x_n\|^2 = \|(N-\lambda)E(\sigma(N)\setminus\{\lambda\})x_n\|^2 \geqq$ $\geq \delta^2 \|E(\sigma(N)\setminus\{\lambda\})x_n\|^2$.

<u>Korollar</u>: Lad $N \in \mathcal{B}(H)$ være normal.

$$\|N\| = \sup_{\|x\|\leq 1} |(Nx|x)|.$$

<u>Bevis</u>: Da $\|N\| = \rho(N) = \sup_{\lambda\in\sigma(N)} |\lambda|$, findes $\lambda \in \sigma(N)$ med $|\lambda| = \|N\|$. Hvis λ er egenværdi, er $|\lambda| \leqq \sup_{\|x\|\leq 1} |(Nx|x)|$. Ellers er λ fortætningspunkt, og $\lambda = \lim_{n\to\infty}(Nx_n|x_n)$ for passende orthonormal følge, så $|\lambda| \leqq \sup_{\|x\|\leq 1} |(Nx|x)|$.
$|(Nx|x)| \leqq \|N\|$ for $\|x\| \leqq 1$ ifølge Cauchy-Schwarz' ulighed.

<u>Sætning</u>: Lad der være givet en operator $T \in \mathcal{B}(H)$. Følgende betingelser er ækvivalente

1) T er kompakt

2) Enhver begrænset følge har en delfølge, hvis billedfølge er konvergent.

3) For enhver svagt konvergent følge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ er $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ stærkt konvergent.

4) For enhver orthonormal følge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vil $Tx_n \to 0$.

5) Der findes to orthonormale følger $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ og $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ og en følge $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ af tal, med $\lambda_1 \geqq \lambda_2 \geqq \cdots$ og $\lambda_n \to 0$, så at $Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (x|x_n) y_n$ for $x \in H$.

6) T kan approksimeres i norm med operatorer af endelig rang.

Hvis T er normal, er ovenstående betingelser ækvivalente med

7) $\sigma(T)$ er højst numerabel med 0 som eneste fortætningspunkt, og for $\lambda \in \sigma(T)\setminus\{0\}$ er λ egenværdi med endelig multiplicitet.

8) $T = \sum_n \lambda_n E_n$, hvor (E_n) er en højst numerabel følge af parvis orthogonale projektioner, $E_n H$ er endelig dimensionalt for hvert n, $\lambda_n \to 0$, og summen er konvergent i norm.

<u>Bevis:</u> 1) $\Rightarrow$ 2) er tidligere vist.

2) $\Rightarrow$ 3) Antag $x_n \to x$ svagt. Ifølge Banach-Steinhaus' sætning er følgen begrænset. $Tx_n \to Tx$ svagt, idet $(Tx_n|y) = (x_n|T^*y) \to (x|T^*y) = (Tx|y)$ for ethvert $y \in H$. Enhver stærkt konvergent delfølge af $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ må derfor konvergere mod Tx. Hvis $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ikke konvergerede mod Tx stærkt, ville der findes $\varepsilon > 0$ og en delfølge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, så at $\|Tx - Tx_{n_k}\| \geqq \varepsilon$ for alle $k \in \mathbb{N}$, i modstrid med at $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ har en delfølge, hvis billedfølge konvergerer mod Tx.

3) $\Rightarrow$ 4), da en orthonormal følge konvergerer mod 0 svagt.

4) $\Rightarrow$ 7) for T normal: Hvis $\lambda \in \sigma(T)$ ikke er et isoleret punkt i $\sigma(T)$ og egenværdi af endelig multiplicitet, findes en orthonormal følge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, så at $Tx_n - \lambda x_n \to 0$; da $Tx_n \to 0$ vil $\lambda x_n \to 0$, og $|\lambda| = \|\lambda x_n\| = 0$. For $n \in \mathbb{N}$ er $\{z \in \sigma(T) \mid |z| \geqq n^{-1}\}$ en kompakt mængde uden noget fortætningspunkt, derfor endelig.

7) $\Rightarrow$ 8) Lad $N = \int_{\sigma(N)} z dE$ være spektralfremstillingen af N ; lad $\lambda_1, \lambda_2, \cdots$ betegne egenværdierne ulig nul for N, f.eks. ordnet, så $|\lambda_1| \geqq |\lambda_2| \geqq \cdots$; $\lambda_n \to 0$, eller (λ_n) er en endelig familie, og $\sigma(N) = \{\lambda_n\}$, eller $\sigma(N) = \{\lambda_n\} \cup \{0\}$, og $E(\{\lambda_n\}) = E_n$ projicerer på et endelig dimensionalt underrum af H. Da $\sup_{z\in\sigma(N)} |z - \sum_{n=1}^{M} \lambda_n 1_{\{\lambda_n\}}(z)| \to 0$ for $M \to \infty$, approksimeres N i norm med $\sum_{n=1}^{M} \lambda_n E_n$.

8) $\Rightarrow$ 6), da $\sum_{n=1}^{M} \lambda_n E_n$ er en operator af endelig rang for hvert $M \in \mathbb{N}$.

4) $\Rightarrow$ 5). Lad $T = V|T|$ betegne polar dekompositionen af T ; da $\|Tx\| = \||T|x\|$ for ethvert $x \in H$, opfylder $|T|$ også 4), og har derfor formen beskrevet i 8), med alle egenværdierne i $[0,\infty[$. Vælg en orthonormal følge (x_n) af vektorer i H ved først at vælge en basis for egenrummet svarende til den største egenværdi for $|T|$, dernæst en basis for egenrummet svarende til den næst største egenværdi, o.s.v..

Lad (λ_n) betegne egenværdierne større end nul for $|T|$, idet hver egenværdi er gentaget så ofte, som dens multiplicitet angiver. $|T|$ har da form: $|T|x = \sum_n \lambda_n (x|x_n)x_n$, hvor summen er endelig, eller konvergent i norm. Sæt $Vx_n = y_n$; da V er isometrisk på $|T|H$, og da $x_n = |T|(\lambda_n^{-1}x_n) \in |T|H$, er (y_n) en orthonormal følge. T er givet ved $Tx = V|T|x = \sum_n \lambda_n (x|x_n)y_n$.

5) $\Rightarrow$ 6), idet $\sup_{\|x\| \leq 1} \sum_{n=M}^{\infty} \lambda_n (x|x_n)y_n \|^2 = \sup_{\|x\| \leq 1} \sum_{n=M}^{\infty} \lambda_n^2 |(x|x_n)|^2 \leq \lambda_M^2 \to 0$ for $M \to \infty$.

6) $\Rightarrow$ 1) er tidligere vist.

§ 8. Integration af ubegrænset funktion med hensyn til et projektionsmål.

Lad der være givet en mængde Ω, en σ-algebra $\mathcal{M}$ af delmængder af Ω, et Hilbertrum H, og et projektionsmål $E: \mathcal{M} \to B(H)$. $\phi \mapsto \int_\Omega \phi dE = \psi(\phi)$ er da en homomorfi: $\mathcal{L}^\infty(E) \to B(H)$, og definerer en isometrisk homomorfi: $L^\infty(E) \to B(H)$.

Målet $B \to (E(B)x|x)$, $B \in \mathcal{M}$, betegnes $E_{x,x}$; $\int_\Omega \phi dE_{x,x} = (\psi(\phi)x|x)$ for $\phi \in \mathcal{L}^\infty(E)$, $x \in H$.

Lad f være en målelig kompleks funktion på Ω. Vi kan vælge en følge $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ af funktioner i $\mathcal{L}^\infty(E)$ med egenskaberne

$$\exists\, K > 0 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}: \quad |\phi_n| \leq K$$

$$\phi_n(\omega) \to 1 \quad \text{for } E \text{ næsten alle } \omega \in \Omega$$

$$\forall\, n: \quad f\phi_n \in \mathcal{L}^\infty(E).$$

For eksempel kan vi vælge $\phi_n = 1_{B_n}$, hvor $B_n = \{\omega \in \Omega \mid |f(\omega)| \leq n\}$.

Hvis $\phi \in \mathcal{L}^\infty(E)$, er $\phi \in \mathcal{L}^2(E_{x,x})$ for alle $x \in H$, og $\|\psi(\phi)x - \psi(\phi\phi_n)x\|^2 = \int_\Omega |\phi - \phi\phi_n|^2 dE_{x,x} \to 0$ for $x \in H$, da $|\phi - \phi\phi_n|^2 \to 0$ punktvis næsten overalt, majoriseret af $(1 + K)^2|\phi|^2$. For $\phi = 1$ fås, at $\psi(\phi_n)x \to x$ for $x \in H$.

<u>Lemma</u>: Lad μ være et positivt begrænset mål på Ω; antag, at enhver E nulmængde er en μ nulmængde. $(f\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ er en Cauchy følge i $\mathcal{L}^2(\mu)$, hvis og kun hvis $f \in \mathcal{L}^2(\mu)$, og i givet fald vil $f\phi_n \to f$ i $\mathcal{L}^2(\mu)$.

<u>Bevis</u>: Antag, at der til $\varepsilon > 0$ findes $N \in \mathbb{N}$, så at $\int_\Omega |f\phi_n - f\phi_m|^2 d\mu \leq \varepsilon^2$ for $m, n \geq N$. Ved Fatou's lemma fås, at $f - f\phi_m \in \mathcal{L}^2(\mu)$, så at $f \in \mathcal{L}^2(\mu)$, og at $\int_\Omega |f - f\phi_m|^2 d\mu \leq \varepsilon^2$ for $m \geq N$, så at $f\phi_m \to f$ i $\mathcal{L}^2(\mu)$.

Hvis $f \in \mathcal{L}^2(\mu)$, vil $\int_\Omega |f - f\phi_n|^2 d\mu \to 0$, da $|f - f\phi_n|^2 \to 0$ μ næsten overalt, majoriseret af $(1 + K)^2 |f|^2$.

<u>Korollar</u>: $\{x \in H \mid (\psi(f\phi_n)x)_{n\in\mathbb{N}}$ er konvergent i $H\}$ er lig med $\{x \in H \mid f \in \mathcal{L}^2(E_{x,x})\}$, og for x i denne mængde konvergerer $\psi(f\phi_n)x$ mod et element i H uafhængigt af følgen $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$, med norm $(\int_\Omega |f|^2 dE_{x,x})^{\frac{1}{2}}$.

<u>Bevis</u>: For $x \in H$ og $m, n \in \mathbb{N}$ er $\|\psi(f\phi_n)x - \psi(f\phi_m)x\|^2 = (\psi(f\phi_n - f\phi_m)^*\psi(f\phi_n - f\phi_m)x|x)$ $= \int_\Omega |f\phi_n - f\phi_m|^2 dE_{x,x}$, så $(\psi(f\phi_n)x)_{n\in\mathbb{N}}$ er en Cauchy følge i H, hvis og kun hvis $(f\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ er en Cauchy følge i $\mathcal{L}^2(E_{x,x})$, og hvis og kun hvis $f \in \mathcal{L}^2(E_{x,x})$. I givet fald er normen af grænseværdien for $(\psi(f\phi_n)x)_{n\in\mathbb{N}}$ lig med grænseværdien for $(\|\psi(f\phi_n)x\|)_{n\in\mathbb{N}}$ lig med $(\int_\Omega |f|^2 dE_{x,x})^{\frac{1}{2}}$.

Hvis også $(\phi_n')_{n\in\mathbb{N}}$ opfylder de stillede betingelser, gælder det samme om følgen $\phi_1, \phi_1', \phi_2, \phi_2', \cdots$. For $f \in \mathcal{L}^2(E_{x,x})$ er $(\psi(f\phi_n)x)_{n\in\mathbb{N}}$ og $(\psi(f\phi_n')x)_{n\in\mathbb{N}}$ delfølger af den konvergente følge $\psi(f\phi_1)x, \psi(f\phi_1')x, \psi(f\phi_2)x, \psi(f\phi_2')x, \cdots$, og har derfor samme grænseværdi.

Vi definerer en operator $\psi(f)$ på H ved $\mathcal{D}(\psi(f)) = \{x \in H \mid (\psi(f\phi_n)x)_{n\in\mathbb{N}}$ er konvergent i $H\}$, $\psi(f)x = \lim_{n\to\infty} \psi(f\phi_n)x$ for $x \in \mathcal{D}(\psi(f))$. $\mathcal{D}(\psi(f))$ er et underrum af H og $\psi(f)$ er lineær. Definitionen af $\psi(f)$ afhænger ikke af valget af følgen $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$, og for $f \in \mathcal{L}^\infty(E)$ fås den operator, der også hidtil er betegnet $\psi(f)$. Hvis $f = f_1$ E næsten overalt, er $\psi(f) = \psi(f_1)$, og vi kan gerne definere $\psi(f_1)$ også for en målelig funktion f_1, der kun er defineret E næsten overalt. For $x \in \mathcal{D}(\psi(f))$ er $\|\psi(f)x\|^2 = \int_\Omega |f|^2 dE_{x,x}$.

$\psi(f)$ kommuterer med enhver operator $B \in B(H)$, der kommuterer med enhver operator $E(M)$, $M \in \mathcal{M}$.

<u>Bevis</u>: Antag $B \in B(H)$ kommuterer med enhver operator $\psi(\phi)$, $\phi \in \mathcal{L}^\infty(E)$. For $x \in \mathcal{D}(\psi(f))$ er $\psi(f\phi_n)Bx = B\psi(f\phi_n)x \to B\psi(f)x$, så $Bx \in \mathcal{D}(\psi(f))$ og $\psi(f)Bx = B\psi(f)x$. Det vil sige $B\psi(f) \subseteq \psi(f)B$.

Specielt er $\psi(\phi)\psi(f) \subseteq \psi(f)\psi(\phi)$ for $\phi \in \mathcal{L}^\infty(E)$.

Hvis $\phi \in \mathcal{L}^\infty(E)$ og $\phi f \in \mathcal{L}^\infty(E)$, er $\psi(f)\psi(\phi) = \psi(f\phi)$; thi for $x \in H$ fås $\psi(f\phi_n)\psi(\phi)x = \psi(f\phi\phi_n)x \to \psi(f\phi)x$, så $x \in \mathcal{D}(\psi(f)\psi(\phi))$ og $\psi(f)\psi(\phi)x = \psi(f\phi)x$.

$\psi(f)$ er tæt defineret; thi for $x \in H$ vil $\psi(\phi_n)x \to x$ og $\psi(\phi_n)x \in \mathcal{D}(\psi(f))$, da $\phi_n f \in \mathcal{L}^\infty(E)$.

<u>Lemma</u>: $\psi(\bar{f}) = \psi(f)^*$.

<u>Bevis</u>: $\psi(\bar{f})$ kan defineres ved hjælp af den samme

følge $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Af $\psi(\phi_n)\psi(f) \subseteq \psi(f)\psi(\phi_n) = \psi(f\phi_n)$ for $n \in \mathbb{N}$ fås $\psi(f)^*\psi(\phi_n) \supseteq \psi(\overline{f}\phi_n) = (\psi(f)\psi(\phi_n))^* \supseteq \psi(\phi_n)\psi(f)^*$. For $x \in \mathcal{D}(\psi(f)^*)$ er $\psi(\overline{f}\phi_n)x = \psi(\phi_n)\psi(f)^*x \to \psi(f)^*x$, så $x \in \mathcal{D}(\psi(\overline{f}))$ og $\psi(\overline{f})x = \psi(f)^*x$.

For $x \in \mathcal{D}(\psi(\overline{f}))$ ses, at $\psi(\phi_n)x \to x$ og $\psi(f)^*\psi(\phi_n)x = \psi(f\overline{\phi}_n)x \to \psi(f)x$; da $\psi(f)^*$ er afsluttet, fås $x \in \mathcal{D}(\psi(f)^*)$.

$\psi(f) = \psi(\overline{f})^*$ er således en afsluttet, tæt defineret operator. I øvrigt ses, at grafen for $\psi(f)$ er afslutningen af $\{(\psi(\phi)x, \psi(f\phi)x) \in H \times H \mid x \in H, \phi \in \mathcal{L}^\infty(E), f\phi \in \mathcal{L}^\infty(E)\}$.

Hvis g også er en målelig afbildning $\Omega \to C$, kan vi vælge $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ således, at også $g\phi_n \in \mathcal{L}^\infty(E)$ og $fg\phi_n \in \mathcal{L}^\infty(E)$ for $n \in \mathbb{N}$; for eksempel kan vi vælge ϕ_n som den karakteristiske funktion for $\{\omega \in \Omega \mid |f(\omega)| + |g(\omega)| \leq n\}$.

<u>Lemma</u>: $\psi(f)\psi(g) = \psi(fg)|\mathcal{D}(\psi(fg)) \cap \mathcal{D}(\psi(g))$, og $\psi(fg) = \overline{\psi(f)\psi(g)}$.

<u>Bevis</u>: $\mathcal{D}(\psi(f)\psi(g)) = \{x \in \mathcal{D}(\psi(g)) \mid \psi(g)x \in \mathcal{D}(\psi(f))\} \subseteq \mathcal{D}(\psi(g))$. For $x \in \mathcal{D}(\psi(g))$ er $\psi(f\phi_n)\psi(g)x = \psi(fg\phi_n)x$, så $x \in \mathcal{D}(\psi(f)\psi(g))$, hvis og kun hvis $x \in \mathcal{D}(\psi(g)) \cap \mathcal{D}(\psi(fg))$, og i givet fald fås $\psi(f)\psi(g)x = \psi(fg)x$.

Grafen for $\psi(fg)$ er afslutningen af $\{(\psi(\phi_n)x, \psi(fg\phi_n)x) \in H \times H \mid x \in H, n \in \mathbb{N}\}$, der er indeholdt i grafen for $\psi(f)\psi(g)$, idet $\psi(fg\phi_n) = \psi(f)\psi(g\phi_n) = \psi(f)\psi(g)\psi(\phi_n)$, da $fg\phi_n$ og $g\phi_n$ og

$\phi_n \in \mathcal{L}^\infty(E)$. Da $\psi(fg)$ er afsluttet, fås $\psi(fg) = \overline{\psi(f)\psi(g)}$.

<u>Lemma</u>: $\psi(f) + \psi(g) = \psi(f + g)|\mathcal{D}(\psi(f + g)) \cap \mathcal{D}(\psi(f))$ $= \psi(f+g)|\mathcal{D}(\psi(f+g)) \cap \mathcal{D}(\psi(g))$, og $\psi(f+g) = \overline{\psi(f) + \psi(g)}$.

<u>Bevis</u>: Af $\psi((f+g)\phi_n)x = \psi(f\phi_n)x + \psi(g\phi_n)x$ fås, at $\mathcal{D}(\psi(f+g)) \cap \mathcal{D}(\psi(f)) = \mathcal{D}(\psi(f+g)) \cap \mathcal{D}(\psi(g)) = \mathcal{D}(\psi(f)) \cap \mathcal{D}(\psi(g)) = \mathcal{D}(\psi(f) + \psi(g))$, og at for x i denne mængde er $\psi(f+g)x = \psi(f)x + \psi(g)x$.

Grafen for $\psi(f+g)$ er afslutningen af delmængden $\{(\psi(\phi_n)x, \psi((f+g)\phi_n)x) \in H \times H \mid x \in H, n \in \mathbb{N}\}$ af grafen for $\psi(f) + \psi(g)$.

Specielt ses, at $\psi(f+g) = \psi(f) + \psi(g)$, hvis f eller $g \in \mathcal{L}^\infty(E)$.

En lineær operator N på H kaldes normal, hvis N er afsluttet og tæt defineret, og $N^*N = NN^*$.

<u>Lemma</u>: $\psi(f)$ er normal.

<u>Bevis</u>: $\psi(f)^*\psi(f) = \overline{\psi(f)^*\psi(f)} = \overline{\psi(\overline{f})\psi(f)} = \psi(\overline{f}f)$ $= \psi(f\overline{f}) = \psi(f)\psi(f)^*$.

Hvis f er reel, er $\psi(f)$ jo selvadjungeret.

<u>Lemma</u>: Sæt $B = \{\omega \in \Omega \mid f(\omega) = 0\}$. $E(B)H = \{x \in \mathcal{D}(\psi(f)) \mid \psi(f)x = 0\}$. $\psi(f)$ er injektiv, hvis og kun hvis $f \neq 0$ E næsten overalt, og i givet fald er $\psi(f)^{-1} = \psi(f^{-1})$.

<u>Bevis</u>: Definer g ved $g(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega \in B \\ f(\omega)^{-1}, & \omega \notin B \end{cases}$.

Da $fg = 1 - 1_B$, er $\psi(f)\psi(g) = (1 - E(B))|\mathcal{D}(\psi(g))$ og $\psi(g)\psi(f) = (1 - E(B))|\mathcal{D}(\psi(f))$. Hvis $x \in \mathcal{D}(\psi(f))$ og $\psi(f)x = 0$, så er $0 = \psi(g)\psi(f)x = x - E(B)x$. Hvis $x \in E(B)H$, er $x \in \mathcal{D}(\psi(f))$ og $\psi(f)x = \psi(f)\psi(1_B)x = \psi(f1_B)x = 0$.

$\psi(f)$ er injektiv, hvis og kun hvis $E(B) = 0$, det vil sige hvis og kun hvis $f \neq 0$ E næsten overalt; i givet fald er $g = f^{-1}$ E næsten overalt, og $\psi(f)\psi(g) = 1|\mathcal{D}(\psi(g))$ og $\psi(g)\psi(f) = 1|\mathcal{D}(\psi(f))$, så $\psi(f^{-1}) = \psi(g) = \psi(f)^{-1}$.

<u>Sætning</u>: Spektret $\sigma(\psi(f))$ for $\psi(f)$ er lig med den essentielle værdimængde for f.

<u>Bevis</u>: Antag α tilhører den essentielle værdimængde for f. Hvis $E(\{\omega \in \Omega \mid f(\omega) = \alpha\}) \neq 0$, er $\psi(f-\alpha) = \psi(f) - \alpha$ ikke injektiv, så α er egenværdi for $\psi(f)$, med tilsvarende egenrum $E(\{\omega \in \Omega \mid f(\omega) = \alpha\})H$. Ellers er $E(\{\omega \in \Omega \mid |f(\omega) - \alpha| < \delta\}) \neq 0$ for alle $\delta > 0$, og vi kan vælge en aftagende følge af cirkelskiver $D_n = \{\omega \in \Omega \mid |f(\omega) - \alpha| < \delta_n\}$, med $\delta_n \searrow 0$, så at $E(D_1) \underset{\neq}{>} E(D_2) \underset{\neq}{>} \cdots$ (jfr. s. 31).
Vælg en enhedsvektor $x_n \in (E(D_n) - E(D_{n+1}))H$ for hvert n; da $|(f - \alpha)1_{D_n}| \leq \delta_n$, er $x_n \in \mathcal{D}(\psi(f-\alpha))$ og $\|\psi(f-\alpha)x_n\|^2 \leq \int_{D_n} |f-\alpha|^2 dE_{x_n,x_n} \leq \delta_n^2 \to 0$, så $\psi(f-\alpha)$ har ikke en begrænset invers, og $\alpha \in \sigma(\psi(f))$.

Hvis α ikke tilhører den essentielle værdimængde for f, findes $\delta > 0$, så at $|(f-\alpha)^{-1}| \leq \delta^{-1}$ E

næsten overalt. $\psi((f-\alpha)^{-1}) \in B(H)$ er da invers til $\psi(f-\alpha)$, og $\alpha \notin \sigma(\psi(f))$.

<u>Korollar</u>: $\psi(f) \in B(H)$, hvis og kun hvis $\sigma(\psi(f))$ er begrænset, og hvis og kun hvis f er begrænset E næsten overalt, og hvis og kun hvis $\mathcal{D}(\psi(f)) = H$.

§ 9. Polar opløsning.

Lad der være givet et Hilbertrum H.

En operator V på H kaldes en partiel isometri, hvis der findes et afsluttet underrum K af H med egenskaberne:

$$\forall\, x \in K : \quad \|Vx\| = \|x\| , \quad \text{og}$$

$$\forall\, x \perp K : \quad Vx = 0.$$

K kaldes støtterummet for V.

Lemma: Lad $V \in B(H)$ være givet. Følgende betingelser er ækvivalente:

1) V er en partiel isometri.

1*) V^* er en partiel isometri.

2) $VV^*V = V$ 2*) $V^*VV^* = V^*$

3) V^*V er en projektion. 3*) VV^* er en projektion.

og disse betingelser medfører, at V^*V er projektionen på støtterummet for V og VV^* er projektionen på VH.

Bevis: 1) $\Rightarrow$ 2): Antag V er en partiel isometri med støtterum K; lad E betegne projektionen på K; så er $V = VE$. For $x, y \in H$ er $(V^*Vx|y) = (Vx|Vy) = (VEx|VEy) = (Ex|Ey) = (Ex|y)$, så $V^*V = E$ og $VV^*V = VE = V$.

Det er klart, at 2) og 2*) er ækvivalente, og medfører 3) og 3*).

3*) ⇒ 1*): Antag, at VV^* er en projektion F. Da $\|V^*x\|^2 = (VV^*x|x) = \|Fx\|^2$, er $\|V^*x\| = \|Fx\|$ for $x \in FH$ og $V^*x = 0$ for $x \perp FH$, så V^* er en partiel isometri med støtterum FH.

Og $VH = \overline{VH} = \ker(V^*)^\perp = [(1 - F)H]^\perp = FH$.

<u>Lemma</u>: Lad S og T være to afsluttede, tæt definerede operatorer på H. Hvis $S^*S = T^*T$, så er $\mathcal{D}(S) = \mathcal{D}(T)$ og $\|Sx\| = \|Tx\|$ for $x \in \mathcal{D}(S)$.

<u>Bevis</u>: For $x \in \mathcal{D}(S^*S) = \mathcal{D}(T^*T) \subseteq \mathcal{D}(T)$ er $\|Sx\|^2 = (S^*Sx|x) = (T^*Tx|x) = \|Tx\|^2$. Da S er afslutningen af $S|\mathcal{D}(S^*S)$, kan vi til $x \in \mathcal{D}(S)$ finde en følge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ af vektorer i $\mathcal{D}(S^*S)$, så at $x_n \to x$ og $Sx_n \to Sx$; da $\|Tx_n - Tx_m\| = \|Sx_n - Sx_m\|$ for $m, n \in \mathbb{N}$, er $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en Cauchyfølge, og konvergerer mod en vektor $y \in H$; da T er afsluttet, er $x \in \mathcal{D}(T)$ og $Tx = y$, og $\|Tx\| = \lim_{n\to\infty} \|Tx_n\| = \lim_{n\to\infty} \|Sx_n\| = \|Sx\|$. Tilsvarende ses, at $\mathcal{D}(T) \subseteq \mathcal{D}(S)$.

Den omvendte sætning gælder i øvrigt også.

<u>Sætning</u>: Lad T være en afsluttet, tæt defineret operator på H. Der findes ét par (V, A) af operatorer på H med egenskaberne:

A er en selvadjungeret positiv operator,

V er en partiel isometri med støtterum $\overline{A\mathcal{D}(A)}$,

$T = VA$.

<u>Bevis</u>: Antag (V, A) opfylder disse betingelser.

Så er V^*V projektionen på $\overline{A\mathcal{D}(A)}$, og $V^*VA = V^*T = A$. Derfor er $T^*T = AV^*VA = A^2$, og A er den positive kvadratrod af T^*T. V er entydigt bestemt ved, at $VAx = Tx$ for $x \in H$ og $Vx = 0$ for $x \perp A\mathcal{D}(A)$.

Vi sætter derfor $A = (T^*T)^{\frac{1}{2}}$. Da $A^*A = A^2 = T^*T$, er $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(T)$ og $\|Ax\| = \|Tx\|$ for $x \in \mathcal{D}(A)$; $Ax \mapsto Tx$ er derfor en veldefineret isometrisk afbildning af $A\mathcal{D}(A)$ på $T\mathcal{D}(T)$, og kan udvides til en partiel isometri med støtterum $\overline{A\mathcal{D}(A)}$.

$T = VA$ kaldes polar opløsningen af T.

<u>Korollar</u>: V har støtterum $\overline{T^*\mathcal{D}(T^*)} = \ker(T)^\perp$ og værdirum $\overline{T\mathcal{D}(T)} = \ker(T^*)^\perp$; V^*V er projektionen på $\overline{T^*\mathcal{D}(T^*)}$, og VV^* er projektionen på $\overline{T\mathcal{D}(T)}$.

<u>Bevis</u>: $VH = V\overline{A\mathcal{D}(A)} = \overline{VA\mathcal{D}(A)}$ (da V er kontinuert og VH er afsluttet) $= \overline{T\mathcal{D}(T)}$, og støtterummet for V er $\overline{A\mathcal{D}(A)} = \ker(A^*)^\perp = \ker(A)^\perp = \ker(T)^\perp$.

<u>Lemma</u>: T^* har polar opløsningen $T^* = V^*VAV^*$.

<u>Bevis</u>: Da $T^* = AV^*$, er $(VAV^*)^* = (VT^*)^* = TV^* = VAV^*$, så VAV^* er selvadjungeret. VAV^* er positiv, og da $AV^*V = (V^*VA)^* = A$, er $VAV^*\mathcal{D}(VAV^*) = VA\mathcal{D}(VA) = T\mathcal{D}(T)$ tæt i støtterummet for V^*, og $T^* = V^*VAV^*$.

<u>Lemma</u>: En operator $B \in B(H)$ kommuterer med T og T^*, hvis og kun hvis B kommuterer med V og A.

<u>Bevis</u>: Hvis $BT \subseteq TB$ og $BT^* \subseteq T^*B$, så er $BT^*T \subseteq T^*TB$, og B kommuterer med $(T^*T)^{\frac{1}{2}} = A$. B^* kommuterer med A, idet $B^*A \subseteq (AB)^* \subseteq (BA)^* = AB$. For $x \perp A\mathcal{D}(A)$ og $y \in \mathcal{D}(A)$ er $(Bx|Ay) = (x|B^*Ay) = (x|AB^*y) = 0$, så $Bx \perp A\mathcal{D}(A)$ og $VBx = 0 = BVx$. For $x \in \mathcal{D}(A)$ er $Bx \in \mathcal{D}(A)$ og $BVAx = BTx = TBx = VABx = VBAx$. Derfor er $BV = VB$.

<u>Lemma</u>: Lad N være en normal operator, med polar opløsning $N = VA$. $V^*V = VV^*$ og $N = VA = AV$ og $N^* = V^*A = AV^*$.

<u>Bevis</u>: Da $N^*N = NN^*$, er $\mathcal{D}(N) = \mathcal{D}(N^*)$ og $\|Nx\| = \|N^*x\|$ for $x \in \mathcal{D}(N)$; specielt er $\ker(N) = \ker(N^*)$, så $V^*V = VV^*$ = projektionen på $\ker(N)^{\perp}$. Da N^* har polar opløsningen $N^* = V^*VAV^*$, og $(NN^*)^{\frac{1}{2}} = (N^*N)^{\frac{1}{2}} = A$, er $A = VAV^*$ og $V^*A = V^*VAV^* = AV^* = N^*$, og $N = VA = AV$.

<u>Lemma</u>: Lad N være en normal operator på H. Der findes et kompakt rum Δ, et projektionsmål F på Δ, og en målelig funktion n på Δ, så at $N = \int_{\Delta} n dF$.

<u>Bevis</u>: Lad $N = VA$ være polar opløsningen af N. Lad A betegne del C*-algebraen af $B(H)$ frembragt af 1 og V og $(A - i)^{-1}$. A er kommutativ. Lad Δ betegne spektret for A, og lad Φ betegne den inverse afbildning til Gelfand transformeringen på A.

Der findes ét Radon projektionsmål F på Δ, så at $\Phi(f) = \int_\Delta f\, dF$ for $f \in C(\Delta)$. Lad v betegne den Gelfand-transformerede til V og g den Gelfand-transformerede til $(A - i)^{-1}$. Da $\Phi(g) = (A - i)^{-1}$ er injektiv, er $g \neq 0$ F næsten overalt og $\int_\Delta (g^{-1} + i)dF = (A - i) + i = A$. Sæt $n = v(g^{-1} + i)$; $\int_\Delta n\, dF = \overline{\int_\Delta v\, dF \int_\Delta (g^{-1} + i)\, dF} = \overline{VA} = N$.

<u>Sætning</u>: Lad N være en normal operator på et Hilbertrum H. Der findes ét projektionsmål E på $\sigma(N)$, for hvilket $\int_{\sigma(N)} z\, dE = N$.

<u>Bevis</u>: Med betegnelser som i ovenstående lemma er $N = \int_\Delta n\, dF$; $\sigma(N)$ er den essentielle værdimængde for n, og vi kan gerne vælge n, så at $n(\Delta) \subseteq \sigma(N)$. E defineres nu som billedmålet af F ved n: $E(M) = F(n^{-1}(M))$ for en Borelmængde M i $\sigma(N)$; så er $\int_{\sigma(N)} f\, dE = \int_\Delta f \circ n\, dF$ for enhver målelig funktion f på $\sigma(N)$. Specielt er $\int_{\sigma(N)} z\, dE = \int_\Delta n\, dF = N$.

Antag E er et projektionsmål på $\sigma(N)$, for hvilket $\int_{\sigma(N)} z\, dE = N$. Lad f betegne funktionen $z \mapsto \frac{z}{1 + |z|}$ på $\sigma(N)$. f er en injektiv begrænset kontinuert afbildning: $\sigma(N) \to \mathbb{C}$; lad g betegne den omvendte afbildning. Lad E' betegne billedmålet af E ved f. E' er da det entydigt bestemte projektionsmål for den begrænsede normale operator $f(N)$. Lad E'' betegne billedmålet af E' ved g. For en Borelmængde $M \subseteq \sigma(N)$ er $E''(M) = E'(g^{-1}(M)) = E(f^{-1} \circ g^{-1}(M)) = E(M)$. E er således entydigt bestemt.

En operator $B \in B(H)$ kommuterer med værdimængden for E, hvis og kun hvis B kommuterer med N og N^*, og hvis og kun hvis B kommuterer med N, jfr. side 47 (beviset tilpasset let til det ubegrænsede tilfælde).

§ 10. Stone's sætning.

Lad der være givet et Hilbertrum H.

Ved en unitær repræsentation af en topologisk gruppe G på H vil vi forstå en kontinuert homomorfi af G ind i gruppen af unitære operatorer på H, forsynet med stærk topologi.

Det er iøvrigt let at vise, at stærk og svag topologi har samme spor på gruppen af unitære operatorer, og at denne forsynet med hin topologi er en topologisk gruppe.

Sætning: Lad der være givet en selvadjungeret operator A på Hilbertrummet H. For $t \in \mathbb{R}$ er e^{itA} en unitær operator på H; $t \mapsto e^{itA}$ er en unitær repræsentation af $\mathbb{R}$ på H.

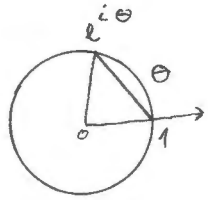
$\mathcal{D}(A) = \{x \in H \mid (\frac{e^{itA}x - x}{it})$ er konvergent for $t \to 0^+\}$,

og $Ax = \lim\limits_{t\to 0^+} \frac{e^{itA}-1}{it}x$ for $x \in \mathcal{D}(A)$.

Bevis: Lad $A = \int_{\sigma(A)} s\, dE(s)$ være spektralfremstillingen af A. $e^{itA} = \int_{\sigma(A)} e^{its}\, dE(s)$ er unitær, da $|e^{ist}| = 1$ for $s \in \sigma(A)$, $t \in \mathbb{R}$. Da $e^{its}\cdot e^{ius} = e^{i(t+u)s}$, er $t \mapsto e^{itA}$ en homomorfi.

For $x \in H$ er $\| e^{i(t+h)A}x - e^{itA}x\|^2 = \| e^{ihA}x - x\|^2$

$= \int_{\sigma(A)} |e^{ihs} - 1|^2\, dE_{x,x}(s) \to 0$ for $h \to 0$, da $e^{ihs} - 1 \to 0$ punktvis, majoriseret af 2.



Bemærk, at $|e^{i\theta} - 1| \leq \theta$.

Lad $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ være en vilkårlig talfølge i $]0, \infty[$, der konvergerer mod 0. Sæt $\phi_n(s) = \frac{e^{it_n s} - 1}{it_n s}$ for

$s \neq 0$, $\phi_n(0) = 1$, $n \in \mathbb{N}$.
$|\phi_n| \leq 1$ for $n \in \mathbb{N}$, $\phi_n(s) \to 1$ for ethvert s, og $|s\phi_n(s)| \leq \frac{2}{t_n}$ for $n \in \mathbb{N}$, $s \in \sigma(A)$. Derfor er $\mathcal{D}(A) = \{x \in H \mid (\frac{e^{it_nA} - 1}{it_n} x)$ er konvergent for $n \to \infty\}$ og for $x \in \mathcal{D}(A)$ er Ax grænseværdien (jfr. s.54-55). Da dette gælder for ethvert valg af $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$, fås sætningen.

Vi minder om, at en algebra A uden ételement kan indlejres i en algebra $\tilde{A} = A \oplus \mathbb{C}1$ med ételement, og at vi for $x \in A$ definerer $\sigma'_A(x) = \sigma_{\tilde{A}}(x)$.

<u>Lemma</u>: Lad der være givet en homomorfi π af en algebra A ind i en algebra B. For $x \in A$ er $\sigma'_B(\pi(x)) \subseteq \sigma'_A(x)$.

<u>Bevis</u>: Vi kan gerne antage, at B har et ételement. Hvis A har et ételement, er $\pi(1)$ en idempotent $e \in B$, og $\pi(z) = e\pi(z)e$ for $z \in A$; hvis $\lambda \notin \sigma_A(x) \cup \{0\}$, er $\pi((x - \lambda)^{-1}) - \lambda^{-1}(1 - e)$ invers til $\pi(x) - \lambda = \pi(x - \lambda) - \lambda(1 - e)$. Hvis A ikke har et ételement, udvider vi π til en homomorfi $\tilde{\pi}: \tilde{A} \to B$ med $\tilde{\pi}(1) = 1$ og bruger det foregående.

Vi minder om, at ko Fourier transformering er en homomorfi $f \mapsto \hat{f}$ af $L^1(\mathbb{R})$ på en tæt delalgebra af $C_o(\mathbb{R})$, og at $\widehat{f^*} = \overline{\hat{f}}$ og $(\tau(s)f)\hat{}\,(\lambda) = e^{is\lambda}\hat{f}(\lambda)$. Hvis $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ er en approksimativ enhed i $L^1(\mathbb{R})$, som s.25, er $\|\hat{\phi}_n\|_\infty \leq \|\phi_n\|_1 = 1$ for alle n, og $\hat{\phi}_n(\lambda) \to 1$ for $\lambda \in \mathbb{R}$, da $\hat{\phi}_n\hat{f} \to \hat{f}$ ligeligt for

hvert $f \in L^1(\mathbb{R})$.

<u>Stone's sætning</u>: Lad U være en unitær repræsentation af $\mathbb{R}$ på Hilbertrummet H. Der findes én selvadjungeret operator A på H, så at $U(t) = e^{itA}$ for $t \in \mathbb{R}$.

<u>Bevis</u>: Entydigheden følger af det foregående.

Da U er svagt kontinuert og afbilder ind i enhedskuglen i $B(H)$, der er konveks og svagt kompakt, kan U integreres med hensyn til ethvert begrænset mål μ på $\mathbb{R}$; sæt $\pi(\mu) = \int_{\mathbb{R}} U(s)d\mu(s)$; $\pi(\mu)$ er bestemt ved, at $(\pi(\mu)x|y) = \int_{\mathbb{R}} (U(s)x|y)d\mu(s)$ for $x, y \in H$. π er en $*$-homomorfi af foldningsalgebraen $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ af begrænsede mål på $\mathbb{R}$ ind i $B(H)$; f.eks. er $(\pi(\mu * \nu)x|y) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} (U(s+t)x|y)d\mu(s)d\nu(t) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} (U(s)U(t)x|y)d\mu(s)d\nu(t) = \int_{\mathbb{R}} (\pi(\mu)U(t)x|y)d\nu(t) = \int_{\mathbb{R}} (U(t)x|\pi(\mu)^*y)d\nu(t) = (\pi(\nu)x|\pi(\mu)^*y)$, så $\pi(\mu * \nu) = \pi(\mu)\pi(\nu)$, og $(\pi(\mu^*)x|y) = \overline{\int_{\mathbb{R}} (U(-s)x|y)d\mu(s)} = \overline{\int_{\mathbb{R}} (U(s)y|x)d\mu(s)} = \overline{(\pi(\mu)y|x)} = (\pi(\mu)^*x|y)$.

For $s \in \mathbb{R}$ er $\pi(\varepsilon_s) = U(s)$; specielt $\pi(\varepsilon_o) = 1$.

Da $|(\pi(\mu)x|y)| \leq \|x\| \, \|y\| \, \|\mu\|$, er $\|\pi\| \leq 1$.

Vælg et positivt translationsinvariant mål $m \neq 0$ på $\mathbb{R}$, identificer $L^1(\mathbb{R}) = L^1(m)$ med et ideal i $\mathcal{M}(\mathbb{R})$, og sæt $\pi(f) = \pi(f \cdot m) = \int_{\mathbb{R}} f(s)U(s)dm(s)$ for $f \in L^1(\mathbb{R})$. π er en normformindskende $*$-homomorfi af $L^1(\mathbb{R})$ ind i $B(H)$, og $\pi(\gamma(s)f) = \pi(\varepsilon_s * f) = U(s)\pi(f)$ for $s \in \mathbb{R}$, $f \in L^1(\mathbb{R})$. Mængden af summer af vektorer af form $\pi(f)x$, $f \in L^1(\mathbb{R})$, $x \in H$, er et

tæt underrum i H; thi af $0 = (\pi(f)x|y) = \int_{\mathbb{R}} f(s)(U(s)x|y)dm(s)$ for alle $f \in L^1(\mathbb{R})$ og $x \in H$, fås, at den kontinuerte funktion $s \mapsto (U(s)x|y)$ er nul; specielt er $(x|y) = 0$ for alle $x \in H$, så $y = 0$.

Da $\pi(f)^*\pi(f) = \pi(f^* * f) = \pi(f)\pi(f)^*$ for $f \in L^1(\mathbb{R})$, er $\pi(f)$ normal; derfor er $\|\pi(f)\| = \rho(\pi(f)) \leq \rho(f) = \|\hat{f}\|_\infty$, så $\hat{f} \mapsto \pi(f)$ er en veldefineret normformindskende * homomorfi $\Phi: \{\hat{f} \mid f \in L^1(\mathbb{R})\} \to B(H)$; Φ udvides ved kontinuitet til en * homomorfi $\Phi: C_0(\mathbb{R}) \to B(H)$, og videre, idet vi sætter $\Phi(1) = 1$, til en * homomorfi $\Phi: C(\mathbb{R}_\infty) \to B(H)$. For $g \in C(\mathbb{R}_\infty)$, $g \geq 0$, er $\Phi(g) = \Phi(\overline{g^{\frac{1}{2}}}g^{\frac{1}{2}}) = \Phi(g^{\frac{1}{2}})^*\Phi(g^{\frac{1}{2}}) \geq 0$. Der findes derfor ét Radon projektionsmål E på $\mathbb{R}_\infty$, så at $\int_{\mathbb{R}_\infty} gdE = \Phi(g)$ for $g \in C(\mathbb{R}_\infty)$, specielt $\int_{\mathbb{R}_\infty} \hat{f}dE = \pi(f)$ for $f \in L^1(\mathbb{R})$. For $f \in L^1(\mathbb{R})$ og $x \in H$ er $E(\{\infty\})\pi(f)x = (\int_{\mathbb{R}_\infty} 1_{\{\infty\}}\hat{f}dE)x = 0$, så $\{\infty\}$ er en E nulmængde.

Funktionen $s \mapsto s$, $s \in \mathbb{R}_\infty$, er endelig E næsten overalt; sæt $\int_{\mathbb{R}} sdE(s) = A$; A er en selvadjungeret operator på H. Da $e^{itA}\pi(f) = \int_{\mathbb{R}} e^{its}dE(s) \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(s)dE(s) = \int_{\mathbb{R}} e^{its}\hat{f}(s)dE(s) = \int_{\mathbb{R}} (\tau(t)f)\hat{\ }(s)dE(s) = \pi(\tau(t)f) = U(t)\pi(f)$ for $t \in \mathbb{R}$, $f \in L^1(\mathbb{R})$, er $e^{itA}y = U(t)y$ for y i det tætte underrum af H udspændt af vektorerne af form $\pi(f)x$, $f \in L^1(\mathbb{R})$, $x \in H$; derfor er $e^{itA} = U(t)$ for $t \in \mathbb{R}$.

En homomorfi π af en algebra L ind i $B(H)$ kaldes ikke-degenereret, hvis underrummet af summer af vektorer af form $\pi(f)x$, $f \in L$, $x \in H$, er tæt i H.

Vi har til en unitær repræsentation U af $\mathbb{R}$ på H knyttet en normformindskende ikke-degenereret homomorfi $\pi_U: L^1(\mathbb{R}) \to B(H)$, ved $\pi_U(f) = \int_{\mathbb{R}} f(s)U(s)dm(s)$; π_U opfylder desuden $\pi_U(f^*) = \pi_U(f)^*$ og $\pi_U(\tau(s)f) = U(s)\pi(f)$, $f \in L^1(\mathbb{R})$, $s \in \mathbb{R}$.

Lad der nu være givet en normformindskende ikke-degenereret homomorfi $\pi: L^1(\mathbb{R}) \to B(H)$; vi vil vise, at π har den ovenanførte form, og specielt er en $*$ homomorfi.

Vælg en approksimativ enhed $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i $L^1(\mathbb{R})$. For $f_1, f_2, \cdots, f_m \in L^1(\mathbb{R})$, $x_1, x_2, \cdots, x_m \in H$ og $s \in \mathbb{R}$ gælder $\sum_{\mu=1}^{m} \pi(\tau(s)f_\mu)x_\mu = \lim_{n\to\infty} \sum_{\mu=1}^{m} \pi(\phi_n * \tau(s)f_\mu)x_\mu$ $= \lim_{n\to\infty} \pi(\tau(s)\phi_n) \sum_{\mu=1}^{m} \pi(f_\mu)x_\mu$; da $\| \pi(\tau(s)\phi_n) \sum_{\mu=1}^{m} \pi(f_\mu)x_\mu \|$ $\leq \| \tau(s)\phi_n \|_1 \, \| \sum_{\mu=1}^{m} \pi(f_\mu)x_\mu \| \leq \| \sum_{\mu=1}^{m} \pi(f_\mu)x_\mu \|$, er $\sum_{\mu=1}^{m} \pi(f_\mu)x_\mu \mapsto \sum_{\mu=1}^{m} \pi(\tau(s)f_\mu)x_\mu$ en veldefineret lineær afbildning $U_\pi(s)$ med norm ≤ 1; $U_\pi(s)$ udvides ved kontinuitet til en normformindskende operator $U_\pi(s) \in B(H)$. Idet $U_\pi(s+t)\pi(f)x = \pi(\gamma(s)\gamma(t)f)x = U_\pi(s)U_\pi(t)\pi(f)x$ for $f \in L^1(\mathbb{R})$, $x \in H$, og $U_\pi(0) = 1$, er U_π en homomorfi af $\mathbb{R}$ ind i gruppen af invertible operatorer i $B(H)$. Da $\| U_\pi(s)^{-1} \| = \| U_\pi(-s) \| \leq 1$, er $U_\pi(s)$ en surjektiv isometri, altså unitær.

$\| U_\pi(t+h)\pi(f)x - U_\pi(t)\pi(f)x\| = \| \pi(\tau(h)f - f)x\|$
$\leq \| \tau(h)f - f\|_1 \, \| x\| \to 0$ for $h \to 0$; da $(U_\pi(t))_{t\in\mathbb{R}}$ er ensartet begrænset, og π er ikke-degenereret, er U_π stærkt kontinuert.

Lad U være en unitær repræsentation af $\mathbb{R}$ på H; for $t \in \mathbb{R}$, $f \in L^1(\mathbb{R})$ og $x \in H$ fås $U_{\pi_U}(t)\pi_U(f)x = \pi_U(\tau(t)f)x = U(t)\pi_U(f)x$; da π_U er ikke-degenereret, fås $U_{\pi_U} = U$.

Lad π være en normformindskende ikke-degenereret homomorfi: $L^1(\mathbb{R}) \to B(H)$. Vi har tidligere vist, at for enhver kontinuert funktional på $L^1(\mathbb{R})$, givet ved en funktion $h \in L^\infty(\mathbb{R})$, er $\int_{\mathbb{R}} f * g(t)\, h(t)dm(t) = \int_{\mathbb{R}} f(s) \int_{\mathbb{R}} (\tau(s)g)(t)\, h(t)dm(t)\, dm(s)$ (side 30); det vil sige $f * g$ er integralet af afbildningen $s \mapsto \tau(s)g$ af $\mathbb{R}$ ind i $L^1(\mathbb{R})$ med hensyn til det begrænsede mål $f\cdot m$; derfor er $\pi(f)\pi(g) = \pi(f * g) =$
$\pi(\int_{\mathbb{R}} f(s)\tau(s)g dm(s)) = \int_{\mathbb{R}} f(s)\pi(\tau(s)g)dm(s) =$
$\int_{\mathbb{R}} f(s)U_\pi(s)\pi(g)dm(s) = \pi_{U_\pi}(f)\pi(g)$ for f og $g \in L^1(\mathbb{R})$, så $\pi_{U_\pi} = \pi$.

Der er således bijektive forbindelser mellem unitære repræsentationer af $\mathbb{R}$ på H, og normformindskende ikke-degenererede homomorfier: $L^1(\mathbb{R}) \to B(H)$, og Radon projektionsmål på $\mathbb{R}$, og ikke-degenererede normformindskende homomorfier: $C_o(\mathbb{R}) \to B(H)$, og selvadjungerede operatorer på H.

Det er let at se, at $U(t)f = \tau(t)f$, $t \in \mathbb{R}$, $f \in L^2(\mathbb{R})$, definerer en unitær repræsentation af $\mathbb{R}$ på $H = L^2(\mathbb{R})$.

For $f \in L^1(\mathbb{R})$, $g, h \in L^2(\mathbb{R})$, er $(\pi_U(f)g|h) =$
$\int_{\mathbb{R}} f(s)(U(s)g|h)dm(s) = \int_{\mathbb{R}} f(s) \int_{\mathbb{R}} g(t-s)\overline{h(t)}dm(t)dm(s)$
$= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(s)g(t-s)dm(s)\overline{h(t)}dm(t) = (f * g|h)$ ved
Tonelli's sætning og Fubini's sætning; så $\pi_U(f)g = f * g$.

For $f \in C^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{K}(\mathbb{R})$ fås
$\frac{U(t)f - f}{it} \to if'$ i $L^2(\mathbb{R})$ for $t \to 0$, idet konvergensen er punktvis og majoriseret. $iD \pm i$ afbilder $C^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{K}(\mathbb{R})$ på $\{g \in \mathcal{K}(\mathbb{R}) \mid \int_{\mathbb{R}} e^{\pm t}g(t)dt = 0\}$, der er tæt i H, idet $e^{\pm t} \notin H$; afslutningen af iD, som vi igen vil betegne iD, har defekt indices 0 og 0, og er dermed selvadjungeret (idet iD på $C^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{K}(\mathbb{R})$ klart er symmetrisk). Hvis $e^{itA} = U(t)$, $A = A^*$, er $iD \subseteq A$, så $iD = A$, og $U(t) = e^{-tD}$, jfr. Taylors formel.

Specielt ses, at for $f \in L^1(\mathbb{R})$ og $g \in L^2(\mathbb{R})$ er $\hat{f}(iD)g = \pi_U(f)g = f * g$.

<u>Sætning</u>: $L^1(\mathbb{R})$ er semisimpel.

<u>Bevis</u>: Antag givet $f \in L^1(\mathbb{R})$ med $\hat{f} = 0$; så er $f * g = \hat{f}(iD)g = 0$ for $g \in L^2(\mathbb{R})$. Vælg en approksimativ enhed $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ for $L^1(\mathbb{R})$, med $\phi_n \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$; da $f * \phi_n = 0$ næsten overalt for hvert n, og $f * \phi_n \to f$ i $L^1(\mathbb{R})$ for $n \to \infty$, er $f = 0$.

KOMMENTARER

Fremstillingen bygger på nedenstående (og adskillige andre) værker, således især

§ 1	på	4. og 8.
§ 2	"	6.
§ 4	"	1. og 3.§ 13.3
§ 5	"	2. Ch. I § 3 og Appendice II
§ 7	"	5. og 7.
§ 9	"	2. Appendice III
§ 10	"	1. og 3.§ 13.3

LITTERATUR

1. N. Bourbaki: Théories Spectrales, Ch. 1-2, Hermann 1967
2. J. Dixmier: Les algèbres d'opérateurs dans l'espace Hilbertien (Algèbres de von Neumann), Gauthier-Villars 1957
3. J. Dixmier: Les C* algèbres et leurs représentation, Gauthier-Villars 1964
4. B. Fuglede: Mat. 6, KUMI 1968-69
5. P.R. Halmos: Commutativity and spectral properties of normal operators, Acta Sc. Math. Szeged 12B (1950), 153-156
6. C.E. Rickart: Banach Algebras, Van Nostrand 1960
7. F. Riesz & B. Sz-Nagy: Leçons d'Analyse Fonctionelle, Akadémiai Kiadó Budapest 1952
8. W. Rudin: Real and Complex Analysis, 2nd ed., McGraw-Hill 1966.

Øvelsesopgaver.

<u>øv 1</u> Vis, at aksiomerne (a) til (e) i lærebogens §12.1 for indre produkt er uafhængige: find for hvert af aksiomerne en afbildning $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ og, om muligt, en afbildning $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, der ikke opfylder dette aksiom, men opfylder alle de øvrige.

<u>øv 2</u> Lad H og K være to vektorrum over $\mathbb{C}$ med indre produkt (præ Hilbert rum). Lad V være en isometri af H ind i K:

$$\forall\, x, y \in H: \quad \|Vx - Vy\| = \|x - y\| .$$

a) Vis, at V har formen:

$$x \mapsto a + Ux, \quad x \in H,$$

hvor $a \in K$ og U er $\mathbb{R}$ lineær ∂:

$$\forall\, x, y \in H \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{R} : U(x + \alpha y) = Ux + \alpha Uy.$$

b) Ux og $U(ix)$ kan være ortogonale; betragt f.eks. $(\alpha + i\beta, \gamma + i\delta) \mapsto (\beta + i\delta, \alpha + i\gamma)$.

<u>øv 3</u> Lad H være et præ Hilbert rum og A en kontinuert lineær afbildning: $H \to H$. Antag, at AH er et éndimensionalt underrum af H.

(a) Hvis H er et Hilbert rum, har A form

$$x \mapsto (x|v)u, \quad x \in H,$$

hvor $u, v \in H$.

(b) $(f, g) \to \int_{-1}^{1} f(t)\overline{g(t)}\, dt$ definerer et indre produkt på rummet $C([-1, 1])$ af kontinuerte komplekse funkti-

oner på $[-1, 1]$, der herved bliver et præ Hilbertrum.

Betragt afbildningen

$$f \mapsto \int_0^1 f(t)\,dt \quad 1 \quad , \quad f \in C[-1, 1].$$

<u>øv 4</u> Lad H være et præ Hilbertrum.

Find centret af algebraen $B(H)$.

<u>øv 5</u> Lad H være et præ Hilbertrum; antag at A og $B \in B(H)$ opfylder:

$$\forall\, x, y \in H : |(Ax \mid y)| = |(Bx \mid y)|.$$

Vis, at A og B er proportionale. (Vis f.eks. først v. h. a. betingelsen for lighedstegn i Schwarz' ulighed, at

$$\forall\, x \in H \;\; \exists\, \lambda(x) \in C : Bx = \lambda(x)Ax,$$

og at $\lambda(x)$ kun afhænger af Ax).

<u>øv 6</u> Lad H og K være præ Hilbertrum, og U en afbildning af H ind i K, der opfylder:

$$\forall\, x, y \in H : (Ux \mid Uy) = (x \mid y).$$

Vis, at U er lineær.

<u>øv 7</u> Lad H være et vektorrum over $\mathbb{C}$ med dimension $\geqq 2$. Lad b være en bilineær afbildning: $H \times H \to \mathbb{C}$. Vis, at der findes $z \in H$ med $z \neq 0$ og $b(z, z) = 0$.

<u>øv 8</u> Lad H være et vektorrum over $\mathbb{R}$. Et indre produkt på H er en afbildning $(x, y) \mapsto (x|y)$ af $H \times H$ ind i $\mathbb{R}$, der opfylder aksiomerne (a) - (e) i §12.1 i lærebogen, $\mathcal{O}$: en positivt definit symmetrisk bilinearform. Aksiomerne er uafhængige (benyt f. eks. eksistensen af en basis for $\mathbb{R}$ opfattet som vektorrum over $\mathbb{Q}$). I det komplekse tilfælde, men ikke i det reelle, kan (a) erstattes med de to betingelser:

$\forall\, x, y, z \in H : (x|y+z) = (x|y) + (x|z)$

$\forall\, x, y \in H \;\; \forall\, \alpha \in \mathbb{C}$ (henholdsvis $\mathbb{R}$) : $(x|\alpha y) = \overline{\alpha}(x\,|\,y)$.

I begge tilfælde gælder $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$, og det indre produkt er bestemt ved normen:

$$4(x|y) = \sum_{\nu=0}^{3} i^{\nu}\|x + i^{\nu}y\|^2 \quad \text{i det komplekse tilfælde,}$$

$$4(x|y) = \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 \quad \text{i det reelle tilfælde.}$$

<u>øv 9</u> Lad H være et normeret rum over $\mathbb{C}$ eller $\mathbb{R}$. Hvis normen opfylder:

$\forall\, x, y \in H : \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$,

findes der ét indre produkt på H, der opfylder:

$\|x\| = (x|x)^{\frac{1}{2}}$ for alle $x \in H$ (jvf. øv 8).

<u>øv 10</u> Lad H være et Hilbertrum over $\mathbb{C}$ eller $\mathbb{R}$, og V et tæt underrum.

a) For ethvert $x \in H$ er $\{x\}^{\perp} \cap V$ tæt i $\{x\}^{\perp}$.

(Vælg f.eks. følger (x_n) og (y_n) fra V, der konvergerer mod x henholdsvis $y \in \{x\}^{\perp}$, og betragt, for $\|x\| = 1$, $(x_n|x)y_n - (y_n|x)x_n$.)

b) For ethvert endeligdimensionalt underrum K af H er $K^{\perp} \cap V$ tæt i $K^{\perp}$.

c) Til x og y i H, $x \perp y$, findes følger $(x)_{n\in\mathbb{N}}$ og $(y)_{n\in\mathbb{N}}$ fra V, så at $x_n \to x$, $y_n \to y$ og

$\forall\, n, m \in \mathbb{N} : (x_n|y_n) = 0$.

(Vælg rekursivt x_{n+1}, så $\|x - x_{n+1}\| \leq 2^{-n-1}$ og $x_{n+1} \perp \{y_1, y_2, \cdots, y_n, y\}$, og y_{n+1} tilsvarende).

<u>øv 11</u> Hvis det om et præ Hilbertrum V gælder, at for ethvert afsluttet underrum M af V er $V = M + M^{\perp}$,

så er V et Hilbertrum.

<u>øv 12</u> Lad H og K være normerede rum, og $(A)_{n\in\mathbb{N}}$ en følge af kontinuerte lineære afbildninger af H ind i K. Sæt, for $x_o \in H$ og $a > 0$, $B(x_o, a) = \{x \in H \mid \|x - x_o\| < a\}$.

1) Vis: der findes $c > 0$, så at $\|A_n\| \leq c$ for alle n, hvis og kun hvis der findes $x_o \in H$ og a og $D>0$, så at $\|A_n\| \leq D$ for alle $x \in B(x_o, a)$ og alle n.

2) Vis princippet om ligelig begrænsning: Antag, at H er et Banachrum, og at der for hvert $x \in H$ findes $c(x) > 0$, så at $\|A_n x\| \leq c(x)$ for alle n. Så findes en konstant $c > 0$, så at $\|A_n\| \leq c$ for alle n. (Ellers kunne man, efter 1), rekursivt vælge kugler $B(x_\nu, a_\nu)$ og indices n_ν, så at $x_o = 0$, $a_o = 1$, $a_\nu \leq 2^{-\nu}$, $n_{\nu+1} > n_\nu$, $B(x_{\nu+1}, a_{\nu+1}) \subseteq B(x_\nu, a_\nu)$, og $\|A_{n_\nu} x\| > \nu$ for alle $x \in B(x_\nu, a_\nu)$, og for $x \in \bigcap_\nu \overline{B(x_\nu, a_\nu)}$ ville man få modstrid).

<u>øv 13</u> Lad H være et Hilbertrum og T en operator på H med definitionsområde $D(T)$. Vis, at hvis T er kontinuert, altså $\sup_{x\in D(t), \|x\|\leq 1} \|Tx\| = \|T\| < \infty$, så har T en afslutning $\overline{T}$, $D(\overline{T}) = \overline{D(T)}$, og $\|\overline{T}\| = \|T\|$. Specielt, hvis T er tæt defineret og kontinuert, så er $\overline{T} \in B(H)$.

<u>øv 14</u> Lad H være et Hilbertrum og T en afsluttet operator på H med $D(T) = H$. Vis, at $T \in B(H)$ (afsluttet graf sætningen) ved følgende metode:
T^* er tæt defineret og afsluttet. Lad $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ være en følge af vektorer fra $D(T^*)\setminus\{0\}$, med $x_n \to 0$ for $n \to \infty$. For hvert $y \in H$ er

$$|(y|T^*(\|x_n\|^{-\frac{1}{2}}x_n))| \leq \|x_n\|^{-\frac{1}{2}} |(Ty|x_n)| \leq \|Ty\| \, \|x_n\|^{\frac{1}{2}}.$$

Derfor er $(T^*(\|x_n\|^{-\frac{1}{2}}x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ en ligeligt begrænset følge, ved øv 12 anvendt på de tilsvarende funktionaler på H, så $\|T^*x_n\| \leq C\|x_n\|^{\frac{1}{2}} \to 0$ for $n \to \infty$.
Da $T^* \in B(H)$ (jvf. øv 13), fås $T \in B(H)$.

<u>øv 15</u> Lad H være et Hilbertrum; lad $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ være et orthonormalsystem i H. Lad A betegne afslutningen af den mindste konvekse mængde i H, der indeholder alle punkterne $(1 - n^{-1})e_n$, $n = 1, 2, \cdots$. Find diameteren $d(A) = \sup_{x,y\in A} \|x - y\|$, og vis, at $\|x - y\| < d(A)$ for alle $x, y \in A$.

<u>øv 16</u> Lad H være et præ Hilbertrum. Mængden af orthonormalsystemer i H er induktivt ordnet og har derfor maximale elementer. Lad $(e_i)_{i\in I}$ og $(f_j)_{j\in J}$ være to maximale orthonormale systemer. Vis, at I og J har samme kardinaltal. (Hvis I er endelig, er H et endelig dimensionalt vektorrum med basis $(e_i)_{i\in I}$; da vektorerne f_j, $j\in J$, er lineært uafhængige, er $\operatorname{card} J \leq \operatorname{card} I$. Hvis I er uendelig, sættes $J_i = \{j \in J \mid (f_j|e_i) \neq 0\}$ for hvert $i \in I$; da alle J_i er numerable, og $J = \bigcup_{i\in I} J_i$, fås $\operatorname{card} J \leq \operatorname{card}(I \times \mathbb{N}) = \operatorname{card} I$.)

Når H er et Hilbertrum, er underrummet H_o udspændt af et maksimalt orthonormalsystem $(e_i)_{i\in I}$ tæt i H, idet $\overline{H_o} = \{e_i \mid i \in I\}^{\perp\perp} = \{0\}^{\perp}$. $\operatorname{card} I$ kaldes Hilbertdimensionen af H.

<u>øv 17</u> Lad H være et præ Hilbertrum; lad $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ være en følge af vektorer i H. Lad D_n betegne determi-

nanten af matricen $((f_i|f_j))_{i,j=1,2,\ldots,n}$. Lad $D_n = \sum_{i=1}^{n} K_{in}^n (f_i|f_n)$ være opløsningen af D_n efter sidste søjle.

a) Vis, at vektorerne (f_n) er lineært uafhængige, hvis og kun hvis $D_n \neq 0$ for alle n.

b) Antag, at vektorerne (f_n) er lineært uafhængige; sæt $e_n = (D_n D_{n-1})^{-\frac{1}{2}} \sum_{i=1}^{n} K_{in}^n f_i$. Vis, at $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ er et orthonormalsystem, der udspænder samme underrum af H som $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (Gram-Schmidt's orthonormaliseringsmetode).

c) Vis, at H har en numerabel tæt delmængde, hvis og kun hvis H har en numerabel orthonormal tilnærmelsesbasis.

<u>øv 18</u> a) For $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| < 1$, er $(\lambda^{n-1})_{n\in\mathbb{N}}$ et element f_λ i Hilbertrummet ℓ^2. Vis, at vilkårligt endelig mange af disse vektorer f_λ, $|\lambda| < 1$, er lineært uafhængige.

b) Lad H være et Hilbertrum; lad H_1 være et afsluttet underrum med Hilbertdimension $\aleph_0$; lad $(f_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ være en lineært uafhængig familie af vektorer i H_1 (jvf. a)); antag, at $H_2 = H_1^{\perp}$ har Hilbertdimension card $\mathbb{R}$ (jvf. øv 16); lad $(e_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ være en orthonormal tilnærmelsesbasis for H_2. Lad F være det mindste underrum af H, der indeholder $\{e_\lambda + f_\lambda \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Vis, at den orthogonale projektion på H_2 af en tæt delmængde af F er tæt i H_2, og har kardinaltal $\geq$ card $\mathbb{R}$. Vis, at $F \cap H_2 = \{0\}$. Vis, at ethvert orthonormalsystem i F er endeligt eller numerabelt (udnyt, at ethvert element i H_1 er orthogonalt på alle på nær højst numerabelt mange elementer i systemet).

c) Vis, at $\overline{F}$ har Hilbertdimension card $\mathbb{R}$. Vis,

at F ikke har nogen orthonormal tilnærmelsesbasis.

øv 19 Lad H være et Hilbertrum, V et tæt underrum, og α og β to vektorer i H. Vis, at hvis

$$\{\beta\}^{\perp} \supseteq \{\alpha\}^{\perp} \cap V,$$

så er α og β proportionale. (Brug f.eks. øv 10).

øv 20 Lad $\mathcal{D}(]0, 1[)$ betegne rummet af C^{∞} funktioner med kompakt støtte $\subseteq]0, 1[$. Definer en operator T_5 på $L^2([0, 1])$ ved

$$\mathcal{D}(T_5) = \mathcal{D}(]0, 1[), \quad T_5 f = if' \quad \text{for} \quad f \in (T_5)$$

(jfr. Rudin 13.4).

a) T_5 er en tæt defineret symmetrisk operator

b) $\mathcal{R}(T_5) = \{f \in \mathcal{D}(]0, 1[) \mid \int_0^1 f(t)\, dt = 0\}$

c) $T_5^* = T_1$; $\overline{T}_5 = T_3$

d) Vi minder om, at der er en naturlig indlejring af $L^1([0, 1])$, og dermed af underrummet $L^2([0, 1])$, i rummet $\mathcal{D}'(]0, 1[)$ af distributioner på $]0, 1[$ (jfr. Rudin 6.11). Vis, at en funktion f i $L^2([0, 1])$ tilhører $\mathcal{D}(T_1)$, hvis og kun hvis f, opfattet som distribution på $]0, 1[$, har en differentialkvotient, der kan identificeres med en funktion g i $L^2([0, 1])$. Vis, at T_1 herved identificeres med i gange en restriktion af differentiationsoperatoren D på $\mathcal{D}'(]0, 1[)$ (jfr. Rudin 6.12).

øv 21 Lad H være et Hilbertrum; lad $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ være en orthonormal tilnærmelsesbasis for H; vi antager altså, at det mindste underrum H_0 af H, der indeholder $\{e_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, er tæt i H. Lad en operator T på H være givet ved $\mathcal{D}(T) = H_0$, $Tf = \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu e_1$ for $f = \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu e_\nu \in H_0$. Vis, at T ikke kan afsluttes. Find T^* og find afslut-

ningen af $G(T)$.

<u>øv 22</u> Lad H være et Hilbertrum med orthonormal tilnærmelsesbasis $(e_o, e_1, e_2, \cdots)$. Definer en operator T på underrummet af H udspændt af $\{e_1, e_2, \cdots\}$ ved $T \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu e_\nu = \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu e_0$. Vis, at T er en symmetrisk operator, der ikke kan afsluttes.

Find en isometri V af et underrum af H ind i H, således at $V-1$ er injektiv, men $\overline{V}-1$ ikke er injektiv.

<u>øv 23</u> Lad A være en operator på et Hilbertrum H. Antag, at $A^2 = -1|\mathcal{D}(A)$. Vis, at $\mathcal{D}(A)$ er direkte sum af egenrummene for A svarende til egenværdierne i og $-i$, og at $\{(x, ix) \in G(A)\}$ og $\{(x, -ix) \in G(A)\}$ er orthogonale underrum af $H \times H$ med sum $G(A)$.

<u>øv 24</u> Lad T være en tæt defineret, afsluttet, symmetrisk operator på et Hilbertrum H.

a) Vis, at $G(T)$ og $\{(x, ix) \in G(T^*)\}$ og $\{(x, -ix) \in G(T^*)\}$ er parvis orthogonale afsluttede underrum af $H \times H$ med sum $G(T^*)$, og at $\mathcal{D}(T\ )$ er direkte sum af $\mathcal{D}(T)$ og $\ker(T^* - i)$ og $\ker(T^* + i)$. (Brug f.eks. øv 23).

b) Lad S være en afsluttet, symmetrisk operator, der udvider T, $T \subseteq S$. Vis, at hvis $u, v \in \mathcal{D}(T^*)$, $T^*u = iu$, $T^*v = -iv$, og $u + v \in \mathcal{D}(S)$, så er $\|u\| = \|v\|$. Vis, at der findes en isometri U af et afsluttet underrum K af $\ker(T^* - i)$ ind i $\ker(T^* + i)$, så at $\mathcal{D}(S) = \{x + u + Uu \mid x \in \mathcal{D}(T), u \in K\}$, med $S(x + u + Uu) = Tx + iu - iUu$. Omvendt er enhver operator defineret på denne måde en afsluttet symmetrisk udvidelse af T.

<u>øv 25</u> En operator N på et Hilbertrum H kaldes normal, hvis N er afsluttet og tæt defineret, og $N^*N = NN^*$.

Vis, at hvis N er en tæt defineret operator, og N og N^* er metrisk ens, d.v.s. $\mathcal{D}(N) = \mathcal{D}(N^*)$ og $\|Nx\| = \|N^*x\|$ for alle $x \in \mathcal{D}(N)$, så er N normal. (Det omvendte gælder også, jfr. Rudin 13.32).

<u>øv 26</u> Lad H være et uendelig dimensionalt Hilbertrum med en numerabel orthonormal tilnærmelsesbasis. Vis, at der findes en afsluttet, tæt defineret, ubegrænset operator A på H, der opfylder: $A^2 = 1|\mathcal{D}(A)$. (Jfr. øv 23 og Rudin Ch 1 ex 20). Vis, at A ikke kan være selvadjungeret, eller symmetrisk.

<u>øv 27</u> Lad H være et Hilbertrum, og E og $F \in B(H)$ to orthogonale projektioner. Vis, at hvis EH har større Hilbertdimension (jfr. øv 16) end FH, så indeholder EH en enhedsvektor, der er vinkelret på FH. Vis, at hvis $\|E - F\| < 1$, så har EH og FH samme Hilbertdimension.

<u>øv 28</u> Lad T være en operator på et Hilbertrum H. Sæt $\Omega_e = \Omega_e(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} | \exists\, c_\lambda > 0\ \forall\, x \in \mathcal{D}(T): \|(T-\lambda)x\| \geq c_\lambda \|x\|\}$

a) Hvis $S \subseteq T$, er $\Omega_e(T) \subseteq \Omega_e(S)$. Hvis T kan afsluttes, er $\Omega_e(\overline{T}) = \Omega_e(T)$.

b) Hvis T er afsluttet, gælder: $\lambda \in \Omega_e$ hvis og kun hvis $T - \lambda$ er injektiv og $R(T - \lambda)$ er afsluttet.

c) Hvis $\lambda \notin \Omega_e(S)$ og T er en udvidelse af S, har $T - \lambda$ ikke en begrænset invers.

d) For $\lambda \in \Omega_e$ og $|\mu - \lambda| < c_\lambda$ gælder: $\mu \in \Omega_e$, og $R(T - \lambda) \cap R(T - \mu)^\perp = R(T - \lambda)^\perp \cap R(T - \mu) = \{0\}$. (For $(T - \lambda)z \perp (T - \mu)z$ fås $c_\lambda \|z\| \, \|(T - \lambda)z\| \leq \|(T - \lambda)z\|^2 = |(\mu - \lambda)| |(z|(T - \lambda)z)| \leq |\mu - \lambda| \, \|z\| \, \|(T - \lambda)z\|$).

e) Antag T er afsluttet. Hilbertdimensionen af $R(T - \lambda)^{\perp}$ er konstant på hver sammenhængskomponent af Ω_e. (Brug f.eks. øv 27).

f) Hvis T er symmetrisk, er $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \subseteq \Omega_e$.

g) T kaldes nedad begrænset, hvis der findes $c \in \mathbb{R}$, så at $(Tx|x) \geq c(x|x)$ for alle $x \in \mathcal{D}(T)$. Vis, at så er T symmetrisk, og at $-]\infty, c[\subseteq \Omega_e$.

h) Vis, at hvis T er tæt defineret og symmetrisk, og $\mathbb{R} \cap \Omega_e \neq \emptyset$, så kan T udvides til en selvadjungeret operator (Defekt indices for $\overline{T}$ er lige store ifølge a) og e) og f)).

<u>øv 29</u> Lad A være en symmetrisk operator på et Hilbertrum H.

a) Vis, at for hvert $n \in \mathbb{N}$ er A^n symmetrisk.

b) Vis: $\forall\, n \in \mathbb{N}\ \forall\, x \in \mathcal{D}(A^n)$: $\|Ax\|^n \leq \|A^n x\|\, \|x\|^{n-1}$. (Induktion; brug den $(p-1)$'te formel på Ax for $x \in \mathcal{D}(A^n)$). Vis, at lighedstegn indtræffer, hvis og kun hvis $x = 0$, eller $n = 1$, eller x er egenvektor for A^2. Vis, at $\|A^s x\|^{1/s} \leq \|A^n x\|^{1/n} \|x\|^{1/s - 1/n}$, $s \leq n$.

c) Vis, at A^n er afsluttet, hvis A er afsluttet.

<u>øv 30</u> Lad A være en normeret algebra, x og y elementer i A, $z = xy - yx$. Hvis z har en invers i A, eller blot z ikke er topologisk nuldivisor, er $xz \neq zx$.

<u>øv 31</u> Lad H være et Hilbertrum, F et afsluttet underrum. Lad S og T være afsluttede, injektive operatorer på H med $R(S)$ og $R(T)$ afsluttede.

a) ST er afsluttet.

b) Vis, at $R(S|F \cap \mathcal{D}(S))$ er afsluttet. Definer $Q \in B(H)$

ved $Qx = S^{-1}x$ for $x \in R(S)$, $Qx = 0$ for $x \perp R(S)$. Vis, at $R(S|F \cap \mathcal{D}(S))$ og $R(S)^{\perp}$ og $\overline{Q^*(F^{\perp})}$ er parvis orthogonale underrum af H med sum H.

c) Antag, at S er tæt defineret. Vis, at Hilbertdimensionen af $R(S|F \cap \mathcal{D}(S))^{\perp}$ er summen af Hilbertdimensionerne af $R(S)^{\perp}$ og $F^{\perp}$.

d) Antag, at S og T er tæt definerede, og at $R(T)^{\perp}$ har endelig dimension. Vis, at ST er en afsluttet tæt defineret operator (brug f.eks. øv 10). Vis, at $R(ST)$ er afsluttet, og at Hilbertdimensionen af $R(ST)^{\perp}$ er summen af Hilbertdimensionerne af $R(S)^{\perp}$ og $R(T)^{\perp}$.

e) Lad A være en afsluttet, tæt defineret, symmetrisk operator på H med defekt indices m og n. Hvis m eller n er endelig, er A^2 en afsluttet, tæt defineret, symmetrisk, nedad begrænset operator med defekt indices $m + n$ og $m + n$. (Brug f.eks. $A^2 + 1 = (A + i)(A - i) = (A - i)(A + i)$, og øv 28).

<u>øv 32</u> Lad, som i Rudin 13.4, T_3 betegne operatoren på $L^2([0, 1])$ givet ved

$$\mathcal{D}(T_3) = \{f \in AC([0, 1]) \mid f' \in L^2([0, 1]),\ f(0) = f(1) = 0\},$$

$$T_3 f = if' \quad \text{for} \quad f \in \mathcal{D}(T_3).$$

Find samtlige selvadjungerede udvidelser af T_3 (Brug f.eks. øv 24).

Vis, at det netop er de restriktioner af T_3^*, der er bestemt ved randbetingelser af form

$$f(1) = zf(0), \quad z \in \mathbb{C},\ |z| = 1.$$

<u>øv 33</u> Lad X være et kompakt Hausdorffrum. Lad I være et ideal i $C(X)$. Sæt

$$h(I) = \{x \in X \mid \forall f \in I : f(x) = 0\}.$$

$h(I)$ er en kompakt delmængde af X.

a) Lad K være en kompakt delmængde af X disjunkt med $h(I)$; vis, at I indeholder en funktion, der er positiv i ethvert punkt af K.

b) Vis, at I indeholder enhver funktion $\in C(X)$, der er nul i en omegn af $h(I)$.

c) Vis, at hvis I er afsluttet, indeholder I enhver funktion i $C(X)$, der er nul på $h(I)$ (hvis $f \geqq 0$ og $f|h(I) = 0$, så er $(f - \varepsilon) \vee 0$ nul i en omegn af $h(I)$).

d) Vis, for I afsluttet, at $C(X)/I$ er isomorf med $C(h(I))$.

<u>øv 34</u> Lad X være et kompakt Hausdorffrum, og F en delmængde af X. Sæt

$k(F) = \{f \in C(X) \mid f|F = 0\}$.

Vis, at $h(k(F)) = \overline{F}$.

Vis, at for ethvert ideal I i $C(X)$ er $k(h(I)) = \overline{I}$ (jfr. øv 33).

<u>øv 35</u> Lad X og Y være kompakte Hausdorffrum. Lad ϕ være en algebra isomorfi af $C(X)$ på $C(Y)$. Vis, at der findes en homeomorfi Φ af Y på X, så at $\phi(f) = f \circ \Phi$ for alle $f \in C(X)$.

<u>øv 36</u> Lad der være givet to Hilbertrum H_1 og H_2. Lad ϕ_i betegne den naturlige indlejring af H_i i $H_1 \times H_2$, $i = 1, 2$. Find ϕ_i^*. En operator $T \in B(H_1 \times H_2)$ beskrives naturligt ved en matrix $(T_{ij})_{i,j = 1,2}$, $T_{ij} = \phi_i^* T \phi_j$. Find omvendt T udtrykt ved matrixelementerne, og find matricen for T^*.

<u>øv 37</u> Lad H være et Hilbertrum. Lad $P(S)$ betegne projektionen $\in B(H \times H)$ på grafen $G(S)$ for en tæt defineret afsluttet operator S på H.

Vis, at $P(S^*) = 1 + VP(S)V$, hvor $V \in B(H \times H)$ har matricen (jfr. øv 36) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Vis, at $P(S)$ har matricen

$$\begin{pmatrix} (1 + S^*S)^{-1} & S^*(1 + SS^*)^{-1} \\ S(1 + S^*S)^{-1} & SS^*(1 + SS^*)^{-1} \end{pmatrix}$$

<u>øv 38</u> Lad H være et Hilbertrum; lad $A \in B(H)$ være selvadjungeret. Sæt $\alpha = \inf_{\|x\|=1} (Ax|x)$ og $\beta = \sup_{\|x\|=1} (Ax|x)$.

Vis, at $\{\alpha, \beta\} \subseteqq \sigma(A) \subseteqq [\alpha, \beta]$.

Vis, at $\|A\| = \max\{|\alpha|, |\beta|\}$.

<u>øv 39</u> Lad H være et Hilbertrum. Lad A være en selvadjungeret operator i $B(H)$.

a) Antag $0 \leqq A \leqq 1$; lad P betegne projektionen på rummet af fixpunkter for A. Vis, at for ethvert $x \in H$ gælder $A^n x \to Px$ for $n \to \infty$.

b) Antag blot $\|A\| \leqq 1$; lad Q betegne projektionen på $\overline{AH}$. Vis, at for ethvert $x \in H$ gælder $(1 - (1 - A^2)^n)x \to Qx$ for $n \to \infty$.

<u>øv 40</u> Lad der være givet et Hilbertrum H og to projektioner P og $Q \in B(H)$. Lad R betegne projektionen på $PH \cap QH$. Vis, at for ethvert $x \in H$ gælder $(PQ)^{n+1}x = P(QPQ)^n x \to Rx$ for $n \to \infty$.

<u>øv 41</u> Lad H være et Hilbertrum, som sædvanlig forsynet med normtopologien; lad H_σ betegne H forsynet med den svageste topologi, der gør alle afbildninger $x \mapsto (x|y)$,

$y \in H$, af H ind i $\mathbb{C}$ kontinuerte. Lad T være en lineær afbildning: $H \to H$.

Vis, at der om egenskaberne

a) T er afsluttet

b) T er kontinuert: $H \to H$ (d.v.s. $T \in B(H)$)

c) T er kontinuert: $H_\sigma \to H_\sigma$

d) T er kontinuert: $H \to H_\sigma$

e) T er kontinuert: $H_\sigma \to H$

f) T har endelig dimension

gælder: (f) og a)) $\Leftrightarrow$ e) $\Rightarrow$ a) $\Leftrightarrow$ b) $\Leftrightarrow$ c) $\Leftrightarrow$ d).

(a) $\Leftrightarrow$ b) er velkendt; vis f.eks. (c) og f)) $\Rightarrow$ e) $\Rightarrow$ f) og e) $\Rightarrow$ b) $\Rightarrow$ c) $\Rightarrow$ d) $\Rightarrow$ a)).

<u>øv 42</u> Lad der være givet et åbent interval $]a, b[$, $-\infty \leqq a < b \leqq +\infty$, i $\mathbb{R}$, og en kontinuert positiv funktion w på $]a, b[$. Antag, at for $n = 0, 1, 2, \cdots$ er $\int_a^b w(t)|t|^n \, dt < \infty$. Lad H betegne Hilbertrummet $L^2(w\,dt)$, med indre produkt $(f,g) \mapsto (f|g) = \int_a^b f(t)\overline{g(t)}w(t)\,dt$. $f \mapsto f\,w^{\frac{1}{2}}$ er en isomorfi af H på $L^2(]a, b[)$. Sæt H_o lig underrummet af H udspændt af polynomierne på $]a, b[$.

Vis, at H_o har én orthonormal basis $(\phi_o, \phi_1, \phi_2, \cdots)$ med den egenskab, at ϕ_n for hvert n er et n'te grads polynomium med positiv koefficient for t^n.

Vis, at polynomiet ϕ_n har n forskellige reelle rødder, som alle tilhører $]a, b[$ (Benyt, at der findes (n-1)'te grads polynomier med $(n - 1)$ foreskrevne rødder).

For $a = -1$, $b = 1$, $w = 1$, fås polynomierne $(n + \frac{1}{2})^{\frac{1}{2}}P_n$, hvor $P_n(t) = (2^n n!)^{-1} \frac{d^n}{dt^n}(t^2 - 1)^n$ er det n'te Legendre polynomium.

For $a = -1$, $b = 1$, $w(t) = (1 - t^2)^{-\frac{1}{2}}$ fås

$$\phi_0(t) = \pi^{-\frac{1}{2}},\ \phi_n(t) = (\tfrac{1}{2}\pi)^{-\frac{1}{2}}T_n(t),\ n = 1, 2, \cdots,$$

hvor $T_n(t) = \cos(n \operatorname{Arccos} t)$ er det n'te Čebysev polynomium.

For $a = 0$, $b = \infty$, $w(t) = e^{-t}$ fås

$$\phi_n(t) = (-1)^n(n!)^{-1}L_n(t), \quad \text{hvor} \quad L_n(t) = e^t D^n(t^n e^{-t})$$

er det n'te Laguerre polynomium.

For $a = -\infty$, $b = \infty$, $w(t) = e^{-t^2}$ fås

$$\phi_n(t) = (2^n n!\sqrt{\pi})^{-\frac{1}{2}}H_n(t), \quad \text{hvor} \quad H_n(t) = (-1)^n e^{t^2} D^n e^{-t^2}$$

er det n'te Hermite polynomium.

<u>øv 43</u> En funktion f på $\mathbb{R}$ kaldes absolut kontinuert, hvis der findes en funktion g på $\mathbb{R}$, der er Lebesguesintegrabel over ethvert kompakt interval, d.v.s. $g \in \mathcal{L}^1_{lok}(\mathbb{R})$, så at $f(t) = f(0) + \int_0^t g(s)\,ds$. Sæt $AC(\mathbb{R})$ lig mængden af absolut kontinuerte funktioner på $\mathbb{R}$.

a) Vis, at $C^1(\mathbb{R}) \subseteq AC(\mathbb{R}) \subseteq C(\mathbb{R})$; vis, at for $f \in AC(\mathbb{R})$ gælder endog, at der til ethvert kompakt interval I og ethvert $\varepsilon > 0$ findes et $\delta > 0$, så at for enhver endelig familie af parvis disjunkte delintervaller $[a_\nu, b_\nu]$, $\nu = 1, 2, \cdots, n$, af I med samlet længde $\sum_{\nu=1}^{n}(b_\nu - a_\nu) < \delta$ er $\sum_{\nu=1}^{n}|f(b_\nu) - f(a_\nu)| < \varepsilon$. (Man kan vise, at denne betingelse også er tilstrækkelig for $f \in AC(\mathbb{R})$).

b) Vis, at g er entydigt bestemt ved f. g betegnes Df eller f'. Vis formlen for delt integration: hvis F og $G \in AC(\mathbb{R})$ og $I = [a, b]$ er et kompakt interval, så er $\int_a^b F\,DG\,dt + \int_a^b G\,DF\,dt = F(b)G(b) - F(a)G(a)$, og $FG \in AC(\mathbb{R})$.

<u>øv 44</u> Definer en operator A på $H = L^2(\mathbb{R})$ ved $\mathcal{D}(A) = \{f \in H \mid f \in AC(\mathbb{R}),\ Df \in L^2(\mathbb{R})\}$, $Af = iDf$ for

$f \in \mathcal{D}(A)$ (jfr. øv 43). Definer en operator A_o på H ved $\mathcal{D}(A_o) = \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $A_o \subseteq A$.

a) Vis, at $R(A_o) = \{f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mid \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt = 0\}$. Vis, at $A_o^* = A$: $A \subseteq A_o^*$ ses ved partiel integration; hvis $g \in \mathcal{D}(A_o^*)$ og $A_o^* g = h$, og $H(t) = \int_0^t h(s)\,ds$, så er $(g + iH)|I$ konstant for ethvert kompakt interval, så $g + iH$ er konstant, og $g \in AC(\mathbb{R})$.

b) Vis, at $R(A_o + i)$ og $R(A_o - i)$ er tætte i H.

c) Vis, at $A = \overline{A_o} = A^*$.

<u>øv 45</u> Lad der være givet en reel kontinuert funktion q på $\mathbb{R}$. Definer en operator T på $H = L^2(\mathbb{R})$ ved $\mathcal{D}(T) = \{f \in H \mid f \in AC(\mathbb{R}),\ iDf + qf \in L^2(\mathbb{R})\}$, $Tf = iDf + qf$ for $f \in \mathcal{D}(T)$.

Sæt $Q(s) = \int_0^s q(t)\,dt$. Vis, at $g \mapsto ge^{-iQ}$ er en unitær operator U på H. Vis, at $g \in AC(\mathbb{R}) \Leftrightarrow ge^{-iQ} \in AC(\mathbb{R})$. Vis, at $T = U^{-1}AU$, hvor A er den i øv 44 betragtede operator. Vis, at $T = T^*$.

<u>øv 46</u> Lad H være et Hilbertrum.

a) Vis, at ethvert tosidet ideal $I \neq 0$ i $B(H)$ indeholder enhver operator $T \in B(H)$ af endelig rang (d.v.s. så at TH har endelig dimension).

b) Antag H har Hilbertdimension $\aleph_o$. Find samtlige tosidede idealer i $B(H)$.

<u>øv 47</u> Lad H være et Hilbertrum; lad B og T være operatorer på H, med $B \in B(H)$.

a) Hvis T er afsluttet, er TB afsluttet.

b) Hvis T er tæt defineret, er T^*B^* afsluttet, men ikke nødvendigvis tæt defineret, og BT er tæt defineret, men ikke nødvendigvis afsluttet.

c) Hvis T og T^* er tæt defineret og BT afsluttet, så er T afsluttet og T^*B^* tæt defineret, og $BT = (T^*B^*)^*$.

d) Hvis T er tæt defineret og afsluttet, og TB er tæt defineret, så er $(TB)^* = \overline{B^*T^*}$.

<u>øv 48</u> Lad H være et Hilbertrum; lad B og T være to selvadjungerede operatorer på H med $B \in B(H)$.

Hvis B og T kommuterer, $BT \subseteq TB$, så er TB selvadjungeret og $TB = \overline{BT}$.

<u>øv 49</u> Lad F være en afsluttet delmængde af $\mathbb{C}$; lad μ være et positivt Radonmål på F. Sæt $H = L^2(\mu)$. For en målelig funktion $\phi: F \to \mathbb{C}$ definerer vi en operator M_ϕ på H ved $\mathcal{D}(M_\phi) = \{f \in H \mid \phi f \in H\}$, $M_\phi f = \phi f$ for $f \in \mathcal{D}(M_\phi)$.

Vis, at M_ϕ er normal og at $M_\phi^* = M_{\overline{\phi}}$. Beskriv spektret for M_ϕ.

<u>øv 50</u> Lad H være et Hilbertrum; lad N være en normal operator på H. Sæt $A = \overline{\frac{1}{2}(N + N^*)}$, $B = \overline{\frac{1}{2i}(N - N^*)}$.

Vis, at A og B er selvadjungerede, og at $N = A + iB$ og $N^* = A - iB$.

<u>øv 51</u> Lad H være et Hilbertrum. Lad A og B være selvadjungerede operatorer på H; antag, at enhver spektralprojektion for A kommuterer med enhver spektralprojektion for B. Vis, at $A + iB$ er en normal operator N, $N^* = A - iB$, og $A = \overline{\frac{1}{2}(N + N^*)}$, $B = \overline{\frac{1}{2i}(N - N^*)}$.

<u>øv 52</u> Lad H være et Hilbertrum, N en normal operator på H med spektralfremstilling $N = \int_{\sigma(N)} z \, dE(z)$.

Lad f og g være to målelige funktioner på $\sigma(N)$. Antag, at der findes $\varepsilon > 0$ og $K > 0$, så at $|f(z)| > \varepsilon$, hvergang $|g(z)| > K$; sæt, som vanlig, $\int_{\sigma(N)} f(z)\, dE(z) = f(N)$ og tilsv..

Vis, at $fg(N) = f(N)g(N)$.

Vis, f.eks. ved induktion efter n, at N^n er normal for ethvert $n \in \mathbb{N}$, idet $N^n = \int_{\sigma(N)} z^n\, dE(z)$.

Vis, at for $P \in \mathbb{C}[x]$, $P(x) = \lambda_n x^n + \lambda_{n-1}x^{n-1} + \cdots + \lambda_o$, med $\lambda_n \neq 0$, er $\lambda_n N^n + \lambda_{n-1}N^{n-1} + \cdots + \lambda_o 1 = \int_{\sigma(N)} P(z)dE(z)$; denne operator $P(N)$ er således normal. Hvis specielt $N = N^*$ og $P \in \mathbb{R}[x]$, er $P(N)$ selvadjungeret.

<u>øv 53</u> Lad H være et Hilbertrum. Lad A være en abelsk del C*-algebra af $B(H)$, med $1 \in A$. Antag, at det om en enhedsvektor $x \in H$ gælder, at Ax er tæt i H (x kaldes da en cyklisk vektor for A). Lad Δ betegne spektret for A og ϕ den omvendte afbildning til Gelfandtransformeringen. ϕ er altså en isomorfi og isometri af $C(\Delta)$ på A. Lad μ betegne sandsynlighedsmålet $f \mapsto (\phi(f)x|x)$ på Δ.

Vis, at der findes én isometri Φ af $L^2(\mu)$ på H med egenskaben: $\Phi(f) = \phi(f)x$ for $f \in C(\Delta)$.

Vis, at for $f \in C(\Delta)$ og $g \in L^2(\mu)$ er $\Phi(fg) = \phi(f)\Phi(g)$, eller, med betegnelsen M_f for operatoren $g \mapsto fg$, $\phi(f) = \Phi M_f \Phi^{-1}$. A er altså unitært ækvivalent med en algebra af multiplikationsoperatorer.

<u>øv 54</u> Lad der være givet en mængde X, en σ-algebra B af delmængder af X, et Hilbertrum H, og et projektionsmål $E : B \to B(H)$. Lad $f, f_1, f_2, \cdots$ være målelige funktioner $X \to \mathbb{C}$; antag $f_n(x) \to f(x)$ for næ-

sten alle $x \in X$.

Sæt $D = \{\xi \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m \geq n}^{\infty} \mathcal{D}(E(f_m)) \mid E(f_m)\xi$ er konvergent$\}$.

a) Vis, at D er et underrum af $\mathcal{D}(E(f))$, og at $E(f)\xi = \lim_m E(f_m)\xi$ for $\xi \in D$. (Anvend f.eks. Fatou's lemma på $\int_X |f_m - f_n|^2 \, dE_{\xi,\xi}$).

b) Vis, at $E(f)$ er afslutning af $E(f)|D$.

c) Lad A være en operator på H; sæt $C^\infty(A) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{D}(A^n)$ og $C^\omega(A) = \{\xi \in C^\infty(A) \mid \exists\, a, b > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}: \|A^n\xi\| \leq ab^n n!\}$. Vektorerne i $C^\omega(A)$ kaldes analytiske vektorer for A.

Vis, at hvis A er normal og $\xi \in C^\omega(A)$, så er $e^{tA}\xi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n \xi$ for $|t|$ tilstrækkeligt lille, $|t| < b^{-1}$.

Vis, at $C^\omega(A)$ er tæt i H, når A er normal.

<u>øv 55</u> Lad H være et Hilbertrum, A en operator på H, ξ en analytisk vektor for A med $\|A^n\xi\| \leq ab^n n!$ (jrf. øv 54 c)).

a) $\forall\, k \in \mathbb{N}\ \exists\, a_k > 0\ \forall n \in \mathbb{N}: \|A^{n+k}\xi\| \leq a_k (2b)^n n!$

b) $(\lambda_k A^k + \lambda_{k-1} A^{k-1} + \cdots + \lambda_0)\xi \in C^\omega(A)$

for ethvert polynomium $P = \lambda_k X^k + \lambda_{k-1} X^{k-1} + \cdots + \lambda_0 \in C[X]$, og $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n P(A)\xi$ er konvergent for $|t| < (2b)^{-1}$.

<u>øv 56</u> Lad H være et Hilbertrum, over $\mathbb{C}$ som sædvanlig. $(x, y) \mapsto \mathrm{Re}(x|y)$ er et indre produkt på det underliggende reelle vektorrum for H, der forsynet med dette indre produkt er et Hilbertrum $H_{\mathbb{R}}$ over $\mathbb{R}$.

Operatorer på H kan også opfattes som operatorer på $H_{\mathbb{R}}$; $B(H)$ bliver herved identificeret med et underrum af $B(H_{\mathbb{R}})$; specielt er $x \mapsto ix$ en lineær isometri I af $H_{\mathbb{R}}$ på $H_{\mathbb{R}}$ (en orthogonal operator på $H_{\mathbb{R}}$) med $I^2 = -1$,

og en operator A på $H_{\mathbb{R}}$ er en operator på H, altså kompleks lineær, hvis og kun hvis A kommuterer med I, $IA \subseteq AI$.

Et Hilbertrum K over $\mathbb{R}$ har form $H_{\mathbb{R}}$, hvis og kun hvis der findes en orthogonal operator I på K med $I^2 = -1$; i givet fald organiseres K som et Hilbertrum H over $\mathbb{C}$ ved skalarmultiplikation $(a+ib,x) \to ax + bIx$ og det indre produkt $(x|y)_{\mathbb{C}} = (x|y) - i(Ix|y)$.

En operator C på $H_{\mathbb{R}}$ kaldes konjugeret lineær eller antilineær, hvis $IC \subseteq -CI$, altså hvis $\mathcal{D}(C)$ er et underrum af H og $C(\lambda x) = \overline{\lambda}Cx$ for $\lambda \in \mathbb{C}$, $x \in \mathcal{D}(C)$.

Vis, at en operator A på $H_{\mathbb{R}}$ er sum af en kompleks lineær og en konjugeret lineær operator, hvis og kun hvis $\mathcal{D}(A)$ er et underrum af H, og at opspaltningen i givet fald er entydigt bestemt.

En antilineær orthogonal operator på $H_{\mathbb{R}}$ kaldes en antiunitær operator på H. En antiunitær operator U opfylder: $\forall\, x, y \in H : (Ux|Uy) = (y|x)$.

<u>øv 57</u> a) Lad K være et Hilbertrum over $\mathbb{R}$. $K \times K$ organiseres som et Hilbertrum $K_{\mathbb{C}}$ over $\mathbb{C}$ med skalarmultiplikation $(a+ib)(x,y) = (ax - by, ay + bx)$ og indre produkt $((x,y)|(u,v))_{\mathbb{C}} = (x|u) + (y|v) + i[(y|u)-(x|v)]$. $(K_{\mathbb{C}})_{\mathbb{R}}$ er det reelle Hilbertrum $K \times K$.

b) Lad H være et Hilbertrum over $\mathbb{C}$. En konjugering på H er en antiunitær operator J på H, der opfylder $J^2 = 1$. F.eks. er $(x,y) \to (x,-y)$ en konjugering på $K_{\mathbb{C}}$.

For enhver orthonormal basis $(x_i)_{i\in I}$ for H findes der én konjugering J på H, for hvilken $Jx_i = x_i$ for alle $i \in I$.

c) Lad H være et Hilbertrum over $\mathbb{C}$, J en konjugering på H. $\{x \in H \mid Jx = x\}$ er et reelt Hilbertrum K, og $(x,y) \to x + iy$ er en isomorfi og isometri af $K_{\mathbb{C}}$ på H.

d) Hvis J_1 og J_2 er to konjugeringer på H, findes der en unitær operator U på H, så at $J_2 = UJ_1U^{-1}$.

<u>øv 58</u> Lad H være et Hilbertrum, J en konjugering på H.

a) Lad A være en symmetrisk operator på H; hvis $JA \subseteq AJ$, er $JR(A - i) = R(A + i)$. Hvis også A er tæt defineret, har A en selvadjungeret udvidelse.

b) Enhver operator på $L^2(\mathbb{R})$ af form $Af = -pf'' - p'f' + qf$, $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, p, p' og $q \in C(\mathbb{R})$, p og q reelle, har en selvadjungeret udvidelse.

<u>øv 59</u> Lad H være et Hilbertrum, A en operator på H, x en vektor i $C^\infty(A) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{D}(A^n)$. Sæt $\mathcal{D}(x)$ = underrummet af H udspændt af $x, Ax, A^2x, \cdots$, og $\mathcal{M}(x) = \overline{\mathcal{D}(x)}$. x kaldes en cyklisk vektor for A, hvis $\mathcal{M}(x) = H$.

Definer en operator A_x på $\mathcal{M}(x)$ ved $\mathcal{D}(A_x) = \mathcal{D}(x)$, $A_xy = Ay$ for $y \in \mathcal{D}(A_x)$.

Vis, at der findes én konjugering J på $\mathcal{M}(x)$, der opfylder $Jx = x$ og $JA_x = A_xJ$, når A er symmetrisk.

Vis, at A_x kan udvides til en selvadjungeret operator på $\mathcal{M}(x)$. (Jfr. øv 58 a)).

<u>øv 60</u> Lad H være et Hilbertrum, A en symmetrisk operator på H, x en analytisk vektor for A, med $\|A^nx\| \leq ab^n n!$ for alle n (jfr. øv 54). Sæt $\mathcal{D}(x)$ =

underrummet af H udspændt af $x, Ax, A^2x, \cdots$, og $\mathcal{M}(x) = \overline{\mathcal{D}(x)}$. For hvert $y \in \mathcal{D}(x)$ findes $a_y > 0$, så at $\|A^n y\| \leq a_y (2b)^n n!$ for alle n (jfr. øv 55).

Lad B og C være selvadjungerede operatorer på $\mathcal{M}(x)$, der udvider $A_x = A|\mathcal{D}(x)$ (jfr. øv 59).

For $y \in \mathcal{D}(x)$ og $|t| < (2b)^{-1}$ er $e^{itB}y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n}{n!} A^n y = e^{itC}y$. Vis, at $B = C$, og at $\overline{A_x}$ er en selvadjungeret operator på $\mathcal{M}(x)$.

Vis, at hvis $C^\omega(A)$ er tæt i H, så er $\overline{A}$ selvadjungeret (E. Nelson 1959). (Til $x \in H$ og $\varepsilon > 0$ findes $y \in C^\omega(A)$ med $\|x - y\| < \varepsilon$; da $\overline{A|\mathcal{D}(y)}$ er selvadjungeret på $\overline{\mathcal{D}(y)}$ er $\overline{(A - i)\mathcal{D}(y)} = \overline{\mathcal{D}(y)}$. For $z \in \mathcal{D}(y)$, så $\|(A - i)z - y\| < \varepsilon$, er $\|(A - i)z - x\| < 2\varepsilon$. Tilsvarende er $R(A + i)$ tæt i H).

<u>øv 61</u> Lad H være et Hilbertrum, A og B to symmetriske operatorer på H.

En operator C på H kaldes jo positiv, $0 \leq C$, hvis $(Cx|x) \geq 0$ for alle $x \in \mathcal{D}(C)$. Positive operatorer er specielt symmetriske.

Hvis A og B er positive, og $A = A^*$, defineres $A \leq B$, hvis $\mathcal{D}(B) \subseteq \mathcal{D}(A^{\frac{1}{2}})$ og $\forall\, x \in \mathcal{D}(B)$: $\|A^{\frac{1}{2}}x\|^2 \leq (Bx|x)$.

a) Hvis $A = A^* \geq 0$ og $\mathcal{D}(B) \subseteq \mathcal{D}(A)$ og $\forall\, x \in \mathcal{D}(B)$: $0 \leq (Ax|x) \leq (Bx|x)$, så er $A \leq B$. Hvis $A \in B(H)$ og $A \geq 0$ gælder: $0 \leq A \leq B$ hvis og kun hvis $(Ax|x) \leq (Bx|x)$ for alle $x \in \mathcal{D}(B)$.

b) Hvis A og B er selvadjungerede og positive, er følgende betingelser ækvivalente:

1) $A \leq B$

2) $\mathcal{D}(B^{\frac{1}{2}}) \subseteq \mathcal{D}(A^{\frac{1}{2}})$ og $\forall\, x \in \mathcal{D}(B^{\frac{1}{2}})$: $\|A^{\frac{1}{2}}x\| \leq \|B^{\frac{1}{2}}x\|$

3) $\exists\, C \in B(H)$: $\|C\| \leq 1$ og $A^{\frac{1}{2}} \supseteq CB^{\frac{1}{2}}$

4) $\exists\, C \in B(H)$: $\|C\| \leq 1$ og $A^{\frac{1}{2}} \subseteq B^{\frac{1}{2}}C^*$.

c) Hvis A og B er selvadjungerede og A er injektiv og $0 \leq A \leq B$, så er B injektiv og $0 \leq B^{-1} \leq A^{-1}$.

d) Lad X være en mængde, B en σ-algebra af delmængder af X, og E et projektionsmål: $B \to B(H)$. Når f og g er målelige funktioner på X, gælder:

$0 \leq f \leq g$ n.o. $\Leftrightarrow 0 \leq \int_X f\, dE \leq \int_X g\, dE$.

<u>øv 62</u> Lad μ være et Radonmål ≥ 0 på $\mathbb{R}$. Når $k: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ er en funktion, der er kvadratisk integrabel m.h.t. $\mu \times \mu$, og f er kvadratisk integrabel m.h.t. μ, så er $x \mapsto k(x,y)f(x)$ μ integrabel for n.a. y, $y \mapsto \int_{\mathbb{R}} k(x,y)f(x)\, dx$ er en μ kvadratisk integrabel funktion Kf, og $\int_{\mathbb{R}} |\int_{\mathbb{R}} k(x,y)f(x)\, dx|^2\, dy \leq \|k\|_2^2 \|f\|_2^2$. $f \mapsto Kf$ definerer en operator $K \in B(L^2(\mu))$ med $\|K\| \leq \|k\|_2$. Disse operatorer kaldes Hilbert-Schmidt operatorer.

a) $k \mapsto K$ er injektiv: $L^2(\mu \times \mu) \to B(L^2(\mu))$.

b) Hvis k er en trappefunktion, er K en operator af endelig rang; for ethvert $k \in L^2(\mu \times \mu)$ er K kompakt.

c) For $k \in L^2(\mu \times \mu)$ defineres $k^* \in L^2(\mu \times \mu)$ ved $k^*(x,y) = \overline{k(y,x)}$; den tilsvarende operator er K^*.

d) Hvis K er normal, f.eks. hvis $k = k^*$ $\mu \times \mu$ n.o., så udgøres spektret $\sigma(K)$ af en følge af komplekse tal, der konvergerer mod nul, hvert punkt $\lambda \in \sigma(K) \setminus \{0\}$ er egenværdi af endelig multiplicitet m_λ, og $\sum_{\lambda \in \sigma(K)} m_\lambda |\lambda|^2 = \|k\|_2^2 < \infty$. (Hvis $(\phi_{\lambda,\nu})_{\lambda \in \sigma(K), \nu = 1,2,\cdots,m_\lambda}$

er egenfunktionerne, så er

$$Kf = \sum_{\lambda\in\sigma(K)} \sum_{\nu=1}^{m_\lambda} (f|\phi_{\lambda,\nu})\lambda\, \phi_{\lambda,\nu}; \quad \{(x,y) \mapsto \phi_{\lambda,\nu}(x)\overline{\phi_{\lambda,\nu}(y)}$$

$\lambda \in \sigma(K)$, $\nu = 1,2,\cdots,m_\lambda\}$ er et orthogonalsystem i $L^2(\mu \times \mu)$, og k's Fourierkoefficienter efter dette system er egenværdierne).

<u>øv 63</u> Lad H være et Hilbertrum. Lad $(e_i)_{i\in I}$ være en orthonormal tilnærmelsesbasis for H. For $A \in B(H)$ defineres: $\|A\|_2^2 = \sum_{i\in I} \|Ae_i\|^2$. $\|\ \|_2$ kaldes Hilbert-Schmidt normen.

a) Hvis $(f_j)_{j\in J}$ er en orthonormal basis for H, er $\sum_{i\in I} \|Ae_i\|^2 = \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} |(Ae_i|f_j)|^2 = \sum_{j\in J} \|A^*f_j\|^2$. Derfor er Hilbert-Schmidt normen uafhængig af valget af orthonormal basis for H, og A og A^* og $|A|$ har samme H.-S. norm.

b) Mængden af operatorer med endelig H.-S. norm er et tosidet ideal i $B(H)$.

c) Lad A være en operator med endelig H.-S. norm; lad $A = v|A|$ være polardekomponeringen af A. $\sigma(|A|)$ er en følge af positive tal, der konvergerer mod 0, og evt. 0, og hvert $\lambda \in \sigma(|A|)\setminus\{0\}$ er egenværdi af endelig multiplicitet m_λ, og $\sum_{\lambda\in\sigma(|A|)} m_\lambda\lambda^2 < \infty$. Hvis $(\phi_{\lambda,\nu})_{\lambda\in\sigma(|A|),\nu=1,2,\cdots,m_\lambda}$ er egenvektorerne, er

$$Ax = \sum_{\lambda\in\sigma(|A|)} \sum_{\nu=1}^{m_\lambda} (x|\phi_{\lambda,\nu})\lambda v\phi_{\lambda,\nu}, \quad x \in H.$$

d) Lad μ være et Radonmål ≥ 0 på $\mathbb{R}$. For $H = L^2(\mu)$ er mængden af Hilbert-Schmidt operatorer (jfr. øv 62) lig med mængden af operatorer $\in B(H)$ med endelig H.-S. norm. Hvis $k \in L^2(\mu \times \mu)$ og K er den tilsvarende integraloperator, er $\|k\|_2 = \|K\|_2$.

øv 64 Lad H være et Hilbertrum, og A en tæt defineret symmetrisk operator på H.

a) Hvis B er en selvadjungeret operator, A og B er positive, og $A \subseteq B$, så er $B \leq A$ (jfr. øv 61).

b) Antag $A \geq 1$. Lad K_o betegne $\mathcal{D}(A)$ forsynet med det indre produkt $(f, g) \mapsto (Af|g)$. Lad K betegne fuldstændiggørelsen af K_o, og i udvidelsen af den identiske afbildning af K_o på $\mathcal{D}(A)$ til en kontinuert lineær afbildning af K ind i H. $\|i\| \leq 1$; for $f \in K_o$ og $g \in K$ er $(f|g) = (Aif|ig)$. $i^* A i \subseteq 1_K$.

c) i og i^* er injektive. $(i^{-1})^* i^{-1} = (i\, i^*)^{-1}$ er en positiv selvadjungeret udvidelse $\tilde{A} \geq 1$ af A (Friedrichs udvidelsen).

d) Hvis B er en positiv selvadjungeret operator, der udvider A, så er $B \leq \tilde{A}$; $\tilde{A}^{\frac{1}{2}} = \overline{\tilde{A}^{\frac{1}{2}}|\mathcal{D}(A)}$.

e) Enhver nedad begrænset tæt defineret symmetrisk operator har en selvadjungeret udvidelse med samme nedre grænse. Hvis $A \geq c$ og $\tilde{A}$ = (Friedrichs udvidelsen af $A - c + 1$) $+ c - 1$, kaldes $\tilde{A}$ igen Friedrichs udvidelsen af A.

øv 65 a) Vis, at for to vilkårlige elementer A og B i en C*-algebra gælder $\|AB\|^2 \leq \|A^*ABB^*\|$ (Brug f.eks., at $\rho(B^*A^*AB) = \rho(A^*ABB^*)$).

b) Vis, at hvis A og B er begrænsede positive operatorer på et Hilbertrum H, A og $B \in B(H)$, og $A \leq B$, så er $A^{\frac{1}{2}} \leq B^{\frac{1}{2}}$ (Antag f.eks. først, at $0 < \varepsilon \leq A$, og brug $\|A^{1/4}B^{-1/4}\|^2 \leq \|A^{\frac{1}{2}}B^{-\frac{1}{2}}\|$; jfr. øv 61).

c) Hvis A og B er selvadjungerede operatorer på et Hilbertrum H, og $0 \leq A \leq B$, så er $A^{\frac{1}{2}} \leq B^{\frac{1}{2}}$ $(0 \leq A \leq B \Rightarrow \forall\, \varepsilon > 0 : (B + \varepsilon)^{-1} \leq (A + \varepsilon)^{-1} \Rightarrow \forall\, \varepsilon > 0 :$ $A^{\frac{1}{2}} \leq (A + \varepsilon)^{\frac{1}{2}} \leq (B + \varepsilon)^{\frac{1}{2}})$.

d) Vis, at $0 \leq A \leq B$ ikke medfører $A^2 \leq B^2$ (Led f.eks. i $B(\mathbb{C}^2)$).

øv 66 Lad H være et Hilbertrum. Lad A være en afsluttet, tæt defineret, symmetrisk operator på H. Sæt $B = \overline{A|\mathcal{D}(A^2)}$.

a) Hvis A^2 er tæt defineret, har A^2 Friedrichs udvidelsen B^*B (jfr. øv 64; rummet K, der optræder i forbindelse med udvidelsen af $A^2 + 1$, kan identificeres med grafen for B, og $i^*f = P(B)(f,o)$, $f \in H$, jfr. øv 37).

b) Hvis A har et endeligt defekt index, er A^2 tæt defineret (jfr. øv 31) og $B = A$, idet $\overline{(A - i)|\mathcal{D}(A^2)}^{-1} = \overline{(A - i)^{-1}|\mathcal{D}(A + i) \cap R(A - i)} = (A - i)^{-1}$ eller tilsvarende for $A + i$, så A^2 har Friedrichs udvidelsen A^*A.

c) Antag $H = L^2([0, 1])$, $\mathcal{D}(T) = \{f \in C^1([0, 1]) | f' \in AC([0, 1]), f'' \in H\}$, $Tf = -f''$ for $f \in \mathcal{D}(T)$. T^* er symmetrisk, med $\mathcal{D}(T^*) = \{f \in \mathcal{D}(T) \mid f(0) = f'(0) = f(1) = f'(1) = 0\}$. Find Friedrichs udvidelsen af T^*.

øv 67 Lad H^2 være det i Rudin Ch. 13 ex 9 betragtede Hilbertrum af holomorfe funktioner på $D(0, 1) = D$.

Vis, at det indre produkt i H^2 er givet ved

$$(f|g) = \lim_{r\to 1^-} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})\overline{g(re^{i\theta})}\, d\theta.$$

For $f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z$ er $a_\nu = (f|z^\nu)$.

Vis, at der for $w \in D$ findes $k_w \in H^2$, så at $(f|k_w) = f(w)$ for $f \in H^2$ (Brug f.eks., at $|\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu|^2 \leq \sum_{\nu=0}^{\infty} |a_\nu|^2(1 - r^2)^{-1}$ for $|z| \leq r < 1$). Vis, at

$(k_w | z^\nu) = \bar{w}^\nu$, $\nu = 0, 1, 2, \cdots$ og find k_w.

Lad $V \in B(H^2)$ være givet ved $(Vf)(z) = zf(z)$, $f \in H^2$. Vis, at $V^* k_w = \bar{w}\, k_w$.

For $f \in H^2$, $f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$, er $(\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu e^{i\nu\theta})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent i $L^2([0, 2\pi])$ med en grænseværdi $\hat{f}$. Vis, at $\int_0^{2\pi} |\hat{f}(e^{i\theta}) - f(re^{i\theta})|^2 \, d\theta \to 0$ for $r \to 1^-$, og at

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})(1 - ze^{-i\theta})^{-1} \, d\theta.$$

<u>øv 68</u> Find, f.eks. på $H = L^2([0, 1])$, selvadjungerede operatorer $B \in B(H)$ og T, så at TB ikke er tæt defineret og BT ikke kan afsluttes. (T kan f.eks. være den i Rudin 13, 4 behandlede operator T_2, og B kan vælges, så BH har dimension én).

<u>øv 69</u> Lad X være et vektorrum over $\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$. Lad A og B være disjunkte, ikke-tomme, konvekse delmængder af X. Antag, at der findes $a_o \in A$, for hvilket $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} n(A - a_o)$. Vis, at der findes en lineær funktional ϕ på X og $\gamma \in \mathbb{R}$ med egenskaberne:

$\operatorname{Re} \phi(a_o) < \gamma$

$\forall\, a \in A\ \forall\, b \in B : \operatorname{Re} \phi(a) \leq \gamma \leq \operatorname{Re} \phi(b)$.

(Antag gerne, at skalarlegemet er $\mathbb{R}$, og at $a_o = 0$. Vis, at der findes disjunkte konvekse delmængder C og D af X med $A \subseteq C$, $B \subseteq D$ og $X = C \cup D$ (Zorn's lemma). Sæt $E = \{x \in X \mid]-\infty, 1[\, x \subseteq C,\ ]1,\infty[\, x \subseteq D\}$. For $y \in D$ findes $\lambda(y) \in \mathbb{R}$, $\lambda(y) > 0$, så at $\lambda(y)y \in E$. Vælg $y_o \in E$. $E - y_o = \{x \in X \mid \mathbb{R}x \subseteq C\}$, og denne mængde er et underrum F af X. Ethvert punkt $x \in X$ kan på én måde skrives $x = \phi(x)y_o + f$ med $\phi(x) \in \mathbb{R}$ og $f \in F$.

<u>øv 70</u> Lad H være et Hilbertrum. En operator $S \in B(H)$ kaldes en spejling (eller korrektere en orthogonal spejling), hvis der findes et afsluttet underrum K af H, så at $Sx = x$ for $x \in K$, og $Sy = -y$ for $y \perp K$.

Vis, at følgende egenskaber er ækvivalente for $S \in B(H)$:

a) S er en spejling

b) $\frac{1}{2}(S + 1)$ er en projektion

c) S er unitær og selvadjungeret

d) $(S^* - 1)(S + 1) = 0$.

Gør rede for, at $f \mapsto \check{f}$, hvor $\check{f}(t) = f(-t)$, definerer en spejling på $L^2(\mathbb{R})$.

<u>øv 71</u> Lad H være et Hilbertrum over $\mathbb{C}$, V en unitær operator på H og U en antiunitær operator på H.

a) Hvis $UV = VU$ og λ er en egenværdi for V, så er $\bar{\lambda}$ egenværdi for V med samme multiplicitet som λ.

b) Hvis U^2 er proportional med 1, så er $U^2 = 1$ eller $U^2 = -1$.

<u>øv 72</u> Lad $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ være en følge af reelle tal, der opfylder

$\forall\, n, m \in \mathbb{N} : a_{n+m} \leq a_n + a_m$.

Vis, at enten er $n^{-1}a_n$ konvergent med grænseværdi $\inf_{n\in\mathbb{N}} n^{-1}a_n$, eller $n^{-1}a_n \to -\infty$ og $\inf_{n\in\mathbb{N}} n^{-1}a_n = -\infty$, for $n \to \infty$.

<u>øv 73</u> Lad A være en normeret algebra med ételement over $\mathbb{C}$. For $\alpha \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ gælder det, at $(\alpha^{-1}x)^n \to 0$ for $n \to \infty$, hvis og kun hvis $\lim \|x^n\|^{1/n} < |\alpha|$.

Vis, at afbildningen $y \mapsto y(1 - y)^{-1}$ afbilder sin definitionsmængde homeomorft på sin værdimængde.

øv 74 Lad der være givet en funktion $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Definer Lebesgue mængden L_f for f ved

$$L_f = \{x_o \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{h}\int_{x_o}^{x_o+h} |f(x) - f(x_o)|\, dx \to 0 \quad \text{for} \quad h \to 0\}.$$

Vis, at $\mathbb{R} \setminus L_f$ har Lebesguemål nul.
(Til $r \in \mathbb{Q}$ og $F_r(x) = \int_o^x |f(t) - r|\, dt$ findes en nulmængde Y_r, så at for $x_o \notin Y_r$ er F_r differentiabel i x_o og $F_r'(x_o) = |f(x_o) - r|$. $\mathbb{R} \setminus \bigcup_{r\in\mathbb{Q}} Y_r \subseteq L_f$, idet vi for $x_o \notin \bigcup_{r\in\mathbb{Q}} Y_r$ og $\varepsilon > 0$ og passende $r \in \mathbb{Q}$ har $|f(x) - f(x_o)| < |f(x) - r| + \varepsilon$.)

øv 75 Lad for $a > 0$ f_a betegne funktionen $x \mapsto e^{-ax^2}$, $x \in \mathbb{R}$. Find, for $a > 0$, $\hat{f}_a$. Find, for a og $b > 0$, $f_a * f_b$.

øv 76 Lad H være et Hilbertrum og T en lineær afbildning af H ind i H. Lad $H_{1\sigma}$ betegne enhedskuglen i H forsynet med svag topologi (jfr. øv 41). Vis, at T er en kompakt operator på H, hvis og kun hvis T's restriktion til enhedskuglen er en kontinuert afbildning af $H_{1\sigma}$ ind i H (forsynet med norm-topologi), og hvis og kun hvis T afbilder enhver svagt konvergent følge i en normkonvergent følge, og hvis og kun hvis T afbilder enhedskuglen på en norm-kompakt mængde.

Overvej situationen for en operator $T^* \in B(X^*)$, hvor X er et Banachrum med dualt rum X^*, og $T \in B(X)$.

øv 77 Vis, at et afsluttet underrum af Banachalgebraen $L^1(\mathbb{R})$ er et ideal, hvis og kun hvis det er translationsinvariant.

øv 78 Lad f være en kompleks funktion på $\mathbb{R}$.

Vis, at der findes $\phi \in L^1(\mathbb{R})$ med Fouriertransformeret $\hat{\phi} = f$, hvis og kun hvis der findes g og $h \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ med $g * h = f$.

<u>øv 79</u> Lad der være givet et begrænset mål $\mu \geq 0$ på $\mathbb{R}$.

a) Vis, at $\|\hat{\mu}\|_\infty = \hat{\mu}(0) = \mu(\mathbb{R})$.

b) Vis, at $\hat{\mu}(t) = e^{i\gamma}\hat{\mu}(0)$, hvor $t \neq 0$, hvis og kun hvis μ er koncentreret i $\frac{2\pi}{t}\mathbb{Z} + \frac{\gamma}{t}$.

c) Lad der være givet en funktion $f \geq 0$ i $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Vis, at $\|\hat{f}\|_\infty = \|f\|_1$.

d) Find en funktion $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, for hvilken $\|\hat{g}\|_\infty < \|g\|_1$.

e) Vis, at $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ opfylder $\|\hat{g}\|_\infty = \|g\|_1$, hvis og kun hvis der findes $t \in \mathbb{R}$ og $c \in \mathbb{T}$, så at $g(x) = ce^{itx}|g(x)|$ for næsten alle $x \in \mathbb{R}$.

f) Hvis $\alpha \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$, $t \in \mathbb{R}$, og $|\hat{\alpha}(t)| = \|\alpha\|$, så har α form $\alpha = ce^{it\cdot}|\alpha|$, $c \in \mathbb{T}$. ($\alpha = \phi|\alpha|$, hvor $|\phi| = 1$ $|\alpha|$ næsten overalt, i følge Lebesgue-Radon-Nikodym's sætning).

g) Målet $\alpha = \varepsilon_1 - \varepsilon_\pi$ tilhører $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ og $\|\hat{\alpha}\|_\infty = \|\alpha\| = 2$, men $|\hat{\alpha}(t)| < 2$ for ethvert $t \in \mathbb{R}$.

h) $\beta = \varepsilon_1 - \varepsilon_\pi + \varepsilon_{\pi^2} \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$, $\|\hat{\beta}\|_\infty = \|\beta\| = 3$, men β har ikke form $\beta = ce^{it\cdot}|\beta|$, da π er transcendent.

<u>øv 80</u> Lad der være givet en operator $A \in B(H)$, hvor H er et Hilbertrum over $\mathbb{C}$. Med betegnelser som i Rudin: Functional Analysis Ch. 12 ex 18 gælder (idet $^-$ betegner konjugering):

$$\sigma_r(A^*) \subseteq \overline{\sigma_p(A)}$$
$$\sigma_p(A^*) \subseteq \overline{\sigma_p(A)} \cup \overline{\sigma_r(A)}$$

$$\sigma_r(A^*) \cup \sigma_p(A^*) = \overline{\sigma_r(A) \cup \sigma_p(A)}$$
$$\sigma_c(A^*) = \overline{\sigma_c(A)}.$$

<u>øv 81</u> a) Lad A være en Lebesgue målelig delmængde af $\mathbb{R}$ med mål > 0. Vis, at $A - A$ er en omegn af 0. (Antag gerne $m_1(A) < \infty$ og betragt $1_A * \check{1}_A$). Hvis også A er en undergruppe af $\mathbb{R}$, er $A = \mathbb{R}$.

b) Lad G være en Hausdorff topologisk gruppe. Antag, at der til en vilkårlig omegn V af e i G findes en følge $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ af punkter i G, så at $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} g_n V$. Dette er f.eks. opfyldt, hvis G har numerabel basis for topologien, eller hvis G er foreningsmængde af en følge af kompakte delmængder.

Vis, at enhver Lebesgue målelig homomorfi af $\mathbb{R}$ ind i G er kontinuert.

<u>øv 82</u> a) Find $1_{[-n,n]} * 1_{[-1,1]}$, for $n \in \mathbb{N}$, og find $\hat{1}_{[-n,n]}$.

b) Find $f_n \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, så at $\hat{f}_n = 1_{[-n,n]} * 1_{[-1,1]}$.

c) Vis, at $\{\hat{f} \mid f \in L^1(\mathbb{R})\}$ ikke er en afsluttet del af $C_o(\mathbb{R})$.

<u>øv 83</u> Lad H og K være to Hilbertrum, A en operator fra H til K og B en operator fra K til H. Antag, at

$$\forall x \in \mathcal{D}(A)\ \forall y \in \mathcal{D}(B):\ (Ax|y) = (x|By).$$

a) Vis, at $\ker A \subseteq R(B)^{\perp}$

b) Antag, at

$\ker A$ er afsluttet,

$(\ker A)^{\perp} \subseteq R(B)$,

$R(A)^{\perp} \subseteq \ker(B)$.

Vis, at $H = R(B) \oplus \ker A$, og at $K = \overline{R(A)} \oplus \ker B$.

Vis, at A er tæt defineret, og at $A^* = B$.

b) Hvis $\ker B$ er endelig dimensional, og $R(A)$ har form $(\ker B)^\perp \cap V$, hvor V er et tæt underrum i K, så er $R(A)^\perp \subseteq \ker B$ (jfr. øv 10).

d) Hvis $R(B) = H$ og $R(A)^\perp \subseteq \ker B$, så er $A^* = B$.

e) Lad T være en symmetrisk operator på H. Hvis der findes $C \in B(H)$, så at $T + C$ og $T + C^*$ er surjektive, så er T selvadjungeret.

<u>øv 84</u> Lad A være en afsluttet, tæt defineret, symmetrisk operator på et Hilbertrum H.

Vis, at $R(1 + A^2) = \ker(1 + A^{*2})^\perp = R(A + i) \cap R(A - i)$.

Vis, at $(A^{*2})^* = A^2$.

Vis, at A^{*2} kan afsluttes, hvis og kun hvis A^2 er tæt defineret, og at i givet fald er $A^{2*} = \overline{A^{*2}}$.

Vis, at hvis $\ker(1 + A^{*2})$ er afsluttet, så er A^2 tæt defineret og $A^{2*} = A^{*2}$.

<u>øv 85</u> Lad A være en algebra over $\mathbb{C}$.

Antag følgende

1) A er endelig dimensional,

2) $\forall\, x,y \in A : \; xy = yx = 0 \Rightarrow x = 0 \vee y = 0$,

3) A har ételement 1.

Vis, at $A = \mathbb{C}\cdot 1$.

Vis, at betingelse 3) kan undværes.

<u>øv 86</u> 1) Vis, at hvis A er en kommutativ algebra over $\mathbb{C}$, og $\{0\}$ er et maksimalt ideal i A, og A ikke har et ételement, så er A isomorf med matriksalgebraen $\{\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{C}\}$.

2) Find de kommutative normerede algebraer over $\mathbb{C}$, i hvilke $\{0\}$ er et maksimalt ideal.

3) Find de kommutative ringe uden ételement, i hvilke $\{0\}$ er et maksimalt ideal.

<u>øv 87</u> Lad A være en kommutativ algebra over C.

1) Lad M være et maksimalt ideal i A. Vis, at hvis A/M ikke har et ételement, så er A/M isomorf med matriksalgebraen $\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a \in C\}$; vis, at $A^2 \subseteq M$.

2) Vis, at hvis ethvert element i A er en sum af produkter, så er ethvert maksimalt ideal M i A modulært ($\supset$: A/M har et ételement).

3) Vis, at idealet $\mathcal{K}(\mathbb{R})$ i $C_o(\mathbb{R})$ ikke er indeholdt i noget maksimalt ideal.

<u>øv 88</u> Lad A være en algebra over $\mathbb{R}$. Antag følgende

1) $\forall x \in A\ \exists n \in \mathbb{N}\ \exists a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}: a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n = 0$

2) $\forall x, y \in A: xy = yx = 0 \Rightarrow x = 0 \vee y = 0$

3) A har et ételement.

Sæt $V = \{x \in A \mid x^2 \in]-\infty, 0]\}$.

a) Vis, at ethvert element i A på én måde kan skrives $x = v + r$, $v \in V$, $r \in \mathbb{R}$.

b) Vis, at for x og $y \in V$ er $xy + yx \in \mathbb{R}$ og $x + y \in V$ (benyt f.eks. $\forall a, b \in \mathbb{R}\ \exists k \in \mathbb{R}$: $(ax + by)^2 + k(ax + by) \in \mathbb{R}$; vis $k = 0$ og brug a)). Vis, at V er et underrum af A.

c) Vis, at hvis V har dimension ≥ 2, kan vi vælge x og y i V, der opfylder $x^2 = y^2 = -1$, $xy + yx = 0$; hvis $z \in V$ opfylder $zx + xz = zy + yz = zxy + xyz = 0$, så er $z = 0$; vis, at (x, y, xy) er en basis for V.

d) Vis, at A er isomorf med $\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$ eller algebraen af kvaternioner.

e) Vis, at hvis B er en endeligdimensional algebra over $\mathbb{R}$, og

$\forall x,y \in B : \; xy = 0 \Rightarrow x = 0 \vee y = 0,$

så er B isomorf med $\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$ eller algebraen af kvaternioner. (Frobenius 1878).

<u>øv 89</u> Lad der være givet et Hilbertrum H og en afsluttet, tæt defineret operator T på H. Definér en operator S på Hilbertrummet $H \times H$ ved

$\mathcal{D}(S) = \{(x,y) \in H \times H \mid x \in \mathcal{D}(T)\}$

$S(x,y) = (x, 2Tx - y)$ for $(x,y) \in \mathcal{D}(S)$.

a) Vis, at S er en tæt defineret afsluttet operator på $H \times H$, og at $S^2 = 1|\mathcal{D}(S)$.

b) Find S^* og S^*S. Vis, at S^*S er afslutningen af sin restriktion til $\{(x,y) \in H \times H \mid x \in \mathcal{D}(T^*T),$ $y \in \mathcal{D}(T^*)\}$.

c) Vis, at hvis T er begrænset, er S begrænset, og find i dette tilfælde $\|S\|$ som funktion af $\|T\|$.

<u>øv 90</u> Lad H betegne Hilbertrummet $L^2([0, 1])$ (med hensyn til Lebesguemål). For $z \in \mathbb{T} = \{w \in \mathbb{C} \mid |w| = 1\}$ definerer vi en operator A_z på H ved

$\mathcal{D}(A_z) = \{f \in C^1([0, 1]) \mid f(1) = zf(0)\},$

$A_z f = if'$ for $f \in \mathcal{D}(A_z)$.

a) Find for hvert $z \in \mathbb{T}$ en funktion φ_z på $[0, 1]$ og et reelt tal λ_z med følgende egenskaber:

$\varphi_z f \in \mathcal{D}(A_z)$ hvis og kun hvis $f \in \mathcal{D}(A_1)$, og

$\overline{\varphi_z} A_z(\varphi_z f) = A_1 f + \lambda_z f$ for $f \in \mathcal{D}(A_1)$.

b) Vis, at $\overline{A_1}$ er selvadjungeret, og beskriv denne operator.

c) Vis, at $\overline{A_z}$ er selvadjungeret og find spektret for $\overline{A_z}$ for hvert $z \in \mathbb{T}$.

<u>øv 91</u> Lad m være et positivt translationsinvariant Radonmål $\neq 0$ på $\mathbb{R}$. Lad der være givet en funktion $k \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}) = \mathcal{L}^\infty(m)$ med den egenskab, at for enhver funktion $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) = \mathcal{L}^1(m)$ er

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \overline{f(-x)}\, f(y-x)\, dm(x)\, k(y)\, dm(y) \geq 0.$$

Sæt for $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$

$$\kappa(f) = \int_{\mathbb{R}} f(x)k(x)\,dm(x).$$

a) Vis, at for alle $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ er

$$|\kappa(g^* * f)| \leq \kappa(g^* * g)^{\frac{1}{2}}\, \kappa(f^* * f)^{\frac{1}{2}}.$$

b) Vis, f.eks. ved hjælp af en approksimativ enhed for $L^1(\mathbb{R})$, at for $n \in \mathbb{N}$ og $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ er

$$|\kappa(f)| \leq \|\kappa\|^{2^{-1}+2^{-2}+\ldots+2^{-n}}\, \kappa((f^* * f) * (f^* * f) * \ldots * (f^* * f))^{2^{-n}}$$

(med 2^{n-1} faktorer $f^* * f$).

c) Vis, at der findes et positivt begrænset Radonmål μ på $\mathbb{R}$ med den egenskab, at for ethvert $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ er

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ixt}\,dm(x)\,d\mu(t) = \int_{\mathbb{R}} f(x)k(x)\,dm(x).$$

d) Vis, at der findes et og kun ét positivt begrænset Radonmål μ på $\mathbb{R}$ med den egenskab, at for næsten alle $x \in \mathbb{R}$ er

$$k(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-itx}\,d\mu(t).$$

<u>øv 92</u> Lad der være givet et Hilbertrum H og en ubegrænset selvadjungeret operator A på H med spektral-

opløsning $A = \int_{\sigma(A)} t dE(t)$.

Det forudsættes bekendt, at for hvert $n \in \mathbb{N}$ er

$$A^n = \int_{\sigma(A)} t^n dE(t).$$

a) Vis for hvert $n \in \mathbb{N}$, at en vektor $x \in H$ tilhører $\mathcal{D}(A^n)$, hvis og kun hvis $\left(\int_{[-k,k]\cap\sigma(A)} t^n \, dE(t)x\right)_{k\in\mathbb{N}}$ er en Cauchy følge i H.

b) Vis, at der findes en følge $([a_i,b_i])$ af parvis disjunkte intervaller, med $b_i - a_i = 1$ og $E([a_i,b_i] \cap \sigma(A)) \neq 0$ for $i \in \mathbb{N}$.

c) Vis, at der findes en følge $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ af vektorer i $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{D}(A^n)$ med egenskaberne:

1) for hvert $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ er $(A^n x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et ortho-gonalsystem.

2) for hvert $i \in \mathbb{N}$ er $\| x_i \| = 1$.

3) for hvert $i \in \mathbb{N}$ og $n \in \mathbb{N}$ er $A^n x_i \neq 0$.

4) for hvert $n \in \mathbb{N}$ er $\lim_{i\to\infty} \| A^{n-1}x_i\| \, \| A^n x_i\|^{-1} = 0$.

5) for hvert $n \in \mathbb{N}$ og enhver følge $(\lambda_i)_{i\in\mathbb{N}}$ af komplekse tal med $\sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i|^2 < \infty$ gælder, at

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i x_i \in \mathcal{D}(A^n) \quad \text{hvis og kun hvis} \quad \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i|^2 \, \|A^n x_i\|^2 < \infty.$$

d) Vis, at for hvert $n \in \mathbb{N}$ er $\mathcal{D}(A^{n+1})$ et ægte underrum af $\mathcal{D}(A^n)$.

e) Vis, at for enhver afsluttet, tæt defineret, ubegrænset operator T på H er $\mathcal{D}(T^*T)$ et ægte underrum af $\mathcal{D}(T)$.

<u>øv 93</u> Lad der være givet et Hilbertrum H og en selvadjungeret projektion $E \in B(H)$.

a) Lad $F \in B(H)$ være en selvadjungeret projektion,

der kommuterer med E. Find polaropløsningen af $E - F$.

b) Vis, at enhver funktion af E kan skrives som en linearkombination af $1 - E$ og E.

c) Det forudsættes kendt, at den selvadjungerede projektion $P(T)$ på grafen for en afsluttet tæt defineret operator T på H kan beskrives ved matricen

$$\begin{pmatrix} (1+T^*T)^{-1} & T^*(1+TT^*)^{-1} \\ T(1+T^*T)^{-1} & TT^*(1+TT^*)^{-1} \end{pmatrix},$$

det vil sige, at

$$P(T)(x,y) = ((1+T^*T)^{-1}x+T^*(1+TT^*)^{-1}y,\ T(1+T^*T)^{-1}x+TT^*(1+TT^*)^{-1}y)$$

for $(x,y) \in H \times H$.

Sæt $P(E) = P$, og lad $Q \in B(H \times H)$ være projektionen $(x,y) \mapsto (0,y)$.

Find polaropløsningen

$$P - Q = U\,A$$

af $P - Q$.

d) Lad $S \in B(H \times H)$ være givet ved, at

$$S(x,y) = (x,\ 2Ex-y) \quad \text{for} \quad (x,y) \in H \times H.$$

Vis, idet U er den under c) indførte operator, at $US \geq 0$, og find polaropløsningen af S.

<u>øv 94</u> Lad A være en algebra over $\mathbb{C}$. Antag, at $\{0\}$ er et maksimalt tosidigt ideal i A. Vis, at hvis ikke A er isomorf med algebraen $\{\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{C}\}$, er $\{0\}$ et maksimalt tosidigt ideal i den underliggende ring. (Udnyt, at $A \cdot A$ udspænder 0 eller A).

An application of øv 42 to numerical analysis:

Gaussian Quadrature Formulas.

Hal McFaden

Let ω be a weight function on $[a, b]$, as in øv 42.

Fix n. The object is to find points $x_1, x_2, \ldots, x_n$ in $[a, b]$ and "weights" $\{H_k\}_1^n$, such that

(*) $\sum_{k=1}^{n} H_k f(x_k)$ is an approximation to $\int_a^b f(x)\omega(x)\,dx$

which is <u>exact</u> if f is a polynomial of degree $\leq 2n - 1$. One would get the idea that this might be possible from consideration of the system $\sum_{k=1}^{n} H_k (x_k)^j = \int_a^b x^j \omega(x)\,dx$ $(j = 0, 1, \ldots, 2n - 1)$ of equations to be satisfied. We show the problem has a solution.

First, take the points $x_1, \ldots, x_n$ to be arbitrary in $[a, b]$. Given f which is defined and differentiable on $[a, b]$, there is a (unique) polynomial p of degree $\leq 2n - 1$ such that $f(x_k) = p(x_k)$ and $f'(x_k) = p'(x_k)$ for $k = 1, 2, \ldots, n$, namely,

$$p(x) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)h_k(x) + \sum_{k=1}^{n} f'(x_k)g_k(x), \quad \text{where}$$

$$h_k(x) = \frac{(q_k(x))^2}{(q_k(x_k))^2}\left(1 - 2\frac{q_k'(x_k)}{q_k(x_k)}(x - x_k)\right) \quad \text{and}$$

$$g_k(x) = \frac{q_k(x)\ q(x)}{(q_k(x_k))^2},$$

where $q(x) = (x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n)$ and $q_k(x) = q(x)/(x - x_k)$. (It is easy to check that $h_k(x_j) = \delta_{kj}$, $h_k'(x_j) = 0$, $g_k(x_j) = 0$, and $g_k'(x_j) = \delta_{kj}$.) Furthermore, if f has $2n$ derivatives on $[a, b]$, then the interpolation error is $f(x) - p(x) = \frac{(q(x))^2}{(2n)!} f^{(2n)}(\xi_x)$, where ξ_x is some point of $]a, b[$.

(To see this, fix $x \neq x_1, x_2, \ldots, x_n$ and consider that for the function $F(z) = (f(z) - p(z)) - (f(x) - p(x))(q(z))^2/(q(x))^2$ we have $F(x_k) = F'(x_k) = 0$ and $F(x) = 0$, so that $F^{(2n)}(\xi_x) = 0$ for some ξ_x.) Note that $p = f$ if f is a polynomial of degree $\leq 2n - 1$.

We consider the approximation

$$\int_a^b f(x)\omega(x)\,dx \approx \int_a^b p(x)\omega(x)\,dx = \sum_{k=1}^n H_k f(x_k) + \sum_{k=1}^n G_k f'(x_k),$$

where $H_k = \int_a^b h_k(x)\omega(x)\,dx$ and $G_k = \int_a^b g_k(x)\omega(x)\,dx$. If $f^{(2n)}$ exists, then the error incurred is of the form

$$\frac{1}{(2n)!}\int_a^b (q(x))^2 f^{(2n)}(\xi_x)\omega(x)dx = \frac{1}{(2n)!} f^{(2n)}(\xi)\int_a^b (q(x))^2\omega(x)dx$$

for some ξ in $[a, b]$. The above is an approximation formula of the form $\sum_{k=1}^n H_k f(x_k)$ which is exact for polynomials of order $\leq 2n-1$ if and only if $G_k = 0 \ \forall k$ (that the H_k's in (*) must be the same as the H_k's above can be seen by substituting h_k for f), i.e., iff

$$\int_a^b q_k(x)q(x)\omega(x)\,dx = 0, \forall k.$$

Note that, since $\frac{\partial q(x)}{\partial x_k} = -q_k(x)$, this is the same as saying that

$\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\int_a^b (q(x))^2\omega(x)\,dx\right) = 0 \ \forall k$, which, in this case, is a condition that the coefficient of $f^{(2n)}(\xi)$ in the error term be as small as possible.

Thus, we want $x_1, \ldots, x_n$ such that $\int_a^b q_k(x)q(x)\omega(x)dx = 0$ $\forall k$. But any polynomial $r(x)$ of degree $\leq n - 1$ can be written as a linear combination of $q_1(x), \ldots, q_n(x)$ (namely, $r(x)$ and $\Sigma\, r(x_k)q_k(x)$ are equal, because

they have degree $\leq n - 1$ and agree at $x_1, \ldots, x_n$). Thus, the above condition just says that $q(x) = (x - x_1)\cdots(x - x_n)$ should be orthogonal to all polynomials of order $\leq n - 1$ in $L^2(\omega dt)$. The final conclusion is that we should take the points $x_1, \ldots, x_n$ to be the roots of the polynomial p_n of degree n in the sequence of normalized orthogonal polynomials which forms a basis in $L^2(\omega dt)$. One can now see that it is important in this application that the roots of p_n be in $]a, b[$. Note that the coefficients H_k are nonnegative:

$$\int_a^b h_k(x)\omega(x)\, dx = \int_a^b \frac{(q_k(x))^2}{(q_k(x_k))^2}\, \omega(x)\, dx$$

(the rest is zero, since $q_k(x)(x - x_k) = q(x)$); this is important for the control of roundoff errors.

For f continuos and a and b finite it is easy to show that the error $\int_a^b f(x)\omega(x)\, dx - \sum_{k=1}^n H_k f(x_k) \to 0$ as $n \to \infty$ (Note that both the coefficients and the evaluation points depend on n, though this is not indicated in the notation.)

(Find a polynomial $r(x)$ such that $|f - r| < \varepsilon$ on $[a, b]$, then choose $n \geq 2\deg(r) - 1$. Then

$$\int_a^b r(x)\omega(x)\, dx = \sum_{k=1}^n H_k r(x_k), \quad \text{and}$$

$$\left|\int_a^b f(x)\omega(x)dx - \sum_{k=1}^n H_k f(x_k)\right| \leq \int_a^b |f - r|\omega + \sum_{k=1}^n H_k |f(x_k) - r(x_k)|$$

$$\leq \varepsilon\int_a^b \omega + \varepsilon \sum_{k=1}^n H_k = 2\varepsilon \int_a^b \omega.)$$

Finally, it should be mentioned that Gaussian quadrature formulas (*) often give highly accurate approximations of $\int_a^b f\omega$ with relatively few points of evaluation (small n).

It can happen that an accuracy which would require thousands of evaluation points for an approximation with, say, left Riemann sums like $\sum_{k=1}^{n} (f\omega)(a + \frac{k-1}{n}(b - a)) \cdot \frac{1}{n}$ can be attained using only a few points in a Gaussian formula.

Kommentar til Rudin 12.29. (What every patriotic young Dane should know about Harald Bohr's ideas)

Lad X = vektorrum bestående af de trigonometriske polynomier. Vi har to normer på X:

$$\|x\|_\infty = \sup_{t\in\mathbb{R}} |x(t)|; \quad \|x\|_2 = (\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |x(t)|^2\, dt)^{\frac{1}{2}}$$

$\|x\|_2 \le \|x\|_\infty$, derfor er den identiske afbildning $I: (X,\|\cdot\|_\infty) \to (X,\|\cdot\|_2)$ kontinuert, og den har en kontinuert udvidelse $\tilde{I}$ fra Y = fuldstændiggørelsen af $(X,\|\cdot\|_\infty)$ ind i H = fuldstændiggørelsen af $(X,\|\cdot\|_2)$. Ifølge øvelsen skulle man bevise, at en $y \in Y$ "is contained in" H, dvs., at $\tilde{I}$ er injektiv.

Hvis man repræsenterer fuldstændiggørelserne som ækvivalens klasser af Cauchy følger, skal man bevise, at en følge i X som er Cauchy i $(X,\|\cdot\|_\infty)$ (og i $(X,\|\cdot\|_2)$) og som er ækvivalent med den nulfølge i $(X,\|\cdot\|_2)$, er også ækvivalent med den nulfølge i $(X,\|\cdot\|_\infty)$, dvs., hvis $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|_2} 0$ og er $\|\cdot\|_\infty$-Cauchy, så har vi $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} 0$.

Lad $y \in C(\mathbb{R})$ være det uniforme limes af $\{x_n\}$. Det er nemt at se, at $\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |y(t)|^2\, dt \to 0$ for $T \to \infty$. Problemet er at vise, at det implicerer $y \equiv 0$.

Nu lidt om næsten periodiske funktioner. Lad $x(t) = e^{ist}$. x er periodisk, med periode $= 2\pi/s$ $(s \neq 0)$. Hvis $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$ og der eksisterer $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$, $s \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ således at $s_i = n_i s$ $(i = 1, 2)$ (dvs., s_1/s_2 er rational), så er $x(t) = \alpha_1 e^{is_1 t} + \alpha_2 e^{is_2 t}$ periodisk $(x(t) = x(t + 2\pi n/s))$. Men hvis forholdet ikke er rationalt, så er x ikke periodisk (hvis $\alpha_1\alpha_2 \neq 0$). De elementer af X har imidlertid

en egenskab, som er nær ved periodiskhed :

<u>Definition</u>: En kontinuert funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ hedder <u>næsten periodisk</u> hvis $\forall \varepsilon > 0 \ \exists L(\varepsilon) > 0 \ \ni$: alle intervaller af længde L indeholder en "ε-periode" for f, dvs. $\forall (t_o, t_o+L) \subset \mathbb{R} \ \exists \tau \in (t_o, t_o+L) \ \ni$:

$$|f(t + \tau) - f(t)| < \varepsilon \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Det er klart, at enhver periodisk funktion er næsten periodisk.

Med hensyn til Rudins øvelse er det tilstrækkeligt for os at vise, at

1) hvis f og g er næsten periodiske, så er $f + g$ næsten periodisk (derfor er enhver $x \in X$ næsten periodisk),

2) et uniformt limes af en følge af næsten periodiske funktioner er næsten periodisk,

3) hvis $\frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |f(t)|^2 \, dt \to 0 \quad (T \to \infty)$ og f er næsten periodisk, så er $f \equiv 0$.

<u>Beviser</u>:

1) Først beviser man, at en næsten periodisk funktion f er uniformt kontinuert; det er et 3ε-argument. Da har man som korollar, at $\forall \varepsilon > 0$, $\exists L(\varepsilon) > 0$ og $\delta(\varepsilon) > 0$ $\ni$: ethvert interval af længde L indeholder et interval af længde δ, hvis punkter <u>alle</u> er ε-perioder for f. Det sidste medfører især, at $\forall \varepsilon > 0$, $\exists L > 0$ og $\delta > 0$ $\ni$: $\forall 0 < \eta \leq \delta$, ethvert interval af længde L indeholder en ε-periode, som er et heltalligt multiplum af η. Nu til beviset.

Lad f og g være næsten periodiske, og lad $\varepsilon > 0$. Vælg L_f, δ_f og L_g, δ_g svarende til ε som i den foregående sætning. $L_o = \max(L_f, L_g)$ og $\eta = \min(\delta_f, \delta_g)$. Ethvert interval af længde L_o indeholder et $\tau_f = n_f\eta$ og et $\tau_g = n_g\eta$ $(n_f, n_g \in \mathbb{Z})$, som er ε-perioder for henholdsvis f og g. For sådanne τ_f og τ_g fra et interval af længde L_o har vi $|\tau_f - \tau_g| = |n_f - n_g|\eta < L_o$, og derfor er der kun <u>endelig</u> mange muligheder for værdien af $\tau_f - \tau_g$ ved sådanne τ_f, τ_g. Vi fastsætter en endelig mængde af sådanne par $\{(\tau_f^{(i)}, \tau_g^{(i)})\}_{i=1}^N$ således at $\{\tau_f^{(i)} - \tau_g^{(i)}\}_{i=1}^N$ giver alle mulige sådanne værdier.

Lad $\ell = \max|\tau_f^{(i)}|$ og lad $L = L_o + 2\ell$. Vi viser, at L er den ønskede længde.

Lad $t_o \in \mathbb{R}$ og betragt (t_o, t_o+L). I $(t_o+\ell, t_o+L_o+\ell)$ (af længde L_o) vælger vi ε-perioder $\tau_f = n_f\eta$ og $\tau_g = n_g\eta$. $\tau_f - \tau_g \in \{\tau_f^{(i)} - \tau_g^{(i)}\}_{i=1}^N$, sig $\tau_f - \tau_g = \tau_f^{(j)} - \tau_g^{(j)}$. Lad $\tau = \tau_f - \tau_f^{(j)} = \tau_g - \tau_g^{(j)}$. Som differens af to forskellige ε-perioder for f og g, er τ en 2ε-periode for f og g, og derfor en 4ε-periode for $f + g$. $\tau \in (t_o, t_o+L_o+2\ell)$, fordi $\tau_f \in (t_o+\ell, t_o+L_o+\ell)$ og $|\tau_f^{(j)}| \leq \ell$. Slut.

2) er et andet 3ε-argument.

3) Antag, at f ikke er $\equiv 0$. Sig $|f(t_o)| > \varepsilon$. Vælg $L > 0$ og $\delta > 0$ således, at ethvert interval af længde L indeholder et interval af længde δ, som består af $(\varepsilon/2)$-perioder for f. Lad $(s, s+L)$ være en vilkårlig interval af længde L, og lad $(s', s'+\delta) \subset (s+t_o, s+t_o+L)$ bestå af $(\varepsilon/2)$-perioder for f. Så er $|f(t_o+t)| \geq$

$|f(t_o)| - |f(t_o+t) - f(t_o)| > \varepsilon/2$ for $t \in (s', s'+\delta)$,

og $\int_s^{s+L} |f|^2 = \int_{s+t_o}^{s+t_o+L} |f(t_o+t)|^2\, dt \geq \int_{s'}^{s'+\delta} |f(t_o+t)|^2\, dt \geq (\frac{\varepsilon}{2})^2 \delta$,

og derfor $\frac{1}{2nL} \int_{-nL}^{nL} |f|^2 \geq \frac{1}{2nL} \cdot (2n)(\frac{\varepsilon}{2})^2 \delta = \frac{(\varepsilon/2)^2 \delta}{L}$, som er

i modstrid med $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2nL} \int_{-nL}^{nL} |f|^2 = 0$. (Det hele er fra Bohr's bog.)