Matematik 6, 1963–64

Esben Kehlet

Noter til Matematik 6

Funktionalanalyse

Indholdsfortegnelse.

I. Topologiske vektorrum.

Dette kapitel er i det væsentlige et uddrag af H.Tornehaves noter til Mat. 6, 1962,T3. Iøvrigt kan henvises til bøger af N. Bourbaki, N. Dunford og J. Schwartz, A. Grothendieck, G. Köthe, M.A. Naimark.

§1. Omegne af o.

Et vektorrum E over et kommutativt legeme K er - som bekendt - en kommutativ gruppe med elementerne fra K som operatorer, d.v.s. foruden gruppeadditionen $+: E \times E \to E$ er der defineret regnereglen: $K \times E \to E$, så at: $1.a = a$, $\alpha(\beta a) = (\alpha\beta)a$, $\alpha(a+b) = \alpha a + \alpha b$, $(\alpha+\beta)a = \alpha a + \beta a$. Heraf fås $0a = \alpha o = o$, og $\alpha a = o \Rightarrow \alpha = 0$ eller $a = o$.

I det følgende betragtes kun tilfældende $K = \grave{R}$ og $K = \grave{C}$; i begge tilfælde vil vi tænke os K forsynet med den sædvanlige topologi.

Et topologisk vektorrum (t.v.r.) er et vektorrum E forsynet med en topologi $\grave{\mathcal{C}}$, således at regnereglerne er kontinuerte overalt. Desuden vil vi kræve, at $\{o\}$ er en afsluttet mængde.

Vi lader som sædvanlig $\grave{U}(a)$ betegne filtret af omegne af a. Det ses straks, at afbildningerne: $x \to x + y$ og $x \to \lambda x$ for $y \in E$ og $0 \neq \lambda \in K$ er homeomorfier af E på E, idet de er kontinuerte og har inverse afbildninger af samme type. Derfor er $\lambda U \in \grave{U}(o)$ for $U \in \grave{U}(o)$ og $0 \neq \lambda \in K$, og $\grave{U}(a) = \{a + U \mid U \in \grave{U}(o)\}$, d.v.s. topologien er bestemt, blot vi kender en basis $\grave{B}(o)$ for $\grave{U}(o)$.

Da afbildningen: $(x,y) \to x + y$ er kontinuert i $(o,o) \in E \times E$, findes der til $U \in \grave{U}(o)$ V_1 og $V_2 \in \grave{U}(o)$, så at $\{x_1 + x_2 \mid x_1 \in V_1, x_2 \in V_2\} = V_1 + V_2 \subseteq U$, og derfor $W = V_1 \cap V_2$, så at $W + W \subseteq U$.

Da $\{o\}$ er afsluttet, er $\{a\}$ afsluttet for alle $a \in E$, således at E opfylder aksiomet T_1, og $\{o\} = \bigcap\{U \mid U \in \grave{U}(o)\}$ (jfr. T.2.13). Også for vilkårlig delmængde $A \subseteq E$ er $\bar{A} = \bigcap\{A + U \mid U \in U(o)\}$, idet $a \in \bar{A} \Leftrightarrow \forall U \in \grave{U}(o)\ ((a - U) \cap A \neq \emptyset) \Leftrightarrow \forall U \in \grave{U}(o)\ (a \in A + U)$. For V og $W \in \grave{U}(o)$, så at $W + W \subseteq V$, er $W \subseteq \bar{W} \subseteq W + W \subseteq V$, d,v,s, (jfr. T.2. 16-17):

E er et regulært rum.

Vi siger om en delmængde $V \subseteq E$, at V er symmetrisk (om o), hvis $V = -V$, og at V er stjerneformet (m.h.t. o), hvis $x \in V$, $0 \leq \lambda \leq 1 \Rightarrow \lambda x \in V$. Hvis E er et vektorrum over $\grave{C}$, kaldes delmængden V en cirkelmængde, hvis $|\lambda| \leq 1 \Rightarrow \lambda V \subseteq V$; hvis E er et topologisk vektorrum over $\grave{C}$, kaldes en cirkelmængde V en cirkelomegn af o, hvis $V \in \grave{U}(o)$.

I et topologisk vektorrum over $\grave{C}$ (henh.$\grave{R}$) vil enhver omegn V af o indeholde en cirkel - (henh. stjerneformet symmetrisk) omegn W af o; thi da afbildningen $(\lambda, x) \to \lambda x$ er kontinuert i $(0,o) \in K \times E$, findes der $\alpha \in \grave{R}$ og $U \in \grave{U}(o)$, så at $W = \bigcup\{\mu U \mid 0 < |\mu| \leq \alpha\} \subseteq V$; og W opfylder betingelserne.

Vi siger om to delmængder V og $A \subseteq E$, at V absorberer A, hvis der eksisterer $\lambda \in \grave{R}$, $\lambda > o$, så at $\alpha A \subseteq V$ for $|\alpha| \leq \lambda$; V er absorberende, hvis V absorberer $\{a\}$ for alle $a \in E$.

Enhver omegn af o er absorberende; thi til $V \in \grave{U}(o)$ og $a \in E$ findes der, da $\alpha \to \alpha a$ er kontinuert i 0, et $\lambda > 0$, så at $\alpha a \in V$ for $|\alpha| \leq \lambda$. Specielt ses, at $E = \bigcup \{nV \mid n \in \grave{N}\}$.

Vi har efterhånden bevist første halvdel af

<u>Sætning</u>: I et topologisk vektorrum E over $\grave{C}$ (henh. $\grave{R}$) kan man vælge en basis $\grave{B}(o)$ for filtret af omegne af o, der opfylder følgende betingelser:

V1. $\grave{B}(o)$ er en filterbasis.

V2. $\grave{B}(o)$ består af cirkel- (henh. stjerneformede, symmetriske) mængder.

V3. $\forall U \in \grave{B}(o), \forall \lambda \in \grave{C} \setminus \{0\}$ (henh. $\grave{R} \setminus \{0\}$) $(\lambda U \in \grave{B}(o))$.

V4. $\mathring{B}(o)$ består af absorberende mængder.

V5. $\forall U \in \mathring{B}(o) \; \exists \; V \in \mathring{B}(o) \; (V + V \subseteq U)$.

V6. $\bigcap \{U \mid U \in \mathring{B}(o)\} = \{o\}$.

Hvis der omvendt er givet en mængde $\mathring{B}(o)$ af delmængder af et vektorrum E, som opfylder V1.,...,V6., findes der én topologi $\mathring{O}$ på E, så at $\mathring{B}(o)$ er en basis for filtret af omegne af o, og så at E forsynet med $\mathring{O}$ er et topologisk vektorrum.

Bevis: Det ses let, at hvis der findes en topologi $\mathring{O}$ med de ønskede egenskaber, må den være entydigt bestemt ved, at en basis for filtret af omegne af a er $\mathring{B}(a) = \{a + U \mid U \in \mathring{B}(o)\}$ for vilkårligt $a \in E$.

Vi viser nu, at mængderne $\mathring{B}(a)$, $a \in E$, tilfredsstiller betingelserne b1,...,b4. (T.2.2.) og derfor definerer en topologi på E. b1., b2. og b3. følger direkte af V1. og V6. (jfr. T.2.7). For $U \in \mathring{B}(x)$ er $U - x \in \mathring{B}(o)$; vi vælger $V \in \mathring{B}(o)$, så $V + V \subseteq U - x$; da er $x + V \in \mathring{B}(x)$ og $x + V \subseteq U$, og for $y \in x + V$ er $y + V \in \mathring{B}(y)$ og $y + V \subseteq x + V + V \subseteq U$, også b4. er altså opfyldt.

For x og $y \in E$ og $x + y + U \in \mathring{B}(x+y)$ og $V \in \mathring{B}(o)$, så at $V + V \subseteq U$, er $(x + V) + (y + V) \subseteq x + y + U$; dette viser, at afbildningen: $(x,y) \to x + y$ er kontinuert.

Vi viser nu, at: $(\lambda,x) \to \lambda x$ er kontinuert; lad der være givet $\lambda \in \mathring{C}$ (henh. $\mathring{R}$), $x \in E$ og $\lambda x + U \in \mathring{B}(\lambda x)$; vi vælger $V \in \mathring{B}(o)$, så at $V + V + V \subseteq U$, og $W \in \mathring{B}(o)$, så at $W \subseteq V \cap \lambda^{-1} V$ for $\lambda \neq 0$, $W = V$ for $\lambda = 0$; desuden vælger vi $\delta \in \,]o,1]$, så at $\alpha x \in V$ for $|\alpha| \leq \delta$; for $|\alpha| \leq \delta$ og $y \in W$ får vi $(\lambda + \alpha)(x + y) = \lambda x + \lambda y + \alpha x + \alpha y \in \lambda x + \lambda W + V + W \subseteq \lambda x + V + V + V \subseteq \lambda x + U$.

Vi er færdige med beviset, når vi har vist, at $\{o\}$ er afsluttet; til $x \neq o$ findes $V \in \mathring{B}(o)$, så at $-x \notin V$ og dermed $o \notin x + V$; ethvert punkt i $E \setminus \{o\}$ er altså indre.

En delmængde V af et vektorrum E kaldes konveks, hvis V med to punkter a og b indeholder liniestykket med endepunkter a og b, d.v.s. hvis $a \in V$, $b \in V \Rightarrow \{(1-\lambda)a + \lambda b \mid 0 \leq \lambda \leq 1\} \subseteq V$; et topologisk vektorrum E kaldes lokalkonvekst, hvis der findes en basis for filtret af omegne af o bestående af konvekse mængder.

Sætning: Lad E og F være topologiske vektorrum. En liniær afbildning $f: E \to F$ er kontinuert, hvis og kun hvis f er kontinuert i o.

Bevis: Det er klart, at "kun hvis" gælder. Lad U være en omegn af o i F. Da f er kontinuert i o, er $f^{-1}(U)$ en omegn af o i E, og for $a \in E$ får vi $f(a + f^{-1}(U)) = f(a) + f(f^{-1}(U)) \subseteq f(a) + U$, hvilket viser, at originalmængden til omegnen $f(a) + U$ er en omegn af a.

§ 2. Fuldstændighed.

Vi betragter igen et topologisk vektorrum E over $\mathbb{C}$ eller $\mathbb{R}$.

Et filter $\mathfrak{F}$ af delmængder af en delmængde $A \subseteq E$ kaldes et fundamentalfilter (eller Cauchy filter) på A, hvis:

$$\forall U \in \mathfrak{U}(o)\ \exists a \in A\ ((a + U) \cap A \in \mathfrak{F}).$$

Et filter $\mathfrak{B}^*$ på A frembragt af en filterbasis $\mathfrak{B}$ på A er et fundamentalfilter, hvis og kun hvis: $\forall U \in \mathfrak{U}(o)\ \exists B \in \mathfrak{B}\ (B - B \subseteq U)$, (løst sagt, hvis og kun hvis $\mathfrak{B}$ indeholder vilkårligt små mængder).

Bevis: Antag først, at $\mathfrak{B}^*$ er et fundamentalfilter. Til $U \in \mathfrak{U}(o)$ findes $V \in \mathfrak{U}(o)$, så at $V - V \subseteq U$, $a \in A$, så at $(a + V) \cap A \in \mathfrak{B}^*$, og derfor $B \in \mathfrak{B}$, så at $B \subseteq (a + V) \cap A$ og dermed $B - B \subseteq V - V \subseteq U$.

Antag nu, at til $U \in \mathfrak{U}(o) \exists\, B \in \mathfrak{B}$, så at $B - B \subseteq U$; for $a \in B \subseteq A$ fås specielt $B-a \subseteq U$, derfor $(a+U) \cap A \supseteq B$, $(a+U) \cap A \in \mathfrak{B}^*$.

Lad E_1 være et lineært underrum $\subseteq E$. Det er klart, at E_1 forsynet med den inducerede topologi $\mathfrak{d}_1 = \{U \cap E_1 \mid U \in \mathfrak{d}\}$ er et topologisk vektorrum.

Vi vil straks forsikre os om, at et filter $\mathfrak{F}$ på en delmængde $A \subseteq E_1$ er et fundamentalfilter på A opfattet som delmængde af E, hvis og kun hvis $\mathfrak{F}$ er et fundamentalfilter på A opfattet som delmængde af E_1; dette følger straks af, at for $B \subseteq A$ og en omegn U af o i E er $B - B \subseteq U \iff B - B \subseteq U \cap E_1$. For E_1 selv afhænger begrebet fundamentalfilter altså kun af gruppestrukturen og topologien på E_1.

Definitionen viser, at for et punkt $a \in A$ er filtret af omegne af a i den inducerede topologi, $\{(a+U) \cap A \mid U \in \mathfrak{U}(o)\}$, et fundamentalfilter på A.

<u>Sætning</u>: Hvis et fundamentalfilter $\mathfrak{F}$ på $A \subseteq E$ har et kontaktpunkt $a \in A$, konvergerer $\mathfrak{F}$ mod A. (Jfr. T.2.10.).

Bevis: Vi skal vise, at $\mathfrak{F}$ er finere end filtret af omegne af a, d.v.s.: $\forall\, U \in \mathfrak{U}(o)((a+U) \cap A \in \mathfrak{F})$; til $U \in \mathfrak{U}(o)$ vælger vi $V \in \mathfrak{U}(o)$, så at $V - V + V \subseteq U$, og dernæst $x \in A$, så $(x+V) \cap A \in \mathfrak{F}$; da a er kontaktpunkt for $(x+V) \cap A$, er $(a+V) \cap A \cap (x+V) \cap A \neq \emptyset$; derfor er $x \in a + V - V$, og $(x+V) \cap A \subseteq (a+V-V+V) \cap A \subseteq (a+U) \cap A$, så at $(a+U) \cap A \in \mathfrak{F}$.

Da E er et Hausdorffrum, har et fundamentalfilter på en delmængde $A \subseteq E$ højst ét kontaktpunkt i A (jfr. T.2.14).

Lad nu B og $A \subseteq B$ være delmængder af E, og $\mathfrak{F}$ et fundamentalfilter på A; opfattet som mængde af delmængder af B er $\mathfrak{F}$ basis for et fundamentalfilter på B. Lad der omvendt være givet et fundamentalfilter $\grave{G}$ på B; hvis $\grave{G}$ inducerer et filter på A, d.v.s. hvis $\emptyset \notin \grave{G} \mid A = \{G \cap A \mid G \in \grave{G}\}$, er $\grave{G}|A$ et fundamentalfilter på A (idet $G \cap A - G \cap A \subseteq G - G$), og det af $\grave{G}|A$ frembragte filter på B er et fundamentalfilter finere end $\grave{G}$. Hvis vi specielt lader $\grave{G}$ være filtret af omegne af et punkt $b \in B$ ($\grave{G} = \grave{U}(b)|B$), gælder: $b \in \bar{A} \iff \grave{G}|A$ er et filter på $A \iff \grave{G}|A$ er et fundamentalfilter på $A \Rightarrow$ filtret på B frembragt af $\grave{G}|A$ konvergerer mod b.

2.2. En følge $(a_\nu)_{\nu \in \grave{N}}$ af elementer $\in A \subseteq E$ kaldes en fundamentalfølge (eller Cauchyfølge) på A, hvis:

$\forall\, U \in \grave{U}(o)\ \exists\, n \in \grave{N}(\nu \geqq n,\ \mu \geqq n \Rightarrow a_\nu - a_\mu \in U)$.

$A \subseteq E$ siges at være fuldstændig (henholdsvis følgefuldstændig eller semifuldstændig), hvis ethvert fundamentalfilter (henholdsvis enhver fundamentalfølge) på A har et grænsepunkt $\in A$.

Et topologisk rum T siges at opfylde det andet tællelighedsaksiom, hvis der findes en tællelig basis for topologien; T siges at opfylde det første tællelighedsaksiom, hvis der for ethvert punkt i T findes en tællelig basis for filtret af omegne af punktet.

<u>Sætning</u>: En fuldstændig delmængde af et topologisk vektorrum E er også følgefuldstændig. En følgefuldstændig delmængde af et topologisk vektorrum E, der opfylder det første tællelighedsaksiom, er også fuldstændig.

Bevis: Antag, at A er fuldstændig, og lad $(a_\nu)_{\nu \in \grave{N}}$ være en fundamentalfølge på A. Filtret med basis $\{\{a_{n+\nu} \mid \nu \in \grave{N}\} \mid n \in \grave{N}\}$ er da et fundamentalfilter, og har et grænsepunkt $a \in A$; til $U \in \grave{U}(o)$ findes altså $n \in \grave{N}$, så at $\{a_{n+\nu} \mid \nu \in \grave{N}\} \subseteq (a+U) \cap A$, d.v.s. $(a_\nu)_{\nu \in \grave{N}}$ konvergerer mod a.

Antag nu, at A er en følgefuldstændig delmængde af et topologisk vektorrum E, der opfylder det første tællelighedsaksiom, lad $\mathfrak{F}$ være et fundamentalfilter på A, og lad $\{U_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ være en basis for $\mathfrak{U}(o)$ bestående af afsluttede mængder; til $n \in \mathbb{N}$ vælger vi $F_n \in \mathfrak{F}$, så at $F_n - F_n \subseteq U_n$, sætter $G_n = F_1 \cap \ldots \cap F_n$, og vælger $a_n \in G_n$; da gælder $G_1 \supseteq G_2 \supseteq \ldots$, $G_n \in \mathfrak{F}$ og $G_n - G_n \subseteq U_n$, altså $a_\nu \in G_n$ for $\nu \geq n$, og $a_\nu - a_\mu \in U_n$ for $\nu \geq n$ og $\mu \geq n$, d.v.s. $(a_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ er en fundamentalfølge og konvergerer mod et punkt $a \in A$; da $a \in \overline{G_n}$ er $G_n - a \subseteq \overline{U_n} = U_n$, $A \cap (a+U_n) \supseteq G_n \in \mathfrak{F}$, d.v.s. $\mathfrak{F}$ konvergerer mod a.

Et topologisk vektorrum E kaldes metriserbart, hvis topologien kan defineres ved hjælp af en invariant metrik,, d.v.s. hvis der eksisterer en afstandsfunktion dist på E, så at: $\forall (a,b) \in E \times E\ (\mathrm{dist}(a,b) = \mathrm{dist}(o,b-a))$, og så at $\{\{a \in E \mid \mathrm{dist}(o,a) \leq \varepsilon\} \mid \varepsilon > 0\}$ er en basis for $\mathfrak{U}(o)$. Specielle eksempler er de normerede (eller korrektere: normerbare) topologiske vektorrum. Man kan vise, at ethvert topologisk vektorrum, der opfylder det første tællelighedsaksiom, er metriserbart (og, selvfølgelig, omvendt). En følge $(a_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ i et metriserbart topologisk vektorrum forsynet med en invariant metrik, der definerer topologien, er en fundamentalfølge i elementær forstand med hensyn til den metriske struktur, hvis og kun hvis den er en fundamentalfølge i den her betragtede forstand med hensyn til den topologiske vektorrums-struktur, og en delmængde $A \subseteq E$ er fuldstændig med hensyn til den metriske struktur, hvis og kun hvis den er fuldstændig med hensyn til den topologiske vektorrums-struktur.

<u>Sætning</u>: En fuldstændig delmængde B af et topologisk vektorrum E er afsluttet. En afsluttet delmængde A af en fuldstændig delmængde B af et topologisk vektorrum E er fuldstændig.

Bevis: For $x \in \overline{B}$ er $\mathfrak{U}(x) \mid B$ et fundamentalfilter på B, og har derfor et grænsepunkt $b \in B$, d.v.s.: $\forall\, U \in \grave{U}(o)\ \exists\, V \in \grave{U}(o)$ $((b+U) \cap B \supseteq (x+V) \cap B)$; så meget des mere gælder: $\forall U \in \grave{U}(o) \exists V \in \grave{U}(o)(b+U \supseteq (x+V) \cap B)$, d.v.s. filtret på E frembragt af $\grave{U}(x)|B$ konvergerer mod b; da det også konvergerer mod x, er $x = b$.

Lad $\grave{F}$ være et fundamentalfilter på A; det af $\grave{F}$ frembragte filter på B er da også et fundamentalfilter, og har et grænsepunkt $b \in B : \forall\, U \in \grave{U}(o)\ \exists\, F \in \grave{F}(F \subseteq (b+U) \cap B)$, derfor: $\forall\, U \in \grave{U}(o)((b+U) \cap B \cap A \neq \emptyset)$, d.v.s. $b \in \bar{A} = A$.

Sætning: En kompakt delmængde A af et topologisk vektorrum E er fuldstændig.

Bevis: Lad $\grave{F}$ være et fundamentalfilter på A. $\grave{F}$ har et kontaktpunkt $a \in A$ (jfr. T.2.12), og konvergerer derfor mod a.

2.3. Sætning: Lad E og G være topologiske vektorrum, f en kontinuert lineær afbildning : $E \to G$, og $\grave{F}$ en basis for et fundamentalfilter på en delmængde $A \subseteq E$. $f(\grave{F}) = \{f(F) \mid F \in \grave{F}\}$ er basis for et fundamentalfilter på $f(A)$.

Bevis: For $U \in \grave{U}(o_G)$ vil $f^{-1}(U) \in \grave{U}(o_E)$; der findes da $a \in A$ og $F \in \grave{F}$, så at $F \subseteq (a+f^{-1}(U)) \cap A$, og vi får: $f(F) \subseteq f(a+f^{-1}(U)) \cap f(A) \subseteq (f(a) + U) \cap f(A)$.

Sætning: Lad der være givet et fuldstændigt topologisk vektorrum G, et topologisk vektorrum E, et tæt underrum $E_1 \subseteq E$, og en kontinuert lineær afbildning $f: E_1 \to G$. Der findes en og kun én kontinuert afbildning $g: E \to G$, så at $g(x) = f(x)$ for $x \in E_1$. g er lineær.

Bevis: For to kontinuerte funktioner g_1 og $g_2: E \to G$, er $\{x \in E \mid g_1(x) = g_2(x)\}$ afsluttet (jfr. T.2.16); hvis $g_1(x) = g_2(x)$ for $x \in E_1$, gælder også $g_1(x) = g_2(x)$ for $x \in \overline{E_1} = E$; g er altså entydigt bestemt.

For $a \in E$ er $f(\grave{U}(a)|E_1)$ basis for et fundamentalfilter på

G; vi kalder grænseværdien $g(a)$ og viser, at den herved definerede afbildning g er en udvidelse af f, at g er kontinuert, og at g er lineær.

For $a \in E_1$, vil $\dot{U}(a)|E_1$ konvergere mod a, derfor $f(\dot{U}(a)|E_1)$ mod $f(a)$ (jfr. T.2.9), så at $f(a) = g(a)$.

*) Lad der nu være givet $a \in E$ og $U \in \dot{U}(g(a))$; da G er et regulært rum, kan vi vælge en mængde $U_1 \in \dot{U}(g(a))$, så at $\overline{U_1} \subseteq U$; da $f(\dot{U}(a)|E_1)$ konvergerer mod $g(a)$, kan vi finde $V_1 \in \dot{U}(a)$, så at $f(V_1 \cap E_1) \subseteq U_1$; vi vælger en åben mængde $V \in \dot{U}(a)$, så at $V \subseteq V_1$; for $b \in V$ er $V \in \dot{U}(b)$, derfor $f(V \cap E_1) \in f(\dot{U}(b)|E_1)$; da $U_1 \supseteq f(V \cap E_1)$, tilhører U_1 filtret på G med basis $f(\dot{U}(b)|E_1)$; da $g(b)$ er kontaktpunkt for dette filter, tilhører $g(b)$ $\overline{U_1} \subseteq U$; til $a \in E$ og $U \in \dot{U}(g(a))$ har vi fundet $V \in \dot{U}(a)$, så at $g(V) \subseteq U$; d.v.s. vi har vist, at g er kontinuert.

For $a \in E_1$ er $\{b \in E \mid g(a+b) = g(a)+g(b)\}$ afsluttet og indeholder E_1, og dermed E; derfor er for $b \in E$ $\{a \in E \mid g(a+b) = g(a)+g(b)\}$ afsluttet og indeholder E_1 og dermed E. Tilsvarende ses, at for $\lambda \in K$ og $a \in E$ er $g(\lambda a) = \lambda g(a)$. Dette viser, at g er lineær.

2.4. Vi minder om, at mængden af fundamentalfiltre på E som delmængde af $\dot{D}(\dot{D}(E))$ har en naturlig partiel ordning: $\dot{F}$ er finere end $\dot{G}$, og $\dot{G}$ er grovere end $\dot{F}$, hvis $\dot{F} \supseteq \dot{G}$. Vi kalder et fundamentalfilter $\dot{F}$ minimalt, hvis $\dot{F}$ er minimalt med hensyn til denne ordning, d.v.s. hvis ethvert grovere fundamentalfilter er lig $\dot{F}$.

Hvis $\dot{F}$ og $\dot{G}$ er filtre på E, er $\{F+G | F \in \dot{F},\ G \in \dot{G}\}$ ~~også~~ et filter $\dot{F} + \dot{G}$ på E; hvis $\dot{F}$ og $\dot{G}$ er fundamentale, er også $\dot{F} + \dot{G}$ fundamentalt; thi til $U \in \dot{U}(o)$ kan vi finde $V \in \dot{U}(o)$, så at $V + V \subseteq U$, og a og b $\in$ E, så at $a+V \in \dot{F}$ og $b + V \in \dot{G}$, og derfor $a+b+U \supseteq a+V + b + V \in \dot{F} + G$. Hvis $\dot{A}$ og $\dot{B}$ er baser for $\dot{F}$ og $\dot{G}$, er åbenbart $\{A+B | A \in \dot{A},\ B \in \dot{B}\}$ en basis for $\dot{F} + \dot{G}$.

<u>Sætning</u>: For ethvert fundamentalfilter $\dot{F}$ på E findes der et og kun ét minimalt fundamentalfilter grovere end $\dot{F}$, nemlig $\dot{F} + \dot{U}(o)$.

da $\dot{U}(o)$ er fundamentalt

Bevis: $\dot{F} + \dot{U}(o)$ er et fundamentalfilter; thi til $U \in \dot{U}(o)$ kan vi vælge $V \in \dot{U}(o)$, så at $V + V \subseteq U$, og $a \in E$, så $a + V \in \dot{F}$; da vil $a+U \supseteq a + V + V \in \dot{F} + \dot{U}(o)$, derfor $a + U \in \dot{F} + \dot{U}(o)$.

$\dot{F} + \dot{U}(o)$ er åbenbart grovere end $\dot{F}$.

Ethvert fundamentalfilter $\dot{G}$ grovere end $\dot{F}$ er finere end $\dot{F} + \dot{U}(o)$: vi skal vise, at for $F \in \dot{F}$ og $U \in \dot{U}(o)$ er $F + U \in \dot{G}$; vi vælger $G \in \dot{G}$, så $G - G \subseteq U$; da $G \in \dot{F}$ er $G \cap F \neq \emptyset$; for $a \in G \cap F$ gælder: $G - a \subseteq U$, $G \subseteq a+U \subseteq F+U$, derfor $F + U \in \dot{G}$.

$\dot{F} + \dot{U}(o)$ er et minimalt fundamentalfilter; thi et grovere fundamentalfilter er også grovere end $\dot{F}$, og derfor finere end $\dot{F} + \dot{U}(o)$.

Som eksempel ser vi på filtret $\dot{F}$ med basis $\{\{a\}\}$; en basis for $\dot{F} + \dot{U}(o)$ er $\{a + U \mid U \in \dot{U}(o)\} = \dot{U}(a)$; for $a \in E$ er altså omegnsfiltret $\dot{U}(a)$ et minimalt fundamentalfilter.

To fundamentalfiltre $\dot{F}_1$ og $\dot{F}_2$, der er finere end det samme minimale fundamentalfilter $\dot{F}_o$, har samme mængde af grænsepunkter; thi hvis $\dot{F}_1$ konvergerer mod $a \in E$, er $\dot{F}_1$ finere end $\dot{U}(a)$, derfor $\dot{U}(a) = \dot{F}_o$ og $\dot{F}_2$ finere end $\dot{U}(a)$, så at $\dot{F}_2$ konvergerer mod a.

<u>Sætning:</u> Lad E_1 være et tæt underrum i E. Hvis ethvert fundamentalfilter på E_1 frembringer et konvergent filter på E, så er

E fuldstændigt.

Bevis: Lad $\dot{F}$ være et fundamentalfilter på E; $(\dot{F}+\dot{U}(0))|E_1$ er et fundamentalfilter på E_1, da $(F+U) \cap E_1 \neq \emptyset$ for $F \in \dot{F}$ og $U \in \dot{U}(o)$; dette filter frembringer derfor på E et konvergent filter, der er finere end $\dot{F}+\dot{U}(o)$; derfor er også $\dot{F}$ konvergent.

Vi vil betegne mængden af minimale fundamentalfiltre på E med $\hat{E}$; afbildningen: $a \to \dot{U}(a)$, af E ind i $\hat{E}$ vil vi betegne φ; da E er et Hausdorffrum, har forskellige punkter forskellige omegnsfiltre, d.v.s. φ er injektiv.

Vi har defineret en sum af fundamentalfiltre $\dot{F}$ og $\dot{G}$; denne organisering er åbenbart kommutativ og associativ; f.eks. er $(\dot{F}+\dot{G})+\dot{H} = \dot{F}+(\dot{G}+\dot{H}) = \{F+G+H \mid F \in \dot{F}, G \in \dot{G}, H \in \dot{H}\}$.

Et fundamentalfilter $\dot{F}$ er minimalt, hvis og kun hvis $\dot{F}+\dot{U}(o) = \dot{F}$.

Hvis $\dot{F}$ eller $\dot{G}$ er minimalt, er også $\dot{F} + \dot{G}$ minimalt; thi $(\dot{F}+\dot{G}) + \dot{U}(o) = \dot{F} +(\dot{G} +\dot{U}(o)) = \dot{F} + \dot{G}$. For $\lambda \in K \setminus \{0\}$ definerer vi: $\lambda\dot{F} = \{\lambda F \mid F \in \dot{F}\}$ specielt finder vi, at $\lambda\dot{U}(o) = \dot{U}(o)$,), idet $U \in \dot{U}(o) \iff \lambda^{-1}U \in \dot{U}(o) \iff U \in \lambda\dot{U}(o)$ (jfr. V 3 p.1.2); hvis $\dot{F}$ er et minimalt fundamentalfilter, er også $\lambda\dot{F}$ et minimalt fundamentalfilter; thi: $\lambda F_1 \cap \lambda F_2 = \lambda(F_1 \cap F_2)$; $G \supseteq \lambda F \in \lambda\dot{F} \Rightarrow \lambda^{-1}G \supseteq F \in \dot{F} \Rightarrow G \in \lambda\dot{F}$; til $U \in \dot{U}(o)$ findes $F \in \dot{F}$, så $F - F \subseteq \lambda^{-1}U$ og derfor $\lambda F - \lambda F = \lambda(F-F) \subseteq U$; $\lambda\dot{F} + \dot{U}(o) = \lambda(\dot{F}+\lambda^{-1}\dot{U}(o)) = \lambda(\dot{F}+\dot{U}(o)) = \lambda\dot{F}$.

Vi definerer: $0\cdot\dot{F} = \dot{U}(o)$.

Vi viser, at $\hat{E}$ organiseret ved disse regneregler er et vektorrum. Det drejer sig om de følgende aksiomer: 1) $\dot{F} + \dot{G} = \dot{G} + \dot{F}$, 2) $(\dot{F}+\dot{G})+\dot{H} = \dot{F} + (\dot{G}+\dot{H})$, 3) $\dot{F} + \dot{U}(o) = \dot{F}$, 4) $1\cdot\dot{F} = \dot{F}$, 5) $\alpha(\beta\dot{F}) = (\alpha\beta)\dot{F}$, 6) $\alpha(\dot{F}+\dot{G}) = \alpha\dot{F}+\alpha\dot{G}$, 7) $(\alpha+\beta)\dot{F} = \alpha\dot{F} + \beta\dot{F}$. 1), 2) og 3) er behandlet; 4), 5) og 6) følger direkte af definitionerne, idet man behandler tilfældene $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$, henholdsvis $\alpha = 0$, $\beta \neq 0$, henholdsvis $\alpha \neq 0$, $\beta = 0$, henholdsvis $\alpha = \beta = 0$ hver for sig; for $\alpha + \beta \neq 0$, $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$ er $(\alpha+\beta)\dot{F} = \{(\alpha+\beta)F \mid F \in \dot{F}\}$ og $\alpha\dot{F}+\beta\dot{F} = \{\alpha F_1+\beta F_2 \mid F_1 \in \dot{F}_1, \dot{F}_2 \in \dot{F}\}$; da $\alpha F_1+\beta F_2 \supseteq (\alpha+\beta)F_1 \cap F_2 \in (\alpha+\beta)\dot{F}$ er $\alpha\dot{F}+\beta\dot{F}$ grovere end $(\alpha+\beta)\dot{F}$, men da begge filtre er minimale fundamentalfiltre, falder de sammen; for $\alpha \neq 0$, $\beta = 0$ er $(\alpha+\beta)\dot{F} = \alpha\dot{F}+\dot{U}(o) = \alpha\dot{F} + \beta\dot{F}$; tilsvarende behandles tilfældene $\alpha = 0$, $\beta \neq 0$ og $\alpha = \beta = 0$; antag nu $\alpha = -\beta \neq 0$ og lad os vise, at $\dot{U}(o) = (\alpha-\alpha)\dot{F} = \alpha\dot{F} - \alpha\dot{F}$; dette følger af, at vi til $U \in \dot{U}(o)$ kan finde $F \in \dot{F}$, så at $F - F \subseteq \alpha^{-1}U$, og derfor $\alpha F - \alpha F = \alpha(F-F) \subseteq U$, så at $\alpha\dot{F} - \alpha\dot{F}$ er finere end $\dot{U}(o)$ og derfor lig $\dot{U}(o)$; hermed er 7) helt behandlet.

$\hat{E}$ er altså et vektorrum; vi viser, at φ er lineær: $\varphi(a)+\varphi(b) = \dot{U}(a) + \dot{U}(b) = \{a+U_1+b+U_2 \mid U_1 \in \dot{U}(o), U_2 \in \dot{U}(o)\} = \dot{U}(a+b)+\dot{U}(o) = \varphi(a+b)$, og $\lambda\varphi(a) = \lambda\dot{U}(a) = \{\lambda a+\lambda U \mid U \in \dot{U}(o)\} = \varphi(\lambda a)$.

For en mængde $A \subseteq E$ sætter vi $\hat{A} = \{\dot{F} \in \hat{E} \mid A \in \dot{F}\}$; dette stemmer overens med betegnelsen $\hat{E}$, da $E \in \dot{F}$ for ethvert filter $\dot{F}$ på E. Da intet filter indeholder $\emptyset$, er $\hat{\emptyset} = \emptyset$. For $A \subseteq B$ er $\hat{A} \subseteq \hat{B}$, idet $B \supseteq A \in \dot{F} \Rightarrow B \in \dot{F}$; da ethvert $\dot{F} \in \hat{E}$ har en basis bestående af åbne mængder, er $A \in \dot{F} \Leftrightarrow \mathring{A} \in F$, d.v.s. $\hat{A} = \hat{\mathring{A}}$. $\widehat{A \cap B} = \hat{A} \cap \hat{B}$, da $A \cap B \in \dot{F} \Leftrightarrow A \in \dot{F} \wedge B \in F$.

$\hat{A} \cap \varphi(E) = \varphi(\mathring{A})$, da $\varphi(a) = \dot{U}(a) \in \hat{A} \Leftrightarrow A \in \dot{U}(a) \Leftrightarrow a \in \mathring{A}$.

Vi forsyner $\hat{E}$ med en topologi, idet vi som basis $\dot{B}(\dot{F})$ for filtret af omegne af $\dot{F} \in \hat{E}$ vælger $\{\hat{U} \mid \dot{F} \in \hat{U}\} = \{\hat{U} \mid U \in \dot{F}\}$; betingelserne b1),...,b4) (T.2.2.) er opfyldt: $\dot{B}(\dot{F}) \neq \emptyset$, da $\dot{F} \neq \emptyset$; $\emptyset \notin \dot{B}(\dot{F})$, da $\hat{U} \in \dot{B}(\dot{F}) \Rightarrow \dot{F} \in \hat{U}$; for $\hat{U}$ og $\hat{V} \in \dot{B}(\dot{F})$ gælder $U \in \dot{F}$, $V \in \dot{F}$, derfor $U \cap V \in \dot{F}$, og $\hat{U} \cap \hat{V} = \widehat{U \cap V} \in \dot{B}(\dot{F})$;

for $\hat{U} \in \dot{B}(\dot{F})$ og $\dot{G} \in \hat{U}$ gælder $U \in \dot{G}$, , derfor $\hat{U} \in \dot{B}(\dot{G})$. Det sidste ræsonnement viser ikke blot b4), men også, at $\hat{U}$ er en omegn af hvert af sine punkter, altså at $\hat{U}$ er åben. For en åben mængde $U \subseteqq E$ er derfor $\varphi(U) = \varphi(\mathring{U}) = \hat{U} \cap \varphi(E)$ en åben mængde i den relative topologi på $\varphi(E)$. φ er også kontinuert; thi for $a \in E$ og $\hat{U} \in \dot{B}(\varphi(a))$ er $U \in \varphi(a) = \dot{U}(a)$, derfor $\mathring{U} \in \dot{U}(a)$, og $\varphi(\mathring{U}) = \hat{U} \cap \varphi(E) \subseteqq \hat{U}$.

φ er altså en homeomorfi af E på $\varphi(E)$.

Vi viser nu, at additionen på $\hat{E}$ er kontinuert. For $\dot{F}$ og $\dot{G} \in \hat{E}$ og $\hat{U} \in \dot{B}(\dot{F}+\dot{G})$ er $U \in \dot{F} + \dot{G}$, d.v.s. U indeholder en mængde af form $V + W$, hvor $V \in \dot{F}$ og $W \in \dot{G}$; for $\dot{F}_1 \in \hat{V}$ og $\dot{G}_1 \in \hat{W}$ gælder $V \in \dot{F}_1$, og $W \in \dot{G}_1$, derfor $U \supseteqq V+W \in \dot{F}_1+\dot{G}_1$, $\dot{F}_1+\dot{G}_1 \in \hat{U}$; vi har fundet $\hat{V} \in \dot{B}(\dot{F})$ og $\hat{W} \in \dot{B}(\dot{G})$, så at $\hat{V} + \hat{W} \subseteqq \hat{U}$.

<u>Lemma</u>: For et fundamentalfilter $\dot{F}$ på E og en omegn U af o i E findes der $\lambda > 0$, så at $\lambda U \in \dot{F}$.

Bevis: Vi vælger en stjerneformet omegn V af o, så at $V + V \subseteqq U$, dernæst $a \in E$, så at $a + V \in \dot{F}$, og $\lambda > 1$, så at $a \in \lambda V$; da er $a + V \subseteqq \lambda V + \lambda V = \lambda(V+V) \subseteqq \lambda U$, og $\lambda U \in \dot{F}$.

Vi kan nu vise, at multiplikationen er kontinuert. For $\lambda \in K$ og $\dot{F} \in \hat{E}$ og $\hat{U} \in \dot{B}(\lambda\dot{F})$ er $U \in \lambda\dot{F} = \lambda\dot{F}+\dot{U}(o)$, d.v.s. U indeholder en mængde af form $\lambda F + V$, hvor $F \in \dot{F}$ og V er en cirkel (henholdsvis stjerneformet, symmetrisk) omegn af o; vi vælger $\delta > o$, så at $\delta^{-1} V \in \dot{F}$, og sætter $W = F \cap \delta^{-1} V \in \dot{F}$; for $\dot{G} \in \hat{W}$ og $\alpha \in K$, så at $|\alpha| \leqq \delta$, er $W \in \dot{G}$, $(\lambda+\alpha)W \subseteqq \lambda W + \alpha W \subseteqq \lambda F + \alpha\delta^{-1}V \subseteqq \lambda F + V \subseteqq U$, så at $U \in (\lambda+\alpha)\dot{G}$; vi har altså fundet $\delta > 0$ og $\hat{W} \in \dot{B}(\dot{F})$, så at $(\lambda+\alpha)\hat{W} \subseteqq \hat{U}$ for $|\alpha| \leqq \delta$.

For $\dot{F} \in \hat{E} \setminus \{\dot{U}(o)\}$ er $\dot{F}$ ikke grovere end $\dot{U}(o)$; vi kan derfor vælge $F \in \dot{F} \setminus \dot{U}(o)$; $\hat{F}$ er da en omegn af $\dot{F}$, der ikke indeholder $\dot{U}(o)$. $\{\dot{U}(o)\}$ er altså en afsluttet delmængde af $\hat{E}$. (Bemærk, at beviset ikke benytter, at $\{o\}$ er afsluttet).

$\hat{E}$ er nu et topologisk vektorrum.

Lad $\dot{F}$ være et fundamentalfilter på E; filterbasen $\varphi(\dot{F})$ på $\hat{E}$ konvergerer mod det til $\dot{F}$ svarende minimale fundamentalfilter $\dot{F} + \dot{U}(o)$.

Bevis: Vi skal vise, at $\dot{U}(\dot{F}+\dot{U}(o))$ er grovere end filtret på $\hat{E}$ med basis $\varphi(\dot{F})$; hertil er det nok at vise, at enhver mængde $\hat{U}$, hvor $U \in \dot{F} + \dot{U}(o)$, indeholder en mængde i $\varphi(\dot{F})$; men $U \in \dot{F}+\dot{U}(o)$ $\Rightarrow \mathring{U} \in \dot{F} + \dot{U}(o) \Rightarrow \mathring{U} \in \dot{F} \Rightarrow \hat{U} \supseteq \hat{U} \cap \varphi(E) = \varphi(\mathring{U}) \in \varphi(\dot{F})$.

Heraf følger dels, at $\dot{F} \in \hat{E}$ er grænsepunkt for filtret $\varphi(\dot{F})$ på $\varphi(E)$, så at $\varphi(E)$ er tæt i $\hat{E}$, dels at ethvert fundamentalfilter $\dot{G}$ på $\varphi(E)$ har et grænsepunkt i $\hat{E}$, idet $\dot{G} = \varphi(\varphi^{-1}(\dot{G}))$ og $\varphi^{-1}(\dot{G})$ er et fundamentalfilter på E; dette medfører, at $\hat{E}$ er fuldstændigt.

Sætning: For ethvert topologisk vektorrum E findes der et par $(\hat{E},\varphi)$ bestående af et fuldstændigt topologisk vektorrum $\hat{E}$ og en lineær homeomorfi φ af E på et tæt underrum $\varphi(E) \subseteq \hat{E}$. $(\hat{E},\varphi)$ er entydigt bestemt på nær isomorfi, d.v.s.: hvis $(\hat{E}_1,\varphi_1)$ opfylder de samme betingelser, findes der en lineær homeomorfi ψ af $\hat{E}$ på $\hat{E}_1$, så at $\varphi_1 = \psi\circ\varphi$.

Bevis: Vi mangler kun entydigheden. Vi antager, at $(\hat{E},\varphi)$ og $(\hat{E}_1,\varphi_1)$ opfylder de stillede betingelser. $\varphi_1\circ\varphi^{-1}$ (henholdsvis $\varphi\circ\varphi_1^{-1}$ er en lineær homeomorfi af $\varphi(E)$ på $\varphi_1(E)$ (henholdsvis $\varphi_1(E)$ på $\varphi(E)$); der findes derfor én kontinuert lineær afbildning ψ (henholdsvis ψ_1) af $\hat{E}$ ind i $\hat{E}_1$ (henholdsvis $\hat{E}_1$ ind i $\hat{E}$), så at $\psi(x) = \varphi_1\circ\varphi^{-1}(x)$ for $x \in \varphi(E)$ (henholdsvis $\psi_1(x_1) = \varphi\circ\varphi_1^{-1}(x_1)$

for $x_1 \in \varphi_1(E)$); $\psi_1 \circ \psi$ (henholdsvis $\psi \circ \psi_1$) er da en kontinuert lineær afbildning af $\hat{E}$ ind i $\hat{E}$ (henholdsvis $\hat{E}_1$ ind i $\hat{E}_1$), så at $\psi_1 \circ \psi(x) = x$ for $x \in \varphi(E)$ (henholdsvis $\psi \circ \psi_1(x_1) = x_1$ for $x_1 \in \varphi_1(E)$) og dermed $\psi_1 \circ \psi(x) = x$ for $x \in \hat{E}$ (henholdsvis $\psi \circ \psi_1(x_1) = x_1$ for $x_1 \in \hat{E}_1$). Dette viser, at ψ er injektiv ($\psi(x) = \psi(y) \Rightarrow x = \psi_1 \circ \psi(x) = \psi_1 \circ \psi(y) = y$) og surjektiv ($x_1 = \psi(\psi_1(x_1))$), og at $\psi_1 = \psi^{-1}$, således at ψ er en lineær homeomorfi.

2.5. Vi vil lige forbedre afsnit 3 (side 5-6).

Lad E og F være topologiske vektorrum; en afbildning f af en delmængde $A \subseteq E$ ind i F kaldes ligelig kontinuert, hvis:

$$\forall U \in \mathring{U}(o_F) \; \exists \; V \in \mathring{U}(o_E) \; \forall x \in A \; (f((x+v) \cap A) \subseteq f(x) + U)$$

eller ækvivalent hermed:

$$\forall \; U \in \mathring{U}(o_F) \; \exists \; V \in \mathring{U}(o_E) \; \forall x,y \in A(y-x \in V \Rightarrow f(y)-f(x) \in U).$$

Begrebet afhænger, ligesom begrebet fundamentalfilter, kun af topologien og gruppestrukturen på det mindste underrum af E, der indeholder A.

En ligelig kontinuert afbildning er kontinuert, og en lineær, kontinuert afbildning $E \to F$ er ligelig kontinuert på enhver delmængde $A \subseteq E$.

En ligelig kontinuert afbildning fører basis $\grave{F}$ for fundamentalfilter på $A \subseteq E$ i basis for fundamentalfilter på f(A); thi for $U \in \mathring{U}(o_F)$ finder vi $V \in \mathring{U}(o_E)$, så at $f((x+v) \cap A) \subseteq f(x)+U$ for $x \in A$, og $a \in A$ og $F \in \grave{F}$, så at $F \subseteq (a+V) \cap A$, og får $f(F) \subseteq f((a+V) \cap A) \subseteq (f(a)+U) \cap f(A)$.

<u>Sætning</u>: Lad der være givet et topologisk vektorrum G, et topologisk vektorrum E, en delmængde $A \subseteq E$, og en ligelig kontinuert afbildning f af A ind i en fuldstændig delmængde $B \subseteq G$. Der findes en og kun én kontinuert afbildning $g:\overline{A} \to B$, så at $g(x) = f(x)$ for $x \in A$. $g(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.

Bevis: Næsten ordret som side 5-6, idet E_1 erstattes med A og G med den fuldstændige delmængde $\overline{f(A)}$. $g(\overline{A}) \subseteq \overline{g(A)}$ er i øvrigt en velkendt egenskab ved kontinuerte funktioner.

Det følger af denne sætning, at struktur på et tæt underrum $E_1 \subseteq E$, defineret ved ligeligt kontinuerte funktioner med værdier i fuldstændige rum, kan udvides på én måde til tilsvarende struktur på E. Lad os for eksempel antage, at E_1 er et normeret rum; for x og $y \in E_1$ er $\|x\| = \|x-y+y\| \leqq \|x-y\| + \|y\|$ og $\|y\| \leqq \|y-x\| + \|x\|$, så at $|\|x\|-\|y\|| \leqq \|x-y\|$; dette viser, at $\| \ \|$ er en ligelig kontinuert funktion på E: $|\|x\|-\|y\|| < \varepsilon$ når blot $\|x-y\| < \varepsilon$. Da $\dot{R}$ er et fuldstændigt rum, findes der én kontinuert afbildning $g : E \to [0,\infty[$, så at $g(x) = \|x\|$ for $x \in E_1$. g er subadditiv og homogen: for $y \in E_1$ er $\{x \in E \mid g(x+y) \leqq g(x)+g(y)\}$ afsluttet og $\supseteqq E_1$, o.s.v. som p.6. Da g er kontinuert, er $g(\overline{\{x \in E_1 \mid \|x\| \leqq \lambda\}}) \subseteqq \overline{\{\|x\| \mid x \in E_1 \wedge \|x\| \leqq \lambda\}} = [0,\lambda]$ og $g(\overline{\{x \in E_1 \mid \|x\| \geqq \lambda\}}) \subseteqq [\lambda,\infty[$; hvis $g(y) < \lambda$, så er da $y \notin \overline{\{x \in E_1 \mid \|x\| \geqq \lambda\}}$, så at $y \in \overline{\{x \in E_1 \mid \|x\| < \lambda\}}$, idet $E = \overline{E_1} = \overline{\{x \in E_1 \mid \|x\| < \lambda\}} \cup \overline{\{x \in E_1 \mid \|x\| \geqq \lambda\}}$; derfor er $\{y \in E \mid g(y) < \lambda\} \subseteqq \overline{\{y \in E \mid g(y) < \lambda\}} \subseteqq \overline{\{x \in E_1 \mid \|x\| < \lambda\}} \subseteqq \{y \in E \mid g(y) \leqq \lambda\}$.

<u>Lemma</u>: Lad E være et topologisk rum, F en tæt delmængde; for en åben delmængde $A \subseteqq E$ gælder: $\overline{A} = \overline{A \cap F}$.

Bevis: $a \in \overline{A}$, hvis og kun hvis enhver åben omegn V af a skærer A; da F er tæt og $A \cap V$ er åben, er $A \cap V \neq \emptyset$ hvis og kun hvis $A \cap V \cap F \neq \emptyset$, så at $a \in \overline{A}$ hvis og kun hvis $a \in \overline{A \cap F}$.

<u>Lemma</u>: Lad E være et topologisk vektorrum, E_1 et tæt underrum, og $\dot{B}_1$ en basis for filtret af omegne af 0 i E_1. $\dot{B} = \{\overline{U} \mid U \in \dot{B}_1\}$ er en basis for filtret af omegne af 0 i E.

Bevis: For $U \in \dot{U}(0_E)$ vælger vi $V = \mathring{V} \in \dot{U}(0_E)$, så at $\overline{V} \subseteqq U$; da $V \cap E_1 \in \dot{U}(0_{E_1})$, findes der $B \in \dot{B}_1$, så at $B \subseteqq V \cap E_1$, og derfor $\overline{B} \subseteqq \overline{V \cap E_1} = \overline{V} \subseteqq U$.

For $B \in \dot{B}_1$ kan vi vælge $U = \mathring{U} \in \dot{U}(0_E)$, så at $U \cap E_1 \subseteqq B$, og derfor $\overline{B} \supseteqq \overline{U \cap E_1} = \quad = \overline{U} \supseteqq U$, og $\overline{B} \in \dot{U}(0_E)$.

Da g er kontinuert, er $\{y \in E \mid g(y) < \lambda\}$ en omegn af 0_E for ethvert $\lambda \in]0,\infty[$; disse mængder udgør en basis for $\dot{U}(0_E)$, da $\{\overline{\{x \in E_1 \mid \|x\| < \lambda\}} \mid \lambda \in]0,\infty[\}$ er en basis og

$\{y \in E \mid g(y) < \lambda\} \subseteq \overline{\{x \in E_1 \mid \|x\| < \lambda\}}$. Da E er et Hausdorffrum, er $\{0\} = \bigcap\{\{y \in E \mid g(y) < \lambda\} \mid \lambda \in]0,\infty[\} = \{y \in E \mid g(y) = 0\}$; g er således en norm på E, og $\{y \mid g(y) \leqq \lambda\} = \overline{\{y \mid g(y) < \lambda\}}$ (idet f.eks. $ry \to y$ for $r \to 1-$), så at $\{y \mid g(y) \leqq \lambda\} = \overline{\{x \in E_1 \mid \|x\| < \lambda\}} = \overline{\{x \in E_1 \mid \|x\| \leqq \lambda\}}$, d.v.s. en afsluttet kugle i E er afslutningen af den tilsvarende kugle i E_1.

For et normeret vektorrum E er således $\hat{E}$ et fuldstændigt normeret vektorrum, d.v.s. et Banachrum.

<u>Sætning</u>: <u>Lad E være et Banachrum, E_1 et tæt underrum, og φ en lineær isometri af E_1 på et tæt underrum af et Banachrum F. Der findes én isometri Ψ af E på F, så at $\Psi(x) = \varphi(x)$ for $x \in E_1$.</u>

Bevis: Af sætningen om entydigheden af fuldstændiggørelse følger, at der findes én udvidelse af φ til en lineær homeomorfi Ψ af E på F. Ψ afbilder da afslutningen af enhedskuglen i E_1 på afslutningen af enhedskuglen i $\varphi(E_1)$, d.v.s. Ψ afbilder enhedskuglen i E på enhedskuglen i F, og må derfor være en isometri.

Tilsvarende ses, at hvis E_1 er en normeret algebra eller et præ Hilbertrum, så er E en normeret algebra, henholdsvis et præ Hilbertrum, og $\hat{E}$ en Banach algebra, henholdsvis et Hilbertrum.

Om fuldstændiggørelse af t.v.r.

I det følgende betegner E et t.v.r., og $\grave{F}, \grave{G}, \grave{H}$ o.s.v. betegner filtre på E.

Er $\grave{F}$ et filter, er også $\lambda\grave{F}$ for $\lambda \neq 0$ et filter, thi $\lambda\grave{F}_1 \cap \lambda\grave{F}_2 = \lambda(\grave{F}_1 \cap \grave{F}_2)$, og $G \supseteq \lambda F$ medfører, at $\lambda^{-1}G \in \grave{F}$. Er $\grave{F}$ et fundamentalfilter, er også $\lambda\grave{F}$ et fundamentalfilter, thi for $U \in \grave{U}(0)$, findes $F \in \grave{F}$, så at $F - F \subseteq \lambda^{-1}U$, men så er $\lambda F \in \lambda\grave{F}$, og $\lambda F - \lambda F = \lambda(F - F) \subseteq U$. Specielt er $\lambda\grave{U}(o) = \grave{U}(o)$.

For vilkårlige filtre $\grave{F}$ og $\grave{G}$ på E er $F + G$ en filterbasis på E. Vi kan derfor definere $\grave{F} * \grave{G} = (\grave{F} + \grave{G})^*$ som det af $F + G$ frembragte filter på E. Det er klart, at $\grave{F} * \grave{G} = \grave{G} * \grave{F}$; endvidere er $(\grave{F} * \grave{G}) * \grave{H} = \grave{F} * (\grave{G} * \grave{H})$, idet begge filtre er $(\grave{F} + \grave{G} + \grave{H})^*$. Ydermere gælder, at $\grave{F} * \grave{G}$ er et fundamentalfilter, hvis $\grave{F}$ og $\grave{G}$ er fundamentalfiltre, thi for $U \in \grave{U}(o)$, findes $V \in \grave{U}(o)$ så at $V + V \subseteq U$; endvidere findes $F \in \grave{F}$ så at $F \div F \subseteq V$, og $G \in \grave{G}$ så at $G - G \subseteq V$, men så er $(F + G) - (F + G) \subseteq V + V \subseteq N$, hvilket viser, at $\grave{F} + \grave{G}$ er en fundamentalfilterbasis. $\grave{U}(o) * \grave{U}(o) = \grave{U}(o)$

<u>Sætning 1.</u> Til hvert fundamentalfilter $\grave{F}$ findes et og kun ét minimalt fundamentalfilter grovere end $\grave{F}$, nemlig $\grave{F} * \grave{U}(o)$. (Minimalt i den forstand, at hvert fundamentalfilter grovere end $\grave{F} * \grave{U}(o)$ er lig med $\grave{F} * \grave{U}(o)$.)

Bevis. $\grave{F} * \grave{U}(o)$ er i følge det foregående et fundamentalfilter, og det er grovere end $\grave{F}$. Er nu $\grave{G} \subseteq \grave{F}$ et fundamentalfilter grovere end $\grave{F}$, er $F \in \grave{F}$ og $U \in \grave{U}(o)$, findes $G \in \grave{G}$, så at $G - G \subseteq U$. Da $G \in \grave{F}$ er $G \cap F \neq \emptyset$, og for $a \in G \cap F$ er $G - a \subseteq U$ og dermed $G \subseteq a + U \subseteq F + U$, hvilket viser, at $F + U \in \grave{G}$. Følgelig er $\grave{F} * \grave{U}(o) \subseteq \grave{G}$, og det ses let heraf, at $\grave{F} * \grave{U}(o)$ er minimalt.

Specielt ses, at et fundamentalfilter $\grave{F}$ er minimalt, hvis og kun hvis $\grave{F} = \grave{F} * \grave{U}(o)$.

Med $\hat{E}$ betegner vi mængden af minimale fundamentalfiltre i E.

Da ethvert omegnsfilter $U(a)$ på E er minimalt, defineres ved $a \to \grave{U}(a)$ en afbildning $\varphi : E \to \hat{E}$. Da E er et Hausdorffrum har forskellige punkter forskellige omegnsfiltre d.v.s. φ er injektiv.

Er $\grave{F}$ og $\grave{G}$ i $\hat{E}$, er også $\grave{F} \ast \grave{G} \in \hat{E}$, thi $(\grave{F} \ast \grave{G}) \ast \grave{U}(o) = \grave{F} \ast (\grave{G} \ast \grave{U}(o)) = \grave{F} \ast \grave{G}$. For $\grave{F} \in \hat{E}$ og $\lambda \neq 0$ er $\lambda\grave{F} \in \hat{E}$, thi $\lambda\grave{F} \ast \grave{U}(o) = \lambda(\grave{F} \ast \lambda^{-1}\grave{U}(o)) = \lambda\grave{F}$.

Idet vi definerer $0 \cdot \grave{F} = \grave{U}(o)$, vil vi vise, at $\hat{E}$ med disse to kompositionsforskrifter er et vektorrum $(\hat{E}, \ast, K)$. Det drejer sig om at eftervise følgende: 1) $\grave{F} \ast \grave{G} \in \hat{E}$, 2) $\grave{F} \ast \grave{G} = \grave{G} \ast \grave{F}$, 3) $\grave{F} \ast (\grave{G} \ast \grave{H}) = (\grave{F} \ast \grave{G}) \ast \grave{H}$, 4) $\grave{F} \ast \grave{U}(o) = \grave{F}$, 5) $\lambda\grave{F} \in \hat{E}$, 6) $\lambda(\mu\grave{F}) = (\lambda\mu)\grave{F}$, 7) $\lambda(\grave{F} \ast \grave{G}) = \lambda\grave{F} \ast \lambda\grave{G}$, 8) $(\lambda + \mu)\grave{F} = \lambda\grave{F} \ast \mu\grave{F}$, 9) $1 \cdot \grave{F} = \grave{F}$.

1),2),3),5),7) er behandlet, 4) følger direkte af definitionen, og 6) og 9) er trivielle. Vi mangler derfor blot at bevise 8): Er $(\lambda + \mu) \neq 0$ og $\lambda, \mu \neq 0$, er $(\lambda + \mu)\grave{F} \subseteq \lambda\grave{F} \ast \mu\grave{F}$; da begge filtre er minimale falder de sammen.

Er $\lambda = 0$ (resp. $\mu = 0$) reduceres ligningen til $\mu\grave{F} = \mu\grave{F} \ast \grave{U}(o)$ (resp. $\lambda\grave{F} = \lambda\grave{F} \ast \grave{U}(o)$).

Er endelig $\lambda + \mu = 0$, $\lambda \neq 0$, er $\lambda\grave{F} \ast \mu\grave{F} = \lambda\grave{F} \ast (-\lambda)\grave{F} = (\lambda\grave{F} - \lambda\grave{F}) = \grave{U}(o)$, thi for $U \in \grave{U}(o)$ findes $F \in \grave{F}$ så at $F - F \subseteq \lambda^{-1}U$, d.v.s. $\lambda F - \lambda F \subseteq U$, og dermed $U \in (\lambda\grave{F} - \lambda\grave{F})'$. Altså er $\grave{U}(o) \subseteq \lambda\grave{F} \ast (-\lambda)\grave{F}$, og da begge filtre er minimale falder de sammen. Hermed er 8) helt behandlet.

Er $U \in \grave{U}(a+b)$, findes V så at $V + V \subseteq U - (a+b)$. Altså er $(a + V) + (b + V) \subseteq U$, hvilket viser, at $U \in \grave{U}(a) + \grave{U}(b)$. Af $\varphi(a+b) = \grave{U}(a+b) \subseteq \grave{U}(a) \ast \grave{U}(b) = \varphi(a) \ast \varphi(b)$ følger, da begge filtre er minimale, at $\varphi(a+b) = \varphi(a) \ast \varphi(b)$. Analogt fås $\grave{U}(\lambda a) = \lambda\grave{U}(a)$, d.v.s. $\varphi(\lambda a) = \lambda\varphi(a)$. Hermed er bevist:

$\varphi : (E, +, K) \to (\hat{E}, \ast, K)$ er lineær.

Vi vil nu organisere $\hat{E}$ som et topologisk vektorrum.

For en mængde $A \subseteq E$ sætter vi $\hat{A} = \{\grave{F} \in \hat{E} \mid A \in \grave{F}\}$; dette stemmer overens med betegnelsen $\hat{E}$, da $E \in \grave{F}$ for ethvert filter $\grave{F}$ på E. For vilkårlige mængder $A, B \subseteq E$, er $\hat{A} \cap \hat{B} = \{\grave{F} \in \hat{E} \mid A \in \grave{F} \wedge B \in \grave{F}\} = \{\grave{F} \in \hat{E} \mid A \cap B \in \grave{F}\} = \widehat{A \cap B}$.

Denne relation viser, at vi kan forsyne $\hat{E}$ med en topologi, idet vi som basis for de åbne mængder vælger mængderne $\hat{U}$, hvor $U \subseteq E$; vi har nemlig klart $\hat{\emptyset} = \emptyset$.

Der gælder nu den grundlæggende relation

$$\varphi(\overset{\circ}{U}) = \hat{U} \cap \varphi(E),$$

thi $\varphi(a) \in \hat{U}$ hvis og kun hvis $U \in \varphi(a) = \grave{U}(a)$, d.v.s. hvis og kun hvis $a \in \overset{\circ}{U}$. Ligningen viser, at billedet af en åben mængde $U = \overset{\circ}{U} \subseteq E$ ved φ, er åbent i den relative topologi på $\varphi(E)$, d.v.s. at φ^{-1} er kontinuert. Endvidere følger, at φ er kontinuert, thi er $\hat{U}$ en omegn af $\varphi(a)$, er $U \in \varphi(a) = U(a)$, hvoraf ses, at også $\overset{\circ}{U} \in \grave{U}(a)$. Altså er $\varphi^{-1}(\hat{U}) = \overset{\circ}{U} \in \grave{U}(a)$, hvormed påstanden er bevist.
φ er altså en homeomorfi af E på $\varphi(E) \subseteq \hat{E}$.

Vi viser nu, at $\hat{E}$ med den indførte topologi er et t.v.r.
Additionen på $\hat{E}$ er kontinuert,
thi en omegn af $\grave{F} * \grave{G}$ indeholder $\hat{U}$, så at $F * G \in \hat{U}$, d.v.s, $U \in \grave{F} * \grave{G}$. Der findes derfor $V \in \grave{F}$ og $W \in \grave{G}$, så at $V + W \subseteq U$. Nu er $\hat{V}$ og $\hat{W}$ omegne af $\grave{F}$ henholdsvis $\grave{G}$, og for $\grave{F}_1 \in \hat{V}$ og $\grave{G}_1 \in \hat{W}$, gælder $V \in \grave{F}_1$ og $W \in \grave{G}_1$. Altså er $U \supseteq V + W \in \grave{F}_1 + \grave{G}_1$, hvoraf følger, at $U \in \grave{F}_1 * \grave{G}_1$, d.v.s. at $\grave{F}_1 * \grave{G}_1 \in \hat{U}$. Hermed er påstanden bevist.

Multiplikationen er kontinuert.
En omegn af λF indeholder en åben mængde $\hat{U}$, så at $\lambda\grave{F} \in \hat{U}$, d.v.s. $U \in \lambda\grave{F}$. Da $\lambda\grave{F} = \lambda F * \grave{U}(o)$, vil $U \supseteq \lambda F + V$, hvor $F \in \grave{F}$ og $V \in \grave{U}(o)$ er en cirkelomegn; vi vælger nu en absorberende cirkelomegn $V_1 \in \grave{U}(o)$, så at $V_1 + V_1 \subseteq V$, og dernæst $a \in E$, så at $a + V_1 \in \grave{F}$. Endvidere vælges δ $(0 < \delta < 1)$, så at $a \in \delta^{-1}V_1$. Nu er $a + V_1 \subseteq \delta^{-1}V_1 + \delta^{-1} V_1 \subseteq \delta^{-1}V$, d.v.s. $\delta^{-1}V \in \grave{F}$. Endelig sættes $W = F \cap \delta^{-1}V$. For $|\mu - \lambda| \leq \delta$ og $\grave{G} \in \hat{W}$ er $\mu\grave{G} \in \hat{U}$, thi $W \in \grave{G}$, og $\mu W = (\lambda + (\mu - \lambda))W \subseteq \lambda W + (\mu - \lambda)W \subseteq \lambda F + (\mu - \lambda)\delta^{-1}V \subseteq \lambda F + V \subseteq U$. Altså er $U \in \mu\grave{G}$, d.v.s. $\mu\grave{G} \in \hat{U}$ som påstået. Hermed er sætningen bevist.

§ 3. Rum af kontinuerte, lineære afbildninger.

Lad E og F være topologiske vektorrum over samme legeme $K(= \mathbb{R}$ eller $\mathbb{C})$. Mængden af kontinuerte lineære afbildninger af E ind i F vil vi betegne $L(E,F)$. For S og $T \in L(E,F)$ og $\lambda \in K$ defineres $S + T$ som afbildningen: $f \to S(f) + T(f)$ og λS som afbildningen: $f \to \lambda S(f)$. Det indses let, at $S + T$ og $\lambda S \in L(E,F)$, og at $L(E,F)$, organiseret ved disse regneregler, er et vektorrum over K; nulelementet $o \in L(E,F)$ er herved den afbildning, der fører enhver vektor i E over i $o \in F$.

Specielt sætter vi $L(E,K) = E'$, og kalder E' det (topologisk) duale rum til E, medens E^* betegner E's algebraisk duale rum, d.v.s. rummet af alle lineære afbildninger: $E \to K$.

Lad nu F være et fuldstændigt topologisk vektorrum, E et topologisk vektorrum og E_1 et tæt underrum i E. For $A \in L(E,F)$ vil afbildningen $A|E_1$, defineret for $e_1 \in E_1$ ved: $A|E_1(e_1) = A(e_1)$, tilhøre $L(E_1,F)$. Omvendt har vi vist, at $A_1 \in L(E_1,F)$ på en og kun én måde kan udvides til et element $A \in L(E,F)$, så at $A|E_1 = A_1$; afbildningen: $A \to A|E_1$ er altså bijektiv: $L(E,F) \to L(E_1,F)$; vi kan derfor, og vil i det følgende ofte, identificere $L(E_1,F)$ og $L(E,F)$ v.h. af denne afbildning; specielt kan vi altså identificere E_1' og E'.

For S og $T \in L(E,E)$ definerer vi ST som afbildningen: $S\circ T$ $e \to S(T(e)) = S\circ T(e)$; det indses let, at $ST \in L(E,E)$, og at $L(E,E)$, forsynet også med denne regneregel, er en algebra.

3.2. I dette afsnit betragtes det tilfælde, at E og F er normerede vektorrum.

For en lineær afbildning $A:E \to F$, sætter vi $\|A\| = \inf\{k \in \mathbb{R} \mid \forall x \in E(\|x\| \leq 1 \Rightarrow \|Ax\| \leq k)\} = \sup\{\|Ax\| \mid x \in E, \|x\| \leq 1\} = \sup\{\|Ax\| \mid x \in E, \|x\| = 1\} = \sup\{\|Ax\| \cdot \|x\|^{-1} \mid x \in E \setminus \{0\}\}$. hvis $\|A\| < \infty$, kalder vi A begrænset. (Vi har her sat $\inf\{k \in \dot{R} \mid k \in \emptyset\} = \infty$).

A er begrænset, hvis og kun hvis A er kontinuert. Thi hvis A er kontinuert, kan vi til $\varepsilon > 0$ finde $\delta(\varepsilon) > 0$, så at $\|Ax\| \leqq \varepsilon$ for $\|x\| \leqq \delta(\varepsilon)$, og derfor $\|Ax\| \leqq \delta(1)^{-1}$ for $\|x\| \leqq 1$; og hvis A er begrænset, er $\|Ax\| \leqq \varepsilon$ for alle x, hvis $\|A\| = 0$, og for $\|x\| \leqq \varepsilon \|A\|^{-1}$, hvis $\|A\| \neq 0$, så at A er kontinuert i 0 og derfor overalt.

$\| \ \|$ er en norm på L(E,F); thi for $\lambda \in K$ og $A,B \in L(E,F)$ er $\|\lambda A\| = \sup\{\|\lambda Ax\| \mid x \in E, \|x\| \leqq 1\} = \sup\{|\lambda|\,\|Ax\| \mid x \in E, \|x\| \leqq 1\} = |\lambda|\,\|A\|$, og $\|A+B\| = \sup\{\|Ax+Bx\| \mid x \in E, \|x\| \leqq 1\} \leqq \sup\{\|Ax\|+\|Bx\| \mid x \in E, \|x\| \leqq 1\} \leqq \sup\{\|Ax\| \mid x \in E, \|x\| \leqq 1\} + \sup\{\|Bx\| \mid x \in E, \|x\| \leqq 1\} = \|A\| + \|B\|$, og $\|A\| = 0 \iff \forall\, x \in E\, (\|Ax\| = 0) \iff \forall x \in E(Ax = 0) \iff A = 0$.

En normeret algebra er en algebra L, hvis underliggende vektorrum er et normeret vektorrum med en norm, der også opfylder: $\forall\, A,B \in L(\|AB\| \leqq \|A\|\cdot\|B\|)$.

L(E,E) er en normeret algebra; thi for $A,B \in L(E,E)$ og $x \in E$ er $\|ABx\| \leqq \|A\|\cdot\|Bx\| \leqq \|A\|\cdot\|B\|\cdot\|x\|$, så at $\|AB\| \leqq \|A\|\cdot\|B\|$.

Hvis F er et Banachrum, er L(E,F) et Banachrum.

Bevis: Lad (S_n) være fundamentalfølge i L(E,F), lad der altså til $\varepsilon > 0$ eksistere $N \in \dot{N}$, så at $\|S_m - S_n\| \leqq \varepsilon$ for n og m $\geqq N$; for $x \in E$ er da $\|S_m x - S_n x\| \leqq \|S_m - S_n\|\cdot\|x\|$, så at $(S_n x)$ er en fundamentalfølge i F, og derfor har en grænseværdi $Sx \in F$; af $S_n(\lambda x+y) = \lambda S_n x + S_n y$ følger ved grænseovergang $S(\lambda x+y) = \lambda Sx + Sy$, så at S er lineær; da $\|S_n x - S_m x\| \leqq \varepsilon$ for n og m $\geqq N$ og $x \in E$ med $\|x\| \leqq 1$, er $\|Sx - S_m x\| \leqq \varepsilon$ for $m \geqq N$ og $x \in E$ med $\|x\| \leqq 1$, og derfor $\|S - S_m\| \leqq \varepsilon$ for $m \geqq N$; da $\|S\| \leqq \|S - S_N\| + \|S_N\| \leqq \varepsilon + \|S_N\| < \infty$, er S kontinuert, og S_n konvergerer mod S.

L(F,F) er således en Banachalgebra, når F er et Banachrum.

Hvis E_1 er et tæt underrum i E og F er et Banachrum, har vi identificeret $L(E,F)$ med $L(E_1,F)$ ved hjælp af afbildningen $T \to T \mid E_1$; herved er $\|T\| = \|T \mid E_1\|$, således at rummene også er isomorfe som Banachrum; thi $\|T \mid E_1\| =$ $\sup\{\|Tx\| \mid x \in E_1 \wedge \|x\| \leqq 1\} = \sup\{\|Tx\| \mid x \in E \wedge \| \, \| \leqq 1\} =$ $\|T\|$, da $\{x \in E_1 \mid \|x\| \leqq 1\}$ er tæt i $\{x \in E \mid \|x\| \leqq 1\}$, og den kontinuerte afbildning $x \to \|Tx\|$ fører tæt delmængde i tæt delmængde.

Kommentarer og rettelser til Mat. 6, 1962-63, KII, 1.

Ved siden af teorien for komplekse rum findes også en teori for reelle rum. De to teorier stemmer overens på næsten alle punkter. I aksiomerne A og B ændres $\mathring{C}$ til $\mathring{R}$; B.3. lyder da: $\forall\, f,g \in H((g|f) = (f|g))$.

Relationen $4(f|g) = \sum_{n=0}^{3} i^n(f + i^n g|f + i^n g)$, der i øvrigt, ligesom $(f+g|f+g) + (f-g|f-g) = 2(f|f) + 2(g|g)$, er konsekvens af A og B1., B2., ~~og B3~~., må erstattes med $2\cancel{4}(f|g) + 2(g|f) = \sum_{n=0}^{1} (-1)^n (f+(-1)^n g|f+(-1)^n g) = (f+g|f+g) - (f-g|f-g)$. ($= 4(f|g)$ hvis B3 er opf.).

Side 2 l. 18 skal [0,2] rettes til]0,2]; men i øvrigt kan De betragte definitionen af og sætningen om ligeligt konvekse rum som en øvelse, og i stedet læse:

<u>Sætning</u>: En ikke tom konveks, fuldstændig delmængde F af et præ Hilbertrum H indeholder et og kun ét element af mindst norm.

Bevis: $\{a \in \mathring{R} \mid \exists\, x \in F(\|x\| = a)\}$ er ikke tom og nedad begrænset, og har derfor en nedre grænse $d \geq 0$. Der findes derfor en følge (x_n) af elementer i F, så $\|x_n\| \to d$; da $\frac{1}{2}(x_n+x_m) \in F$, er $\|x_n+x_m\| \geqq 2d$ for alle $n,m \in \mathring{N}$; for $N \in \mathring{N}$, så at $\|x_n\| - d < \varepsilon$ for $n \geq N$, og for m og $n \geqq N$ fås: $\|x_n-x_m\|^2 = 2\|x_n\|^2 + 2\|x_m\|^2 - \|x_n+x_m\|^2 \leqq 2\|x_n\|^2 + 2\|x_m\|^2 - 4d^2 \leqq 4(d+\varepsilon)^2 - 4d^2 = 4\varepsilon(2d+\varepsilon)$; (x_n) er altså en fundamentalfølge og har et grænsepunkt $x_0 \in F$; da $\|\ \|$ er en kontinuert funktion, er $\|x_0\| = \lim\|x_n\| = d$.

Entydigheden kan også udledes ved hjælp af parallelogram loven: hvis x og $y \in F$ og $\|x\| = \|y\| = d$, er $\frac{1}{2}(x+y) \in F$, og $\|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 - \|x+y\|^2 \leqq 4d^2 - 4d^2 = 0$, så at $x = y$.

II. Forskellige forberedelser

1. Hilbertrum

En mængde H kaldes et komplekst quasi præ Hilbertrum, dersom det opfylder følgende aksiomer:

A: H er et vektorrum over de komplekse tals legeme $\mathbb{C}$.

B: Der er givet en afbildning $(f,g) \to (f|g)$, $H^2 \to \mathbb{C}$, (det indre produkt eller skalarproduktet), så at:

1. $\forall_{\mathbb{C}} a, \forall_H f, g : (af|g) = a(f|g)$;
2. $\forall_H f, g, h : (f + g|h) = (f|h) + (g|h)$;
3. $\forall_H f, g : (g|f) = \overline{(f|g)}$ (stregen angiver kompleks konjugering)
4. $\forall_H f : (f|f) \geqq 0$.

H kaldes et præ Hilbertrum, hvis yderligere:

5. $\forall_H f : (f|f) = 0 \Rightarrow f = 0$

<u>Sætning</u>: I et quasi præ Hilbertrum gælder Schwarz' ulighed: $|(f|g)|^2 \leqq (f|f)\cdot(g|g)$, $\forall_H f, g$.
I et præ Hilbertrum gælder = kun, hvis f og g er lineært afhængige.

Bevis: Sæt $(f|g) = se^{it}$, $s \geqq 0$, For $a \in \mathbb{R}$ gælder: $0 \leqq (f + ae^{it}g|f + ae^{it}g) = (f|f) + 2as + a^2(g|g)$, og derfor $s^2 = |(f|g)|^2 \leqq (f|f) \cdot (g|g)$; = gælder kun, hvis $(g|g) = 0$, eller hvis der $\exists\, b \in \mathbb{C}$, så $(f + bg|f + bg) = 0$.

<u>Sætning</u>: I et præ Hilbertrum er $f \to \|f\| = (f|f)^{\frac{1}{2}}$ en norm.

Bevis: $0 \leqq \|f + g\|^2 = \|f\|^2 + (f|g) + (g|f) + \|g\|^2 \leqq (\|f\| + \|g\|)^2$. De øvrige norm egenskaber vises endnu lettere.

Af beviset ses, at $\|f + g\| = \|f\| + \|g\|$ kun kan gælde, hvis $g = 0$, eller $f = ag$, $a \geqq 0$.

Ved udregning vises relationerne: $4(f|g) = \sum_{n=0}^{3} i^n \|f + i^n g\|^2$, og $\|f + g\|^2 + \|f - g\|^2 = 2\|f\|^2 + 2\|g\|^2$ (parallelogram loven)

Idet H forsynes med normtopologien, og derefter H^2 med produkttopologien, gælder: $(f,g) \to (f|g)$ er kontinuert: $H^2 \to \mathbb{C}$, idet $|(f|g)-(h|k)| = |(f-h|g-k)+(f-h|k)+(h|g-k)| \leq \|f-h\|\cdot\|g-k\|+\|f-h\|\cdot\|k\|+\|h\|\|g-k\|$.

Definition: Et normeret rum H kaldes ligelig konvekst, hvis der $\exists$ en funktion $\delta:]0,2] \to \mathbb{R}^+$, så at: $f \in H$, $g \in H$, $\|f\| \leq 1, \|g\| \leq 1$, $\|f-g\| \geq \varepsilon > 0 \Rightarrow \|\frac{1}{2}(f+g)\| \leq 1-\delta(\varepsilon)$.

Det følger let af parallelogramloven, at et præ Hilbertrum er ligelig konvekst.

<u>Sætning</u>: En konveks, fuldstændig delmængde F af et ligelig konvekst rum H indeholder ét element med mindst norm.

Bevis: Sæt $d = \inf\{\|f\| \mid f \in F\}$. Hvis $d = 0$, indeholder F, der er fuldstændig og derfor afsluttet, 0. Antag $d > 0$, og sæt, for $\varepsilon > 0$, $F_\varepsilon = F \cap \{f \in H \mid \|f\| \leq d+\varepsilon\}$. Hvis $\|f_0\| = d$, vil $f_0 \in \bigcap\{\overline{F}_\varepsilon \mid \varepsilon > 0\}$. Da et fundamentalfilter på F har ét fortætningspunkt, er det nok at vise, at $\{F_\varepsilon | \varepsilon > 0\}$ er basis for et fundamentalfilter, altså indeholder mængder af vilkårlig lille diameter. Vi antager, at der $\exists\ \eta \in [0,2]$, så at der for vilkårligt $\varepsilon \in]0,1]$ $\exists$ f_ε og $g_\varepsilon \in F_\varepsilon$ med $\|f_\varepsilon - g_\varepsilon\| \geq \eta$ og derfor $\|(d+\varepsilon)^{-1}(f_\varepsilon - g_\varepsilon)\| \geq \eta(d+\varepsilon)^{-1} \geq \eta(d+1)^{-1}$; dette medfører, at $\|\frac{1}{2}(f_\varepsilon+g_\varepsilon)\| \leq (1-\delta(\eta(d+1)^{-1}))\cdot(d+\varepsilon)$, hvilket for tilstrækkeligt lille $\varepsilon > 0$ er i modstrid med, at $d \leq \|\frac{1}{2}(f_\varepsilon+g_\varepsilon)\|$, da den konvekse mængde F indeholder $\frac{1}{2}(f_\varepsilon+g_\varepsilon)$.

Definition: Lad H være et præ Hilbertrum, f og $g \in H$, F og $G \subseteq H$; $f \perp g$, hvis $(f \mid g) = 0$; $f^\perp = \{g \in H \mid g \perp f\}$; $F^\perp = \bigcap\{f^\perp \mid f \in F\}$; $F \perp G$, hvis $G \subseteq F^\perp$; ($\perp$ læses vinkelret eller ortogonal).

For $F \subseteq H$ er $F^\perp$ afsluttet, da det indre produkt er kontinuert.

<u>Sætning</u>: Lad F være et fuldstændigt underrum i et præ Hilbertrum H, f et element $\in$ H. f kan entydigt skrives $f = f_1+f_2$,

med $f_1 \in F$, $f_2 \perp F$.

Bevis: $\{f-g \mid g \in F\}$ er konveks og fuldstændig, og indeholder derfor et element $f_2 = f-f_1, f_1 \in F$, af mindst norm. For $g \in F \setminus \{0\}$, $\|g\| = 1$, fås: $0 \leqq \|f_2-(f_2|g)\cdot g\|^2 - \|f_2\|^2 = -\overline{(f_2|g)}\cdot(f_2|g) - (f_2|g)\cdot(g|f_2) + |(f_2|g)|^2 = -|(f_2|g)|^2$, $f_2 \perp g$; vi har altså $f_2 \perp F$.

$f_1 + f_2 = g_1 + g_2$, $f_1, g_1 \in F$, $f_2, g_2 \perp F$, $\Rightarrow$

$f_1 - g_1 = g_2 - f_2 \in F \cap F^{\perp} = \{0\}$.

1.2 Et præ Hilbertrum H er et Hilbertrum, hvis det opfylder aksiomet:

C: H er et fuldstændigt rum.

Lad H være et præ Hilbertrum; for $g \in H$ er $f \to (f|g)$ en kontinuert funktional $g' \in H'$, og $\|g\| = g'(\|g\|^{-1}g) \leqq \|g'\| \leqq \|g\|$, idet $|(f|g)| \leqq \|f\| \cdot \|g\|$. Omvendt har vi:

<u>Sætning</u>: Lad H være et Hilbertrum, $\alpha \in H'$. $\exists\, \tilde{\alpha} \in H$, så $\alpha(f) = (f|\tilde{\alpha})$, $\forall f \in H$. $\|\tilde{\alpha}\| = \|\alpha\|$.

Bevis: $\alpha^{-1}(o) = F$ er et afsluttet, derfor fuldstændigt, underrum $\subseteqq H$; hvis $F = H$, er $\alpha(f) = (f|0)$, $\forall f \in H$. $F \neq H \Rightarrow$ $\exists k \in H \setminus F \Rightarrow \exists h \in F^{\perp}$, med $\alpha(h) = 1$. For $\tilde{\alpha} = \|h\|^{-2}h$ og vilkårligt $d \in H$ gælder: $d - \alpha(d)h \in F$, $(d|\tilde{\alpha}) = \alpha(d)\,(h|\tilde{\alpha}) = \alpha(d)$.

For afbildningen $g \to g'$ gælder: $(f+g)' = f' + g'$, $(ag)' = \bar{a}g'$, $\forall a \in \mathbb{C}$, $\forall f,g \in H$. Vi udtrykker dette i:

<u>Sætning</u>: H' er isometrisk og konjugeret isomorf med H.

§ 3. Underrum og projektioner.

Lad H være et Hilbertrum. I II,1 er det vist, at for et vilkårligt afsluttet (og derfor fuldstændigt) underrum $F \subseteq H$ kan enhver vektor $h \in H$ skrives $h = f + g$, hvor $f \in F$ og $g \in F^{\perp}$. Afbildningen $h \to f$ kaldes en (ortogonal) projektion og betegnes P_F, eller blot P. P er åbenbart en lineær afbildning $H \to H$, og hvis $F \neq \{0\}$ er $\|P\| = 1$, idet $\|h\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2 \geq \|Ph\|^2$ og $Pf = f$. $E - P_F = P_{F^{\perp}}$.

<u>Lemma</u>: Lad F og G være ortogonale underrum i H. En vilkårlig vektor $h \in H$ kan skrives $h = f + g$ med $f \in F$ og $g \in G$, hvis og kun hvis $G = F^{\perp}$ og $F = G^{\perp}$.

Bevis: Hvis $G = F^{\perp}$ og $F = G^{\perp}$, er F og G afsluttede, og muligheden af opspaltningen følger af ovenstående.

Når F og G er ortogonale, er $F \subseteq G^{\perp}$ og $G \subseteq F^{\perp}$. Lad nu $h = f + g$ være opspaltningen af en vektor $h \in F^{\perp}$; da $\|f\|^2 + \|g\|^2 = \|h\|^2 = (h|f + g) = (h|g) = \|g\|^2$, er $f = 0$ og $h \in G$, dvs. $G = F^{\perp}$. På samme måde vises $F = G^{\perp}$.

For underrum G og $F \subseteq G$ i H gælder $G^{\perp} \subseteq F^{\perp}$; da $G^{\perp}$ er afsluttet, har vi $F \subseteq \bar{F} \subseteq F^{\perp\perp}$, og derfor $F^{\perp\perp\perp} \subseteq \bar{F}^{\perp} \subseteq F^{\perp} \subseteq F^{\perp\perp\perp}$, altså $\bar{F}^{\perp} = F^{\perp} = F^{\perp\perp\perp}$; da $h \in H$ kan skrives $h = f + g$ med $f \in \bar{F}$ og $g \in F^{\perp}$, er $\bar{F} = F^{\perp\perp}$.

For vilkårlige underrum F_ν, $\nu = 1,\dots,n$, sætter vi $F_1 + \dots + F_n = \sum_{\nu=1}^{n} F_\nu = \{f_1 + \dots + f_n | f_\nu \in F_\nu, \nu = 1,\dots,n\}$; da $h \perp \sum_{\nu=1}^{n} F_\nu \iff h \perp F_\nu$ for $\nu = 1,\dots,n \iff h \in \cap\{F_\nu^{\perp} \mid \nu = 1,\dots,n\}$ er $(\sum_{\nu=1}^{n} F_\nu)^{\perp} = \cap\{F_\nu^{\perp} \mid \nu = 1,\dots,n\}$; erstatter vi her F_ν med $F_\nu^{\perp}$ og antager F_ν afsluttet, får vi $(\sum_{\nu=1}^{n} F_\nu^{\perp})^{\perp} = \cap\{F_\nu \mid \nu = 1,\dots,n\}$, og

$(\bigcap\{F_\nu \mid \nu=1,\dots,n\})^\perp = \overline{\sum_{\nu=1}^{n} F_\nu^\perp}$. Hvis F_1 og F_2 er ortogonale afsluttede underrum, kan $h \in H$ skrives $h = f_1+f_3$ med $f_1 \in F_1$ og $f_3 \in F_1^\perp$, og $f_3 = f_2+f_0$ med $f_2 \in F_2 \subseteq F_1^\perp$ og $f_0 = f_3-f_2 \in F_2^\perp$ og $\in F_1^\perp$, altså $h = f_0+f_1+f_2$ med $f_1+f_2 \in F_1+F_2$ og $f_0 \in F_1^\perp \cap F_2^\perp \subseteq (F_1+F_2)^\perp$; ifølge lemmaet er da $F_1+F_2 = (F_1^\perp \cap F_2^\perp)^\perp = \overline{F_1+F_2}$, og $P_{F_1+F_2} = P_{F_1}+P_{F_2}$. For ikke ortogonale, afsluttede underrum behøver F_1+F_2 ikke at være afsluttet. For vilkårligt endeligt mange parvis ortogonale, afsluttede underrum $F_1,\dots,F_n$ fås ved induktion, at $F_1+\dots+F_n$ er afsluttet, og $P_{F_1+\dots+F_n} = P_{F_1}+\dots+P_{F_n}$.

Lad nu $\{F_i \mid i \in I\}$, hvor I er en indeksmængde, være en mængde af parvis ortogonale afsluttede underrum $\subseteq H$, og sæt for $h \in H$ og $i \in I$ $P_{F_i} h = h_i$. For en vilkårlig endelig delmængde $J \subseteq I$ er $h = \sum_{j\in J} h_j + g$ med $g \perp \sum_{j\in J} F_j$, og derfor $\sum_{j\in J} \|h_j\|^2 = \|h\|^2-\|g\|^2 \leqq \|h\|^2$; $\{i \in I \mid \|h_i\| \geqq n^{-1}\}$ må da være endelig for $n \in \mathbb{N}$, og $\{i \in I \mid \|h_i\| > 0\}$ endelig eller nummererbar; hvis den er nummererbar, nummererer vi dens elementer $i_1, i_2, \dots$, og får $\sum_{\nu=1}^{n} \|h_{i_\nu}\|^2 \leqq \|h\|^2$ for alle $n \in \mathbb{N}$, og derfor $\sum_{\nu=1}^{\infty} \|h_{i_\nu}\|^2 \leqq \|h\|^2$ (Bessels ulighed); h_{i_1}, $h_{i_1}+h_{i_2}, \dots$ er da en fundamentalfølge, og har en grænseværdi, som vi vil betegne

$\sum_{\nu=1}^{\infty} h_{i_\nu} = \sum_{i\in I} h_i$ i det mindste afsluttede underrum F, der indeholder alle F_i. Da det indre produkt er kontinuert, er

$(\sum\{h_{i_\nu} \mid \nu \in N \text{ og } i_\nu \neq j\} \mid f) = \lim_{n\to\infty} \sum\{(h_{i_\nu} \mid f) \mid \nu= 1,\dots,n,\ i_\nu \neq j\} = 0$

for $f \in F_j$, og derfor $P_{F_j}(\sum_{i\in I} h_i) = h_j$ og $h_0 = h - \sum_{i\in I} h_i \perp F_i$ for alle $i \in I$, $h_0 \perp F$, og $P_F h = \sum_{i\in I} h_i$. Hermed er også godtgjort, at $\sum_{i\in I} h_i$ ikke afhænger af den foretagne nummerering af elementerne i $\{i \in I \mid \|h_i\| > 0\}$. $\sum_{i\in I} \|h_i\|^2 = \sum_{\nu=1}^{\infty} \|h_{i_\nu}\|^2 = \lim_{n\to\infty} \|\sum_{\nu=1}^{n} h_{i_\nu}\|^2 =$ $\|\sum_{i\in I} h_i\|^2 = \|h\|^2-\|h_0\|^2$, og er $= \|h\|^2$, hvis og kun hvis $h_0 = 0$, $h \in F$. Vi skriver $P_F = \sum_{i\in I} P_{F_i}$.

Vi vil særligt fremhæve tilfældet, hvor alle F_i, $i \in I$, er éndimensionale, frembragt af enhedsvektorerne f_i, $F_i = \{\lambda f_i | \lambda \in \mathbb{C}\}$. For $h \in H$ og $i \in I$ er $h - (h|f_i)f_i \perp F_i$, derfor $h_i = (h|f_i)f_i$ og $\|h_i\| = |(h|f_i)|$.

Sætning: Lad $\{f_i | i \in I\}$ være en mængde af parvis ortogonale, normerede vektorer i H (et ortonormalsystem), og lad F være det mindste afsluttede underrum $\subseteq H$, der indeholder alle f_i. For $h \in H$ er $(h|f_i) = 0$ for alle på nær endeligt eller nummererbart mange $i \in I$, $\sum_{i\in I} |(h|f_i)|^2 \leqq \|h\|^2$, og $\sum_{i\in I} (h|f_i)f_i$ er konvergent med summen $P_F h$.

Følgende betingelser er ækvivalente:

1) $F = H$, 2) $h = \sum_{i\in I} (h|f_i)f_i$ for alle $h \in H$, 3) $(h|g) = \sum_{i\in I} (h|f_i)(f_i|g)$ for alle $h,g \in H$, 4) $\|h\|^2 = \sum_{i\in I} |(h|f_i)|^2$ for alle $h \in H$. (Parsevals relation).

Bevis: Første del og ækvivalensen af 1), 2) og 4) er vist; 2) $\Rightarrow$ 3) på grund af kontinuiteten af det indre produkt, og 4) er specialtilfældet $g = h$ af 3).

3.2 Lemma: $P \in \mathcal{L}$ er en projektion, hvis og kun hvis $P^* = P = P^2$, P er selvadjungeret og idempotent.

Bevis: For et afsluttet underrum $F \subseteq H$, $P = P_F$ og $f,g \in H$ gælder $0 = (Pf|(E-P)g) = (f|(P^*-P^*P)g)$, derfor $P^* = P^*P = (P^*P)^* = P$.

Hvis $P^* = P = P^2$ sætter vi $F = \{f \in H | Pf = f\}$; for $h \in H$ er $h = Ph + (E-P)h$ med $Ph \in F$, da $PPh = Ph$, og $(E-P)h \perp F$, da $((E-P)h|f) = (h|f)-(h|P^*f) = 0$ for $f \in F$. P er altså projektionen på F.

For en projektion P og $f \in H$ gælder $\|Pf\|^2 = (Pf|Pf) = (Pf|f)$; da $0 \leqq \|Pf\|^2 \leqq \|f\|^2$, er $0 \leqq P \leqq E$; da $f \in PH \iff \|f\| = \|Pf\|$, er $PH = \{f \in H | (Pf|f) = (f|f)\}$.

Sætning: For to projektioner P og Q er følgende betingelser ækvivalente:

1) $P \leqq Q$, 2) $PH \subseteq QH$, 3) $(E-Q)P = 0$, 4) $P = QP$, 5) $P = PQ$.

Bevis: 1) $\Rightarrow$ 2): $f \in PH \Rightarrow (f|f) = (Pf|f) \leqq (Qf|f) \leqq (f|f) \Rightarrow (Qf|f) = (f|f) \Rightarrow f \in QH$. 2) $\Rightarrow$ 3): for $f,g \in H$ er $((E-Q)Pf|g) = (Pf|(E-Q)g) = 0$, da $PH \subseteq QH \Rightarrow (E-Q)H = (QH)^{\perp} \subseteq (PH)^{\perp}$. 3) $\Longleftrightarrow$ 4) $\Longleftrightarrow$ 5) da $(E-Q)P = 0 \Longleftrightarrow P = QP \Longleftrightarrow P^* = P^*Q^*$. 5) $\Rightarrow$ 1): $(Pf|f) = \|Pf\|^2 = \|PQf\|^2 \leqq \|Qf\|^2 = (Qf|f)$ for alle $f \in H$.

Sætning: Hvis P og Q er kommuterede projektioner, er PQ den største projektion $\leqq P$ og Q, og $P + Q - PQ$ den mindste projektion $\geqq P$ og Q.

Bevis: Da $PQ = QP$ er PQ selvadjungeret, og $PQPQ = P^2Q^2 = PQ$. $P \leqq E \Rightarrow QP \leqq Q$ og tilsvarende $\leqq P$. Hvis R er en projektion $\leqq P$ og Q, kommuterer R med P og Q, og $R = PR \leqq PQ$.

Hvis S er den mindste projektion $\geqq P$ og Q, er $E-S$ den største projektion $\leqq E-P$ og $E-Q$, og $S = E-- (E-P)(E-Q) = P+Q - PQ$.

Sætning: En operator $A \in \mathscr{L}$ kommuterer med projektionen P, hvis og kun hvis $APH \subseteq PH$ og $A(PH)^{\perp} \in (PH)^{\perp}$.

Bevis: $APH \subseteq PH$ er ensbetydende med $AP = PAP$, og $A(PH)^{\perp} \subseteq (PH)^{\perp}$ tilsvarende med $(E-P)A(E-P) = A(E-P)$, eller $PA(E-P) = 0$, $PA = PAP$. $AP = PAP$ og $PA = PAP \Rightarrow AP = PA \Rightarrow PAP = PPA = PA$ og $AP = APP = PAP$.

Hvis A er selvadjungeret, er betingelsen $APH \subseteq PH$ tilstrækkelig, thi $AP = PAP \Rightarrow PA^* = PA^*P$.

<u>Kommentarer og rettelser til Mat. 6, 1962-63 K III, 3.</u>

Side 2, l. 11 skal: ortogonale underrum ændres til: ortogonale, afsluttede underrum, og l. 12 skal: vilkårlig delmængde ændres til: vilkårlig endelig delmængde.

<u>Lemma</u>: Lad H være et præ Hilbertrum og F et underrum $\subsetneq$ H. Om følgende betingelser:

I F er endelig dimensionalt

II F er fuldstændigt

III 1) For ethvert $h \in H$ indeholder $h - F$ et element af mindst norm.

ortogonalt $F^{\perp}$

2) Der findes et underrum $G \subsetneq \cancel{H}$, så at $H = F \oplus G$

3) $H = F + F^{\perp}$

4) Der findes $P \in L(H,H)$, så at: $P = P^2$(P er idempotent), $\forall\, f,g \in H\ ((Pf|g) = (f|Pg))$(P er symmetrisk), og $F = \{f \in H \mid Pf = f\}$.

IV $F = F^{\perp\perp}$

V F er afsluttet

gælder, at III 1), 2), 3) og 4) er ækvivalente, og I $\Rightarrow$ II $\Rightarrow$ III $\Rightarrow$ IV $\Rightarrow$ V (og ingen af pilene kan vendes, jfr. øvelser).

Bevis: I $\Rightarrow$ II følger af kap. I, øv. 3.II $\Rightarrow$ III 1) $\Rightarrow$ III 3) er bevist i K II, 1 (1962-63). III 3) $\Rightarrow$ III 2) trivielt, og III 2) $\Rightarrow$ III 3) $\Rightarrow$ IV bevises ordret som lemmaet K III, 3 side 1 (1962-63). IV $\Rightarrow$ V er trivielt.

III 3) $\Rightarrow$ III 4) : $h \in H$ kan, på én måde, skrives $h = f+g$ med $f \in F$ og $g \in F^{\perp}$. Vi definerer P ved $Ph = f$; det følger direkte af entydigheden af opspaltningen, at P er lineær ($h_1 = f_1+g_1, h_2 = f_2+g_2 \Rightarrow \lambda h_1+h_2 = \lambda f_1+f_2+\lambda g_1+g_2$, så at $P(\lambda h_1+h_2 = \lambda Ph_1+Ph_2)$ og $Pf = f$, så at $P = P^2$. Da også $f = Pf \Rightarrow f \in F$ er

$F = \{f \in H \mid Pf = f\}$. For h_1 og h_2 i H, $h_1 = f_1+g_1$, $h_2 = f_2+g_2$, er $(Ph_1 | h_2) = (f_1 | f_2+g_2) = (f_1 | f_2) = (f_1+g_1 | f_2) = (h_1 | Ph_2)$, d.v.s. P er symmetrisk.

III 4) $\Rightarrow$ III 3): For $h \in H$ er $Ph \in F$, da $PPh = P^2h = Ph$, og $h - Ph \in F^{\perp}$, da $(f | h-Ph) = (f|h) - (Pf|h) = 0$ for vilkårligt $f \in F$; $h = Ph + (h-Ph)$ er da den ønskede opspaltning af h.

Nu mangler vi kun III 3) $\Rightarrow$ III 1): hvis $h = f+g$, med $f \in F$ og $g \in F^{\perp}$, og $k \in F$, er $\|h-k\|^2 = \|h-f+f-k\|^2 = \|g+f-k\|^2 = \|g\|^2 + \|f-k\|^2 \geqq \|g\|^2$, så at g er et element af mindst norm i $h - F$.

For et underrum F i et præ Hilbert rum kan vi da stadig slutte $\bar{F} \subseteqq F^{\perp\perp}$ og $\bar{F}^{\perp} = F^{\perp} = F^{\perp\perp\perp}$, men ikke almindeligt $\bar{F} = F^{\perp\perp}$; desuden kan vi slutte, at $\left(\sum_{\nu=1}^{n} F_\nu\right)^{\perp} = \bigcap\{F_\nu^{\perp} \mid \nu = 1,\dots,n\}$, men ikke almindeligt $\left(\sum_{\nu=1}^{n} F_\nu\right)^{\perp} = \bigcap\{F_\nu^{\perp} | \nu = 1,\dots,n\}$ eller $(\bigcap\{F_\nu \mid \nu = 1,\dots,n\})^{\perp} = \sum_{\nu=1}^{n} F_\nu^{\perp}$.

For vilkårligt endeligt mange ortogonale underrum $F_1,\dots,F_n$, der opfylder betingelserne III, finder vi, at summen opfylder betingelserne III. I øvrigt vises det let, at summen er fuldstændig, hvis alle F_ν er fuldstændige; thi hvis (x_μ) er fundamentalfølge i $F_1 + \dots + F_n$, er $(P_{F_\nu} x_\mu)$ en fundamentalfølge i F_ν, da $\|P_{F_\nu}(x_\mu - x_\kappa)\| \leqq \|x_\mu - x_\kappa\|$, og hvis $P_{F_\nu} x_\mu \to x_{o\nu} \in F_\nu$, vil $x_\mu = \sum_{\nu=1}^{n} P_{F_\nu} x_\mu \to \sum_{\nu=1}^{n} x_{o\nu}$, da additionen er kontinuert.

Lad nu $\{F_i \mid i \in I\}$, hvor I er en indeksmængde, være en mængde af parvis ortogonale underrum, der opfylder betingelserne III, og lad F være det mindste afsluttede underrum $\subseteqq H$, der indeholder alle F_i. For $h \in H$ sætter vi $P_{F_i} h = h_i$. For en vilkårlig endelig delmængde $J \subsetneqq I$ er $h = \Sigma\{h_j \mid j \in J\} + g$ med $g \perp \Sigma\{F_j \mid j \in J\}$, og derfor $\Sigma\{\|h_j\|^2 \mid j \in J\} = \|h\|^2 - \|g\|^2 \leqq \|h\|^2$.

$I_h = \{i \in I \mid \|h_i\| > 0\}$ er derfor endelig eller nummererbar; hvis den nummererbar, nummererer vi dens elementer $i_1, i_2, \dots$, og finder $\sum_{\nu=1}^{\infty} \|h_{i_\nu}\|^2 \leqq \|h\|^2$ (Bessels ulighed); $h_{i_1}, h_{i_1} + h_{i_2}, \dots$, er da en fundamentalfølge, idet $\|\sum_{\nu=n}^{m} h_{i_\nu}\|^2 = \sum_{\nu=n}^{m} \|h_{i_\nu}\|^2 \to 0$ for $\nu, \mu \to \infty$.

Hvis $h \in F$, vil følgen konvergere mod h; thi til $\varepsilon > 0$ findes en endelig delmængde $J \subsetneqq I$ og $g \in \Sigma\{F_j \mid j \in J\}$, så at $\|h-g\| < \varepsilon$; da $\Sigma\{h_j \mid j \in J\}$ er det element i $\Sigma\{F_j \mid j \in J\}$, der har mindst afstand fra h, er også $\|h - \Sigma\{h_j \mid j \in J\}\| \leqq \varepsilon$; for $n \in \dot{N}$, så at $\{1, \dots, n\} \supsetneqq J \cap I_h$, er $\|h - \sum_{\nu=1}^{n} h_{i_\nu}\|^2 = \|h\|^2 - \sum_{\nu=1}^{n} \|h_{i_\nu}\|^2 \leqq \|h\|^2 - \Sigma\{\|h_j\|^2 \mid j \in J \cap I_h\} = \|h\|^2 - \Sigma\{\|h_j\|^2 \mid j \in J\} \leqq \varepsilon^2$.

Hvis F opfylder betingelserne III, kan $h \in H$ skrives $h = f+g$, $f \in F$, $g \perp F$, da $g \perp F_j$ for alle i, er $h_i = P_{F_i} h = P_{F_i} f$, og det ovenstående viser, at $\sum_{\nu=1}^{n} h_{i_\nu} \to P_F h$.

I begge tilfælde ses, at grænseværdien er uafhængig af den foretagne nummerering af elementerne i I_h. Vi skriver også $h = \Sigma\{h_i \mid i \in I\}$ og $P_F h = \Sigma\{h_i \mid i \in I\}$ og $P_F = \Sigma\{P_{F_i} \mid i \in I\}$.

Sætningen K III, 3, side 3 er hermed også vist for præ Hilbertrum, dersom vi l. 10 ændrer. til: hvis $P_F h$ er defineret, og med summen h, hvis $h \in F$.

§ 2. Underrum og projektioner.

2.1. I K II, 1 er det vist, at et fuldstændigt underrum F i et præ Hilbertrum H giver anledning til en opspaltning af H som direkte sum, nemlig $H = F \oplus F^{\perp}$. Vi opstiller nu følgende

<u>definition.</u> Et underrum F i præ Hilbertrummet H kaldes direkte summand i H, hvis $H = F + F^{\perp}$; specielt er altså alle fuldstændige (og dermed også alle endelig-dimensionale underrum, jfr. I, øv.3) direkte summander.

Er F og G ortogonale underrum, og er $o = f + g$, hvor $f \in F$ og $g \in G$, har vi $0 = \|f+g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2$ og dermed $f = g = o$. Summen af ortogonale underrum er altså altid direkte.

Sætning 1a. <u>Er G et til F ortogonalt underrum i præ Hilbertrummet H, så at $H = F + G$, da er $G = F^{\perp}$ (og F altså direkte summand).</u>

Bevis: Vi har $G \subseteq F^{\perp}$, og for $f' \in F^{\perp}$ har vi opspaltningen $f' = f+g$, hvor $f \in F$ og $g \in G$. Nu er $\|f\|^2 + \|g\|^2 = (f'|f+g) = (f'|g) = (f+g|g) = \|g\|^2$, hvilket viser, at $f = o$, d.v.s. $f' = g \in G$. ∎

Da $F^{\perp\perp} \supseteq F$, er F et til $F^{\perp}$ ortogonalt underrum, og sætning 1a viser, at hvis F er direkte summand, da er også $F^{\perp}$ direkte summand, og $F^{\perp\perp} = F$.

Er F en direkte summand i H, kan hvert $h \in H$ på én måde skrives $h = f+f'$, hvor $f \in F$ og $f' \in F^{\perp}$. Afbildningen af H ind i H defineret ved $h \rightarrow f$ kaldes en ortogonal projektion og betegnes P_F eller blot P, hvis misforståelser er udelukket; det følger let af opspaltningens entydighed, at P er lineær og at $Pf = f$ for $f \in F$, d.v.s. $P^2 = P$. Det ses, at $P_{F^{\perp}} = E - P_F$, hvor E betegner den identiske afbildning af H på H. P_F er kontinuert, thi af $\|h\|^2 = \|P_F h + P_{F^{\perp}} h\|^2 = \|P_F h\|^2 + \|P_{F^{\perp}} h\|^2$ følger $\|P_F h\|^2 \leq \|h\|^2$, hvilket viser, at $\|P_F\| \leq 1$ (Bemærk, at $\|P_F\| = 1$, hvis $F \neq \{o\}$).

Endvidere er P symmetrisk, thi $(P_F h_1 | h_2) = (P_F h_1 | P_F h_2 + P_{F^{\perp}} h_2)$

$= (P_F h_1 | P_F h_2) = (P_F h_1 + P_{F^\perp} h_1 | P_F h_2) = (h_1 | P_F h_2)$. Vi har hermed vist første halvdel af følgende

Sætning 1b. F er direkte summand i H hvis og kun hvis der findes en kontinuert, lineær, symmetrisk og idempotent afbildning $P : H$ ind i H, for hvilken $F = \{f \in H | Pf = f\}$.

Bevis. For $h \in H$ er $Ph \in F$, da $P(Ph) = Ph$, og $h - Ph \in F^\perp$, thi for $f \in F$ er $(h - Ph|f) = (h|f) - (h|Pf) = (h|f) - (h|f) = 0$. $h = Ph + (h - Ph)$ er da den ønskede opspaltning af h. ∎

Vi kan give endnu en karakterisering af direkte summander, idet vi har

Sætning 1c. F er direkte summand i præ Hilbertrummet H, hvis og kun hvis $h - F$ for hvert $h \in H$ indeholder et element af mindst norm.

Beviset for "hvis" er helt analogt til beviset for at et fuldstændigt underrum er direkte summand. (Først vises, at $h - F$ indeholder netop ét element af mindst norm).

Lad omvendt F være direkte summand i H. Da er $\|h - f\|^2 = \|P_{F^\perp}h + P_F h - f\|^2 = \|P_{F^\perp}h\|^2 + \|P_F h - f\|^2 \geq \|P_{F^\perp}h\|^2$ for alle $f \in F$, og dette viser netop, at $P_{F^\perp}h = h - P_F h \in h - F$ er et element af mindst norm i $h - F$. ∎

Summen F af endelig mange, parvis ortogonale fuldstændige underrum F_i, er igen fuldstændig. Det ses nemlig let, at hvis $f = f_1 + \dots + f_m \in F$, hvor $f_i \in F_i$, er $P_{F_i} f = f_i$; er $f^{(n)}$ en fundamentalfølge i F, er $\|P_{F_i} f^{(n)} - P_{F_i} f^{(k)}\| = \|P_{F_i}(f^{(n)} - f^{(k)})\| \leq \|f^{(n)} - f^{(k)}\|$ hvilket viser, at $(P_{F_i} f^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$, er en fundamentalfølge i F_i og derfor konvergent mod et element i F_i. Af additionens kontinuitet følger, at også $f^{(n)} = P_{F_1} f^{(n)} + \dots + P_{F_m}{}^{(n)}$ er konvergent mod et element i $F_1 + \dots + F_m$.

Om direkte summander har vi følgende analoge sætning

Sætning 2. Hvis $F_1, \dots, F_n$ er parvis ortogonale direkte summander i præ Hilbertrummet H, da er også summen $F = F_1 + \dots + F_n$ direkte summand, og $P_F = P_{F_1} + \dots + P_{F_n}$.

Induktionsbevis. Påstanden er klart rigtig for $n = 1$. Antag, at den er bevist for $n-1$, og lad $F = F_1 + \dots + F_n$ være sum af de parvis ortogonale direkte summander $F_1, \dots, F_n$. Ifølge induktionsantagelsen er $G = F_1 + \dots + F_{n-1}$ direkte summand, og da det let følger af forudsætningerne, at $G \subseteq F_n^{\perp}$, er G og F_n ortogonale.

For $h \in H$ har vi opspaltningerne $h = g + g'$, hvor $g \in G \subseteq F_n^{\perp}$ og $g' \in G^{\perp}$, og $g' = f_n + f_n'$, hvor $f_n \in F_n \subseteq G^{\perp}$ og $f_n' \in F_n^{\perp}$. Nu er $h = g + f_n + f_n'$, $g + f_n \in G + F_n$, og da $f_n' = g' - f_n \in G^{\perp}$, er $f_n' \in G^{\perp} \cap F_n^{\perp} \subseteq (G + F_n)^{\perp}$. Følgelig er $H = (G + F_n) + (G + F_n)^{\perp}$, d.v.s. $F = G + F_n$ er direkte summand i H.

Af $h = g + f_n + f_n'$ følger $P_F h = g + f_n$. Her er $g = P_G h$, og da $g + f_n' \in F_n^{\perp}$, er $f_n = P_{F_n} h$. Induktionsantagelsen giver nu, at $P_F h = P_G h + P_{F_n} h = P_{F_1} h + P_{F_2} h + \dots + P_{F_n} h$. $\blacksquare$

Vi beviser nu følgende sætninger om projektioner:

Sætning 3. Lad $\{F_\iota \mid \iota \in J\}$ være en mængde af parvis ortogonale direkte summander i et præ Hilbertrum H og sæt $P_{F_\iota} = P_\iota$. Lad endvidere F være det mindste afsluttede underrum i H, der indeholder alle F_ι, $\iota \in J$. Da gælder:

For hvert $h \in H$ er $P_\iota h \neq o$ for højst numerabelt mange ι, og $\sum_{\iota \in J} \|P_\iota h\|^2 \leqq \|h\|^2$. For $h \in F$ er $\sum_{\iota \in J} P_\iota h$ konvergent med summen h.

Er F direkte summand i H, er $\sum_{\iota \in J} P_\iota h$ konvergent for alle $h \in H$, og $P_F h = \sum_{\iota \in J} P_\iota h$. Vi skriver i så fald $P_F = \sum_{\iota \in J} P_\iota$.

Bevis. Lad $h \in H$ være fast. For hver endelig delmængde $I \subseteq J$ er (ifølge sætning 2) $h = \sum_{\iota \in I} P_\iota h + g$, hvor $g \perp \sum_{\iota \in I} F_\iota$; derfor er

$$(*) \quad \sum_{\iota \in I} \|P_\iota h\|^2 = \Big\|\sum_{\iota \in I} P_\iota h\Big\|^2 = \|h\|^2 - \|g\|^2 \leqq \|h\|^2 .$$

Heraf følger, at for ethvert $n \in \dot{N}$ gælder $\|P_\iota h\| > \frac{1}{n}$ kun for ende lig mange ι, og dermed at $P_\iota h \neq o$ for højst numerabelt mange $\iota \in J$. Er $\iota_1, \iota_2, \dots$ en nummerering af disse elementer fås af (*): $\sum_{\nu=1}^{\infty} \|P_{\iota_\nu} h\|^2 \leqq \|h\|^2$, og den første påstand er bevist.

Lad nu $h \in F$. Til et givet $\varepsilon > 0$ kan vi da finde en endelig mængde $I \subseteqq J$ og et $g \in \sum_{\iota \in I} F_\iota$, så at $\|h - g\| \leqq \varepsilon$. Da $\sum_{\iota \in I} P_\iota h$ er det element i $\sum_{\iota \in I} F_\iota$, der har mindst afstand fra h, er også $\|h - \sum_{\iota \in I} P_\iota h\| \leqq \varepsilon$. Lad N være det største tal ν, for hvilket $\iota_\nu \in I$ (sæt f.eks. N = 1, hvis intet $\iota_\nu \in I$). Da gælder for alle $n \geqq N$, at $\|h - \sum_{\nu=1}^{n} P_{\iota_\nu} h\|^2 = \|h\|^2 - \|\sum_{\nu=1}^{n} P_{\iota_\nu} h\|^2 = \|h\|^2 - \sum_{\nu=1}^{n} \|P_{\iota_\nu} h\|^2 \leqq \|h\|^2 - \sum_{\iota \in I} \|P_\iota h\|^2 = \|h - \sum_{\iota \in I} P_\iota h\|^2 \leqq \varepsilon^2$.
Heraf følger, at $\sum_{\nu=1}^{\infty} P_{\iota_\nu} h$ er konvergent med summen h, og da grænseværdien ikke afhænger af summationsrækkefølgen, skrives $h = \sum_{\nu=1}^{\infty} P_{\iota_\nu} h = \sum_{\iota \in J} P_\iota h$.
Er F direkte summand i H, og er $h \in H$, er $h = P_F h + P_{F^\perp} h$. Da $P_{F^\perp} h \perp F$, og dermed $P_{F^\perp} h \perp F_\iota$ for alle $\iota \in J$, er $P_\iota h = P_\iota(P_F h) + P_\iota(P_{F^\perp} h) = P_\iota P_F h$; den foregående overvejelse viser nu, at $\sum_{\iota \in J} P_\iota h = \sum_{\iota \in J} P_\iota P_F h$ er konvergent med summen $P_F h$. ∎

Af særlig interesse har tilfældet, hvor F_ι er et 1-dimmensionalt underrum. Er $F_\iota = \{\lambda f_\iota \mid \lambda \in K\}$, og er $\|f_\iota\| = 1$, da er $P_{F_\iota} h = P_\iota h = (h|f_\iota)$, thi $(h - (h|f_\iota)f_\iota \,|\, f_\iota) = (h|f_\iota) - (h|f_\iota)\|f_\iota\| = 0$ viser, at $h - (h|f_\iota)f_\iota \perp F_\iota$. Vi får her følgende korollar:

Sætning 4. *Lad $\{f_\iota \mid \iota \in J\}$ være et ortonormalsystem i et præ Hilbertrum H, og lad F være det mindste afsluttede underrum, der indeholder alle f_ι, $\iota \in J$. Da gælder:*

For hvert $h \in H$ er $(h|f_\iota) \neq 0$ for højst numerabelt mange $\iota \in J$, og $\sum_{\iota \in J} |(h|f_\iota)|^2 \leqq \|h\|^2$ (Bessels ulighed). For hvert $h \in F$, er $\sum_{\iota \in J} (h|f_\iota) f_\iota$ konvergent med summen h.

Er F direkte summand i H, er $\sum_{\iota \in J} (h|f_\iota) f_\iota$ konvergent for alle $h \in H$, og $P_F h = \sum_{\iota \in J} (h|f_\iota) f_\iota$.

Følgende betingelser er ensbetydende:

1) $F = H$ (d.v.s. ortonormalsystemet er en tilnærmelsesbasis).

2) $h = \sum_{\iota\in J}(h|f_\iota)f_\iota$ for alle $h\in H$.

3) $(h|g) = \sum_{\iota\in J}(h|f_\iota)(f_\iota|g)$ for alle $g,h\in H$.

4) $\|h\|^2 = \sum_{\iota\in J}|(h|f_\iota)|^2$ for alle $h\in H$ (Parsevals relation).

Bevis. Vi mangler blot beviset for ækvivalensen af de fire udsagn. 1) $\Rightarrow$ 2) er bevist. 2) $\Rightarrow$ 3) følger af det indre produkts kontinuitet. 3) $\Rightarrow$ 4), thi 4) er et specialtilfælde af 3). 4) $\Rightarrow$ 2) thi er $h\in H$, og er $\iota_1,\iota_2,\dots$ en nummerering af de $\iota\in J$, for hvilke $(h|f_\iota)\neq 0$, har vi $\|h - \sum_{\nu=1}^{n}(h|f_{\iota_\nu})f_{\iota_\nu}\|^2 = \|h\|^2 - \|\sum_{\nu=1}^{n}(h|f_{\iota_\nu})f_{\iota_\nu}\|^2 = \|h\|^2 - \sum_{\nu=1}^{n}|(h|f_{\iota_\nu})|^2 \to 0$ for $n\to\infty$. 2) $\Rightarrow$ 1) følger straks af definitionen på F. ∎

2.2. Hvis præ Hilbertrummet H er fuldstændigt, altså et Hilbert rum, er et underrum F i H direkte summand i H, hvis og kun hvis F er afsluttet, thi et afsluttet underrum F er fuldstændigt og dermed direkte summand, og er F direkte summand, er $F = F^{\perp\perp}$ og dermed afsluttet.

Er B en vilkårlig mængde i H, og er F det mindste afsluttede underrum, der indeholder B, da er $B \subseteq F \subseteq B^{\perp\perp}$, thi $B^{\perp\perp}$ er et afsluttet underrum, der indeholder B. Heraf følger $B^{\perp\perp\perp} \subseteq F^{\perp} \subseteq B^{\perp} \subseteq B^{\perp\perp\perp}$, d.v.s. $B^{\perp} = F^{\perp}$ og dermed $B^{\perp\perp} = F^{\perp\perp} = F$.

<u>De i det foregående afsnit beviste sætninger gælder altså, hvis man erstatter "præ Hilbertrum" med "Hilbertrum" og "direkte summand" med "afsluttet underrum."</u>

Da sætning 4 har så stor betydning, vil vi dog endnu engang formulere den (med en lille tilføjelse):

Sætning 5. <u>Lad $\{f_\iota \mid \iota\in J\}$ være et ortonormalsystem i et Hilbertrum H, og lad F være det mindste afsluttede underrum, der indeholder alle f_ι, $\iota\in J$. Da gælder:</u> (med $B = \{f_\iota \mid \iota\in J\}$)

<u>For hvert $h\in H$ er $(h|f_\iota)\neq 0$ for højst numerabelt mange $\iota\in J$, $\sum_{\iota\in J}|(h|f_\iota)|^2 \leq \|h\|^2$ og $\sum_{\iota\in J}(h|f_\iota)f_\iota$ er konvergent med sum-</u>

men $P_F h$ for alle $h \in H$.

Følgende betingelser er ensbetydende.

1) $F = H$ (B er en tilnærmelsesbasis)

2) $h = \sum_{\iota \in J} (h|f_\iota) f_\iota$ for alle $h \in H$

3) $(h|g) = \sum_{\iota \in J} (h|f_\iota)(f_\iota|g)$ for alle $g,h \in H$.

4) $\|h\|^2 = \sum_{\iota \in J} |(h|f_\iota)|^2$ for alle $h \in H$. (Parsevals relation.

5) Hvis det for $g,h \in H$ gælder, at $(h|f_\iota) = (g|f_\iota)$ for alle $\iota \in J$, da er $g = h$. (Entydighedssætningen)

6) Det eneste element i H, der er ortogonal på alle f_ι, $\iota \in J$ er 0-elementet. (B er et maximalt ortonormalsystem)

Beviset er fuldført, hvis vi f.x. viser, at 4) $\Rightarrow$ 5) $\Rightarrow$ 6) $\Rightarrow$ 1). 4) $\Rightarrow$ 5), thi er $(h|f_\iota) = (g|f_\iota)$ for alle $\iota \in J$, da er $\|g - h\|^2 = \sum_{\iota \in J} |(g-h|f_\iota)|^2 = 0$. 5) $\Rightarrow$ 6), thi er $f \perp f_\iota$ for alle ι, da er $(f|f_\iota) = 0 = (0|f_\iota)$ for alle $\iota \in J$, og dermed $f = 0$. 6) $\Rightarrow$ 1), thi er B maximalt, er $B^\perp = \{o\}$ og dermed $H = B^{\perp\perp} = F^{\perp\perp} = F$. ∎

§ 3. Dimension.

Fra H. Tornehaves og H. Rischels forelæsninger kendes begrebet kardinaltal for en mængde. For en endelig mængde N er card(N) = antallet af elementer i N. card($\dot{N}$) betegnes, efter Cantor, $\aleph_0$. For vilkårlige mængder A og B siger man, at card(A) $\leqq$ card(B), hvis og kun hvis der findes en injektiv afbildning $A \to B$, og at card(A) = card(B), hvis og kun hvis der findes en bijektiv afbildning $A \to B$.

Det følger straks, at card(A) $\leqq$ card(B) $\wedge$ card(B) $\leqq$ card(C) $\Rightarrow$ card(A) $\leqq$ card(C), og card(A) $\leqq$ card(A), og en sætning af Bernstein udsiger, at card(A) $\leqq$ card(B) $\wedge$ card(B) $\leqq$ card(A) $\Rightarrow$ card(A) = card(B), således at $\leqq$ er en partiel ordning.

Ved hjælp af velordningsaksiomet viser man, at to vilkårlige mængder er sammenlignelige, d.v.s. at $\leqq$ definerer en fuldstændig ordning.

Af udvalgsaksiomet følger, at hvis der eksisterer en surjektiv afbildning $A \to B$, er card(B) $\leqq$ card(A); thi for ethvert $b \in B$ er $\varphi^{0-1}(b) \neq \emptyset$, og et valg af et element $\psi(b) \in \varphi^{0-1}(b)$ for ethvert b definerer en injektiv afbildning $\psi: B \to A$.

Vi definerer en multiplikation af kardinaltal, idet vi sætter card(A)$\cdot$card(B) = card($A \times B$); definitionen er lovlig, thi hvis card(A) = card(C) og card(B) = card(D), findes der bijektive afbildninger $\varphi: A \to C$ og $\psi: B \to D$, og man viser let, at afbildningen $\varphi \times \psi : A \times B \to C \times D$, defineret ved $\varphi \times \psi.((a,b)) = (\varphi(a), \psi(b))$, er bijektiv, så at card($A \times B$) = card($C \times D$).

For endelige mængder stemmer multiplikationen overens med den sædvanlige multiplikation af hele tal. Det er også velkendt, at card($\dot{N}$)$\cdot$card($\dot{N}$) = card($\dot{N} \times \dot{N}$) = card($\dot{N}$) (man nummererer elementerne i $\dot{N} \times \dot{N}$ i rækkefølgen (1,1),(1,2),(2,1),(3,1),(2,2),...).

For enhver uendelig mængde A er card($\dot{N}$) $\leq$ card(A), idet A har en nummererbar delmængde.

Lemma: Enhver uendelig mængde A er foreningsmængde af disjunkte, nummererbare delmængder.

Bevis: Mængden B af mængder af parvis disjunkte nummererbare delmængder af A er induktivt ordnet (med hensyn til sædvanlig inclusion); thi hvis $\{B_i \mid i \in I\}$ er en fuldstændigt ordnet delmængde af B, vil $\bigcup\{B_i \mid i \in I\} \in B$, idet $S,T \in \bigcup\{B_i \mid i \in I\} \Rightarrow \exists\, i \in I (S,T \in B_i) \Rightarrow S \cap T = \emptyset$, og dermed være en øvre grænse i B for $\{B_i \mid i \in I\}$.

Ifølge Zorns lemma findes der et maksimalt element $M \in B$; vi sætter $N = \bigcup\{S \mid S \in M\}$; $A \setminus N$ er da tom eller endelig, thi hvis $A \setminus N$ var uendelig, ville $A \setminus N$ indeholde en nummererbar delmængde T, der ville være disjunkt med ethvert element i M, så at $M \cup \{T\}$ ville tilhøre B, i strid med maksimaliteten af M.

Da A er uendelig, er M ikke tom; vi vælger $T \in M$; A er da foreningsmængde af mængden $\{T \cup (A \setminus N)\} \cup (M \setminus \{T\})$ af parvis disjunkte nummererbare delmængder af A.

(Lemmaet kan også vises ved hjælp af velordningsaksiomet; se øv.)

<u>For enhver uendelig mængde A er card($\dot{N} \times A$) = card(A).</u>

Bevis: $A = \bigcup\{S_i \mid i \in I\}$, hvor I er en indeksmængde, og mængderne S_i er nummererbare og parvis disjunkte; vi kan umiddelbart identificere $\dot{N} \times A$ med $\bigcup\{\dot{N} \times S_i \mid i \in I\}$. Da card($S_i$) = card($\dot{N} \times S_i$) for ethvert $i \in I$, kan vi, ifølge udvalgsaksiomet, for hvert $i \in I$ vælge en bijektiv afbildning $\varphi_i : \dot{N} \times S_i \to S_i$. Afbildningen $\varphi : \dot{N} \times A \to A$, defineret ved, at $\varphi((n,a)) = \varphi_i((n,a))$ for $n \in \dot{N}$ og $a \in S_i$, er da en veldefineret, injektiv afbildning af $\dot{N} \times A$ på A.

3.2. En mængde $\{f_i \mid i \in I\}$ af vektorer i et vektorrum E over et legeme K kaldes lineært uafhængig, hvis det for enhver endelig mængde $J \subseteq I$ og enhver mængde $\{\lambda_j \mid j \in J\}$ af elementer i K gælder: $\Sigma\{\lambda_j f_j \mid j \in J\} = o \Rightarrow \forall j \in J(\lambda_j = o)$. Af en vilkårlig mængde $\{f_i \mid i \in I\} \subseteq \dot{E}$ kan man efter Zorns lemma udtage en maksimal, lineært uafhængig delmængde $\{f_j \mid j \in J\}$, $J \subseteq I$, der på grund af maksimaliteten udspænder det samme underrum af E som hele mængden; hvis I er en af mængderne $\dot{N}$ eller $\{1,\ldots,N\}$, $N \in \dot{N}$, kan vi som J bruge $\{n \in I \mid f_n$ er lineært uafhængig af $f_1,\ldots,f_{n-1}\}$.

Et ortonormalsystem $\{f_i \mid i \in I\}$ i et præ Hilbertrum H er lineært uafhængigt; thi hvis J er en endelig delmængde af I og $\{\lambda_j \mid j \in J\}$ en mængde af elementer fra K, så at $\Sigma\{\lambda_j f_j \mid j \in J\} = o$, finder vi for ethvert $k \in J$ $0 = (O \mid f_k) = \Sigma\{\lambda_j (f_j \mid f_k) \mid j \in J\} = \Sigma\{\lambda_j \delta_{jk} \mid j \in J\} = \lambda_k$.

<u>Sætning</u> (Gram-Schmidts ortonormaliseringsmetode): Lad I betegne $\dot{N}$ eller en af mængderne $\{1,\ldots,N\}$, $N \in \dot{N}$, og lad $\{f_i \mid i \in I\}$ være en lineært uafhængig mængde af vektorer i et præ Hilbertrum H. Der findes et ortonormalsystem $\{g_i \mid i \in I\}$, så at for ethvert $n \in I$ $\{f_1,\ldots,f_n\}$ og $\{g_1,\ldots,g_n\}$ udspænder samme underrum.

Beviset føres ved induktion. Da $\{f_1\}$ er lineært uafhængig, er $f_1 \neq o$; vi sætter $g_1 = \|f_1\|^{-1} f_1$. Antag nu, at $n \in I$ og at vi har fundet et ortonormalsystem $\{g_\nu \mid \nu = 1,\ldots,n-1\}$, så at $\{g_1,\ldots,g_\nu\}$ og $\{f_1,\ldots,f_\nu\}$ udspænder samme underrum af H for $\nu = 1,\ldots,n-1$. Projektionen af f_n på underrummet udspændt af $\{g_1,\ldots,g_{n-1}\}$ er $(f_n \mid g_1)g_1 + \ldots + (f_n \mid g_{n-1})g_{n-1}$; $h_n = f_n -$

$(f_n|g_1)g_1 - \dots - (f_n|g_{n-1})g_{n-1}$ er ulig o, da $\{f_1,\dots,f_n\}$ og derfor også $\{g_1,\dots,g_{n-1},f_n\}$ er lineært uafhængig, og vinkelret på $g_1,\dots,g_{n-1}$; vi sætter $g_n = \|h_n\|^{-1}h_n$; herved bliver $\{g_1,\dots,g_n\}$ et ortonormalsystem; da g_n tilhører underrummet udspændt af $\{f_1,\dots,f_n\}$, og $f_n = \|h_n\|g_n + (f_n|g_1)g_1 + \dots + (f_n|g_{n-1})g_{n-1}$ tilhører underrummet udspændt af $\{g_1,\dots,g_n\}$, udspænder også $\{f_1,\dots,f_n\}$ og $\{g_1,\dots,g_n\}$ samme underrum.

3.3. Lemma: Lad H være et præ Hilbertrum, $\{f_i \mid i \in I\}$ et ortonormalsystem i H, og $\{g_j \mid j \in J\}$ en sådan delmængde af H, at den eneste vektor i H, der er vinkelret på g_j for alle $j \in J$, er o. $\operatorname{card}(I) \leqq \operatorname{card}(J)$.

Bevis: Antag først, at J er endelig; der findes da et $n \in \dot{N}$ og et ortonormalsystem $\{h_1,\dots,h_n\} \subseteq H$, så at $n \leqq \operatorname{card}(J)$ og $\{h_1,\dots,h_n\}$ udspænder samme underrum af H som $\{g_j \mid j \in J\}$; for vilkårligt $h \in H$ er $h - (h|h_1)h_1 - \dots - (h|h_n)h_n$ vinkelret på $h_\nu, \nu = 1,\dots,n$, og altså o; H er således et n-dimensionalt rum, og enhver lineært uafhængig mængde, og specielt ethvert ortonormalsystem, indeholder højst n elementer.

Antag nu, at J er uendelig; for $j \in J$ sætter vi $I_j = \{i \in I \mid (f_i \mid g_j) \neq 0\}$, og vi sætter $J_o = \{j \in J \mid I_j \neq \emptyset\}$; hver af mængderne I_j, $j \in J_o$, er endelig eller nummererbar, og $I = \bigcup\{I_j \mid j \in J_o\}$, idet ingen af enhedsvektorerne f_i, $i \in I$, kan være vinkelret på alle g_j, $j \in J$. Sæt $L = \{(i,j) \in I \times J_o \mid i \in I_j\}$ afbildningen $\Psi: L \to I$, defineret ved $\Psi((i,j)) = i$, er surjektiv. For hvert $j \in J_o$ vælger vi en injektiv afbildning $\varphi_j : I_j \to \dot{N}$; afbildningen $\varphi: L \to \dot{N} \times J$, defineret ved $\varphi((i,j)) = (\varphi_j(i),j)$, er da injektiv; derfor er $\operatorname{card}(I) \leqq \operatorname{card}(L) \leqq \operatorname{card}(\dot{N} \times J) = \operatorname{card}(J)$.

En tilnærmelsesbasis for et topologisk vektorrum H er en delmængde B, for hvilken det mindste afsluttede underrum af H, der indeholder B, er H. For en tilnærmelsesbasis B i et præ Hilbertrum H er $B^{\perp} = \bar{B}^{\perp} = H^{\perp} = \{0\}$, men denne betingelse er ikke tilstrækkelig.

I et Hilbertrum H er en delmængde B en tilnærmelsesbasis, hvis og kun hvis $B^{\perp} = \{0\}$; thi $B^{\perp} = \{0\}$ medfører $\bar{B} = B^{\perp\perp} = \{0\}^{\perp} = H$.

Mængden af ortonormalsystemer i et præ Hilbertrum er åbenbart induktivt ordnet; ethvert ortonormalsystem kan udvides til et maksimalt ortonormalsystem. Et ortonormalsystem B er maksimalt, hvis og kun hvis $B^{\perp} = \{0\}$; thi hvis $B^{\perp} \neq \{0\}$, indeholder $B^{\perp}$ en enhedsvektor f, og $B \cup \{f\}$ er da et ortonormalsystem. I et Hilbertrum, men ikke i et præ Hilbertrum, er et ortonormalsystem maksimalt, hvis og kun hvis det er en tilnærmelsesbasis.

I et præ Hilbertrum har to vilkårlige maksimale ortonormalsystemer samme kardinaltal; thi ovenstående lemma viser, at hvert af dem har mindre kardinaltal end det andet.

Vi definerer nu: et præ Hilbertrum H har dimensionen α, hvis H har en ortonormal tilnærmelsesbasis med kardinaltal α. Ethvert Hilbertrum og nogle præ Hilbertrum tilskrives herved en dimension.

Hvis et præ Hilbertrum H har et tæt underrum H_o med dimensionen α, har også H dimensionen α; thi en ortonormal tilnærmelsesbasis for H_o er samtidig en ortonormal tilnærmelsesbasis for H.

Sætning: Et præ Hilbertrum H har en dimension $\leq \text{card}(\mathbb{N})$, hvis og kun hvis H indeholder en nummererbar, tæt delmængde.

Bevis: En tæt mængde er specielt en tilnærmelsesbasis.

En nummererbar tæt mængde i H kan erstattes med en endelig eller nummererbar lineært uafhængig mængde, og denne igen, ved Gram-Schmidts metode, med et endeligt eller nummererbart ortonormalsystem, der udspænder det samme underrum af H som den oprindelige mængde, og derfor er en tilnærmelsesbasis. Et præ Hilbertrum med en nummererbar tæt mængde har derfor en dimension $\leqq \operatorname{card}(\dot{N})$.

Hvis omvendt H har en dimension $\leqq \operatorname{card}(\dot{N})$, kan vi finde et endeligt eller nummererbart ortonormalsystem $\{f_i \mid i \in I\} \subseteq H$. For enhver endelig mængde $J \subseteq I$ er mængden af linearkombinationer af vektorerne $\{f_i \mid i \in J\}$ med koefficienter med rational realdel og imaginærdel nummererbar; da også mængden af endelige delmængder af en endelig eller nummererbar mængde er endelig eller nummererbar, er mængden H_r af alle sådanne linearkombinationer nummererbar, og desuden tæt; thi da $\{f_i \mid i \in I\}$ er en tilnærmelsesbasis, er mængden af alle endelige linearkombinationer af vektorerne $\{f_i \mid i \in I\}$ tæt i H, og en sådan linearkombination $\Sigma\{\lambda_j f_j \mid j \in J\}$, hvor J er en endelig mængde $\subseteq I$, kan approximeres vilkårligt godt med et element i H_r, idet vi blot behøver at approximere hvert af tallene $\operatorname{Re}(\lambda_j)$, $I_m(\lambda_j)$, $j \in J$, tilstrækkeligt godt med et rationalt tal.

3.4. Vi vil kalde en afbildning U af et Hilbertrum H_1 ind i et Hilbertrum H_2 en isomorfi, hvis U er bijektiv og lineær, og:

$\forall f,g \in H_1[(Uf|Ug) = (f|g)]$.

En bijektiv lineær afbildning er en isomorfi, hvis og kun hvis den er en isometri, idet $\|f\|^2 = (f|f)$ og $4(f|g) = \sum_{\nu=0}^{3} i^{\nu}\|f+i^{\nu}g\|^2$.

<u>Sætning</u>: <u>To Hilbertrum H_1 og H_2 er isomorfe, hvis og kun hvis de har samme dimension.</u>

Bevis: Da en isomorfi af H_1 på H_2 fører maksimalt ortonormalsystem i maksimalt ortonormalsystem, har isomorfe rum samme dimension.

Antag nu, at H_1 og H_2 har samme dimension α, og lad I være en mængde med kardinaltal α; vi kan finde ortonormale tilnærmelsesbaser $\{f_{1i}|i \in I\} \subsetneq H_1$ og $\{f_{2i}|i \in I\} \subsetneq H_2$. Da enhver vektor h i det mindste underrum H_{1o} af H_1, der indeholder $\{f_{1i}|i \in I\}$, på én måde kan skrives $h = \Sigma\{\lambda_j f_j | j \in J\}$, hvor J er en endelig delmængde af I, kan vi definere en afbildning U, der ses at blive lineær, af H_{1o} på det mindste underrum H_{2o} af H_2, der indeholder $\{f_{2i}|i \in I\}$, ved $U(\Sigma\{\lambda_j f_j | j \in J\}) = \Sigma\{\lambda_j f_{2j} | j \in J\}$. U er en isometri, da

$$\|\Sigma\{\lambda_j f_{2j} | j \in J\}\|^2 = \Sigma\{|\lambda_j|^2 \mid j \in J\} = \|\Sigma\{\lambda_j f_{1j} \mid j \in J\}\|^2.$$

Ifølge en sætning side I,2,15 kan U på én måde udvides til en lineær isometri af H_1 på H_2.

3.5. Lad $\{H_i|i \in I\}$ være en mængde af Hilbertrum over samme legeme K, og lad F være produktrummet $\Pi\{H_i|i \in I\}$.

For $f = (f_i)_{i \in I} \in F$ sætter vi $I_f = \{i \in I \mid f_i \neq 0\}$; hvis I_f er endelig eller nummererbar, sætter vi, for en vilkårlig nummering $i_1, i_2, \ldots$ af elementerne i I_f, $\|f\|^2 = \sum_{\nu=1}^{\mathrm{card}(I_f)} \|f_{i_\nu}\|^2 =$

$\Sigma\{\|f_i\|^2 | i \in I\} \in [0,\infty]$; $\|f\|$ afhænger ikke af nummereringen. Desuden sætter vi $H_o = \{f \in F \mid I_f \text{ er endelig}\}$ og $H = \oplus\{H_i \mid i \in I\}$ $= \{f \in F \mid I_f \text{ er endelig eller nummererbar}, \|f\| < \infty\}$. H_o er et vektorrum over K.

For f og $g \in H_o$ er $\Sigma\{(f_i|g_i) \mid i \in I_f \cup I_g\}$ en endelig sum, som vi sætter $= (f|g)$; herved defineres et indre produkt på H_o, idet man let viser, at $(f_1+\lambda f_2|g) = (f_1|g)+\bar{\lambda}(f_2|g)$ og $(g|f) = \overline{(f|g)}$, og $(f|f) = \Sigma\|f_i\|^2 \geqq 0$, og $(f|f) = 0 \Rightarrow f_i = 0$ for alle $i \in I$. H_o er således et præ Hilbertrum.

Hvis I er endelig, er $H_o = H = F$, H er fuldstændigt (jfr. kommentarer til K III,3,1962-63, side 2), altså et Hilbertrum, og normtopologien falder sammen med produkt rumstopologien, idet produkttopologien svarer til normen: $f \to \|f\|_\infty = \max\{\|f_i\| \mid i \in I\}$, og $\{f \in H \mid \|f\|_\infty \leqq \varepsilon\,(\mathrm{card}(I))^{-\frac{1}{2}}\} \subseteqq \{f \in H \mid \|f\| \leqq \varepsilon\} \subseteqq \{f \in H \mid \|f\|_\infty \leqq \varepsilon\}$ for ethvert $\varepsilon > 0$.

For f og $g \in H$ er I_{f+g} endelig eller nummererbar, da $I_{f+g} \subseteqq I_f \cup I_g$, og $\|\lambda f\| = |\lambda|\|f\|$ for $\lambda \in K$; og da $\|f_i+g_i\|^2 \leqq \|f_i\|^2+\|g_i\|^2+2\|f_i\|\cdot\|g_i\| \leqq 2\|f_i\|^2+2\|g_i\|^2$ for ethvert $i \in I$, er $\|f+g\|^2 \leqq 2\|f\|^2+2\|g\|^2 < \infty$; H er altså et vektorrum. Da $|(f_i|g_i)| \leqq \|f_i\|\cdot\|g_i\| \leqq \frac{1}{2}\|f_i\|^2+\frac{1}{2}\|g_i\|^2$, er $\Sigma(f_i|g_i)$ ubetinget konvergent; vi sætter summen $\Sigma\{(f_i|g_i) \mid i \in I_f \cup I_g\} = \Sigma\{(f_i|g_i) \mid i \in I\} = (f|g)$; ved grænseovergang findes, at $(\lambda f_1+f_2 \mid g) = \lambda(f_1|g) + (f_2|g)$ og $(g|f) = \overline{(f|g)}$; desuden er $(f|f) = \Sigma\{\|f_i\|^2 \mid i \in I_j\} = \|f\|^2 \geqq 0$, og hvis $\|f\| = 0$, er $f_i = 0$ for alle i, så at $f = 0$. $(f,g) \to (f|g)$ er således et indre produkt på H, der for vektorer i H_o falder sammen med det på H_o indførte indre produkt.

H_o er et tæt underrum i præ Hilbertrummet H; thi lad $i_1, i_2, \ldots$ være en nummerering af elementerne i I_f, og lad g_n

være elementet i H_o bestemt ved: $I_{g_n} = \{i_1,\dots,i_n\}$, $g_{n,i} = f_i$ for $i \in I_{g_n}$; $\|f-g_n\|^2 = \Sigma\{\|f_{i_\nu}\|^2 \mid n+1 \leqq \nu \wedge i_\nu \in I_f\} \to 0$ for $n \to \infty$.

H er fuldstændigt (jfr. fuldstændigheden af l^2): lad (f_n) være en fundamentalfølge i H, $f_n = (f_{n,i})$; for ethvert $i \in I$ er $(f_{n,i})$ en fundamentalfølge i H_i og har derfor en grænseværdi $g_i \in H_i$. Til $\varepsilon > 0$ findes der jo $N \in \mathbb{N}$, så at $\|f_m-f_n\| \leqq \varepsilon$ for $m,n \in N$, altså $\Sigma\{\|f_{m,i}-f_{n,i}\|^2 \mid i \in I\} \leqq \varepsilon^2$; for enhver endelig delmængde $J \subseteqq I$ finder vi ved grænseovergang, $n \to \infty$, $\Sigma\{\|f_{m,i}-g_i\|^2 \mid i \in J\} \leqq \varepsilon^2$ for $m \geqq N$; derfor er også $\Sigma\{\|f_{m,i}-g_i\|^2 \mid i \in I\} \leqq \varepsilon^2$ for $m \geqq N$. Lad g være elementet i F med koordinaterne g_i, $g = (g_i)$; I_g er endelig eller nummererbar, da $I_g \subseteqq \cup\{I_{f_n} \mid n \in \mathbb{N}\}$; da $\|f_m-g\| < \infty$, er $f_m-g \in H$ og $g \in H$; desuden ses, at f_n konvergerer mod g.

Vi har nu vist, at H er et Hilbertrum, isomorft med $\hat{H}_o$, da H_o er et tæt underrum. H kaldes Hilbertsummen af rummene $\{H_i \mid i \in I\}$.

<u>Sætning: Lad $\{H_i \mid i \in I\}$ være en vilkårlig mængde af Hilbertrum. Der findes et og, på nær isomorfi, kun ét par $(H,\{\varphi_i \mid i \in I\})$, hvor H er et Hilbertrum, φ_i er en isomorfi af H_i på et underrum $\varphi_i(H_i) \subseteqq H$, rummene $\{\varphi_i(H_i) \mid i \in I\}$ er afsluttede og parvis ortogonale, og H er det mindste afsluttede underrum af H, der indeholder alle $\varphi_i(H_i)$, $i \in I$.</u>

Bevis: Eksistensen er lige vist; vi kan lade H være $\oplus\{H_i \mid i \in I\}$ og φ_i den naturlige indlejring: $\varphi_i(f)$ er elementet i H bestemt ved: $I_{\varphi_i(f)} \subseteqq \{i\}$, $\varphi_i(f)_i = f$.

Lad nu også $(G,\{\Psi_i \mid i \in I\})$ opfylde de stillede betingelser; der findes én lineær afbildning U af H_o på det mindste underrum $G_o \subseteqq G$, der indeholder alle $\Psi_i(H_i)$, $i \in I$, så at

$U \circ \varphi_i(f) = \Psi_i(f)$ for $f \in H_i$. U er en isometri og kan derfor udvides til en isomorfi af H på G (jfr. beviset side 7).

Vi ser nu på det specielle tilfælde, at $H_i = K$ for alle $i \in I$; H, som vi i dette tilfælde vil betegne $l^2(I,K)$, er da et underrum af rummet F af alle afbildninger af I ind i K; idet vi lader e_i betegne den karakteristiske funktion for $\{i\}$, er $\{e_i \mid i \in I\}$ en ortonormal tilnærmelsesbasis for H. Vi har nu vist, at der for ethvert kardinaltal α findes et og, på nær isomorfi, kun ét Hilbertrum med dimension α.

<u>Kommentarer og rettelser til K III, 1(1962-63).</u>

Sætningen side 1 er bevist i I, § 3.

<u>Lemma</u>: For en normal operator $A \in L(H,H)$ er $\|A^2\| = \|A\|^2$.

Bevis: Da $\|Au\|^2 = (Au|Au) = (A^* Au|u) = (AA^*u|u) = (A^*u|A^*u) = \|A^*u\|^2$ for alle $u \in H$, er $\|A^2\| = \sup\{\|A\cdot Av\| \mid v \in H \wedge \|v\| = 1\} = \sup\{\|A^*Av\| \mid v \in H \wedge \|v\| = 1\} = \|A^*A\| = \|A\|^2$.

En operator $A \in L(H,H)$ kaldes nilpotent af grad n, $n \in \dot{N}$, hvis $A^n = 0$ og $A^{n-1} \neq 0$.

Lemma: <u>O er den eneste nilpotente **normale** operator.</u>

Bevis: Hvis A er normal, er også A^ν normal for ethvert $\nu \in \dot{N}$. Hvis $A^n = 0$ og $2\nu \geq \cancel{2}n$, er $0 = \|A^{2\nu}\| = \|A^\nu\|^2$ så at $A^\nu = 0$; da $[\frac{1}{2}(n+1)] < n$ for $n > 1$, kan vi i løbet af endeligt mange skridt slutte, at $A^1 = 0$.

Lad E_1 og E_2 være topologiske vektorrum med de duale rum E_1' og E_2'; vi betragter en lineær afbildning T af et tæt underrum $D(T) \subsetneq E_1$ ind i E_2; for $\alpha \in E_2'$ er $f \to \alpha Tf$ en lineær afbildning af D(T) ind i K; denne afbildning er kontinuert, hvis og kun hvis den kan udvides til en kontinuert, lineær afbildning af E_1 ind i K, d.v.s. hvis og kun hvis der findes $\alpha' \in E_1'$, så $\alpha Tf = \alpha' f$ for $f \in D(T)$. Da D(T) er tæt i E_1, kan der højst eksistere ét sådant α'. Vi definerer en afbildning T' (den adjungerede afbildning, også hyppigt betegnet T^*) af et underrum $D(T') \subsetneq E_2'$ ind i E_1' ved: $D(T') = \{\alpha \in E_2' \mid \exists\, \alpha' \in E_1'\ \forall f \in D(T)[\alpha Tf = \alpha' f]\}$, $T'\alpha = \alpha'$ for $\alpha \in D(T')$. Man viser let, at D(T') er et underrum, og at T' er en lineær afbildning. Hvis T er kontinuert, er $D(T') = E_2'$; i dette tilfælde ser man let, at $(\lambda T_1 + T_2)' = \lambda T_1' + T_2'$.

Hvis E_1 og E_2 er normerede vektorrum, forsyner vi også E_1' og E_2' med normer. I dette tilfælde er $D(T') = \{\alpha \in E_2' \mid \exists k \in \dot{R}\ \forall f \in$

$D(T)[\|\alpha Tf\| \leqq k\|f\|]\}$. Hvis T er kontinuert, er $\|T'\alpha f\| = \|\alpha Tf\| \leqq \|\alpha\|\cdot\|T\|\cdot\|f\|$ for alle $f \in D(T)$ og $\alpha \in E_2'$, så at $\|T'\alpha\| \leqq \|\alpha\|\cdot\|T\|$; T' er altså kontinuert, med $\|T'\| \leqq \|T\|$; man kan vise, ved hjælp af Hahn-Banachs sætning (jfr. øv. 27), at $\|T'\| = \|T\|$.

Hvis E_1 og E_2 er præ Hilbertrum, findes der bijektive, konjugeret lineære isometrier J_i af E_i' på $\hat{E}_i$, $i = 1,2$. I dette tilfælde definerer vi en afbildning T^* ved: $D(T^*) = J_2 D(T')$, $T^* = J_1 T' J_2^{-1}$; T^* er en lineær afbildning af et underrum af $\hat{E}_2$ ind i $\hat{E}_1$. Hvis T er kontinuert, er $D(T^*) = \hat{E}_2$, og $\|T^*\| = \|T\|$; endvidere er $(\lambda T_1 + T_2)^* = J_1(\lambda T_1 + T_2)' J_2^{-1} = J_1 \lambda T_1' J_2^{-1} + J_1 T_2' J_2^{-1} = \bar{\lambda} T_1^* + T_2^*$. Man vil hyppigt kun se på $T^* | D(T^*) \cap E_2$, og kun sige, at T har en adjungeret, hvis $T^*(D(T^*) \cap E_2) \subseteq E_1$. I denne sprogbrug har således f.eks. afbildningen $T_1 : C([-1,1],\mathbb{C}) \to C([-1,1],\mathbb{C})$, givet ved $Tf = \int_0^1 f(x)dx \cdot 1_{[-1,1]}$, ingen adjungeret.

Hvis E_1 er et Hilbertrum og $E_2 = E_1$, fås det i K III, 1 og K IV, 1 (1962-63) betragtede begreb.

III. ~~Begrænsede~~ operatorer på et Hilbertrum.

1. Adjungerede operatorer.

Vi skal i denne § indlede en undersøgelse af strukturen af mængden $\mathcal{L} = \mathcal{L}(H,H)$ af kontinuerte, lineære afbildninger af et givet (komplekst) Hilbertrum H ind i H.

Sætning: $\mathcal{L}$ er en Banach algebra over $\check{C}$. (jfr. II,3,1).

Bevis: For S og $T \in \mathcal{L}$ og $\lambda \in \check{C}$ definerer vi S+T som afbildningen: $f \to S(f)+T(f)$, λS som: $f \to \lambda \cdot S(f)$, og ST som: $f \to S(T(f))$, $\forall f \in H$. Herved bliver $\mathcal{L}$ en (ikke kommutativ) algebra med enhedsoperatoren $E: f \to f$, som etelement.

I det følgende vil vi, for $S \in \mathcal{L}$ og $f \in H$, altid skrive Sf i stedet for S(f). Vi definerer endvidere, for $f \in H$ og $a \in \grave{R}$: $B(f,a) = \{g \in H \mid \|g-f\| \leqq a\}$, $B_a = B(0,a)$.

På $\mathcal{L}$ defineres en norm $S \to \|S\|$, ved $\|S\| = \sup\{\|Sf\| \mid f \in B_1\}$ $= \inf\{\lambda \in \grave{R} \mid \forall f \in H : \|Sf\| \leqq \lambda\|f\|\}$. (At afbildningen er en norm vises let; f.eks. gælder: $\|S\| = 0 \iff \|Sf\| = 0,\ \forall f \in B_1$ $\iff \|Sf\| = 0,\ \forall f \in H \iff S = 0$, idet 0 betegner nuloperatoren: $f \to 0$; jfr. også AG III,14,9). Herved bliver $\mathcal{L}$ en normeret algebra, idet $\|ST\| = \sup\{\|STf\| \mid f \in B_1\} \leqq \sup\{\|S\| \cdot \|Tf\| \mid f \in B_1\}$ $\leqq \|S\| \cdot \|T\|$, og $\mathcal{L}$ bliver en Banach algebra; dette vises på samme måde som den sætning, at det norm-duale rum til et normeret vektorrum er et Banachrum (AG III,14,14): Lad $\{S_n \in \mathcal{L} \mid n \in \grave{N}\}$ være en fundamental følge, lad der altså til $\varepsilon > 0$ være givet $n \in \grave{N}$, så at $\|S_m - S_n\| \leqq \varepsilon$ for n og $m \in N$; da er $S_n x$ en fundamentalfølge i H, $\forall x \in H$, og derfor konvergent med en grænseværdi Sx; af $S_n(\lambda x+y) = \lambda S_n x + S_n y$ følger ved grænseovergang, at S er lineær; $\|S_n x - S_m x\| \leqq \varepsilon$ for $n,m \geqq N$ og $x \in B_1$ medfører $\|Sx - S_m x\| \leqq \varepsilon$ for $m \geqq N$ og $x \in B_1$, og $\|S - S_m\| \leqq \varepsilon$, $m > N$, altså at S_n konvergerer mod S; da $\|S\| = \|S - S_N + S_N\| \leqq \|S - S_N\| + \|S_N\| \leqq \varepsilon + \|S_N\| < \infty$, vil $S \in \mathcal{L}$.

Bemærkning: For to vilkårlige topologiske vektorrum over $\mathbb{C}$, H og K, betegner $\mathcal{L}(H,K)$ mængden af kontinuerte, lineære afbildninger: $H \to K$; (f.eks. er $H' = \mathcal{L}(H,\mathbb{C})$). Vi har da åbenbart: $\mathcal{L}(H,K)$ er et vektorrum, $\mathcal{L}(H,H)$ er en algebra over $\mathbb{C}$; hvis H og K er normerede vektorrum, er $\mathcal{L}(H,K)$ et normeret vektorrum og $\mathcal{L}(H,H)$ en normeret algebra; hvis H er et normeret vektorrum og K et Banachrum, er $\mathcal{L}(H,K)$ et Banachrum og $\mathcal{L}(K,K)$ en Banach algebra.

1.2. For $S \in \mathcal{L}$ og $g \in H$ definerer: $f \to (Sf|g)$ en lineær funktional på H, kontinuert med norm $\leqq \|S\|\cdot\|g\|$, da $|(Sf|g)| \leqq \|Sf\|\cdot\|g\| \leqq \|S\|\cdot\|f\|\cdot\|g\|$. Derfor eksisterer der ét element $S^*g \in H$, med norm $\leqq \|S\|\cdot\|g\|$, så at $(Sf|g) = (f|S^*g)$, $\forall f \in H$.

<u>Sætning</u>: $S^* \in \mathcal{L}$; $S^{**} = S$; $\|S^*\| = \|S\|$.

Bevis: Da $(Sf|\lambda g) = \bar{\lambda}(Sf|g) = \bar{\lambda}(f|S^*g) = (f|\lambda S^*g)$ og tilsvarende $(Sf|g+h) = (f|S^*g+S^*h)$, $\forall_{\mathbb{C}}\lambda$, $\forall_H f,g,h$, er S^* lineær; da $\|S^*g\| \leqq \|S\|\cdot\|g\|$, er $S^* \in \mathcal{L}$ med $\|S^*\| \leqq \|S\|$. Da $(f|Sg) = (S^*f|g) = (f|S^{**}g)$, $\forall_H f,g$, er $S = S^{**}$, og $\|S\| = \|S^{**}\| \leqq \|S^*\|$, altså $\|S\| = \|S^*\|$.

<u>Sætning</u>: $(S+T)^* = S^*+T^*$, $(\lambda S)^* = \bar{\lambda}S^*$, $(ST)^* = T^*S^*$, $\|S^*S\| = \|S\|^2$.

Bevis: De to første relationer følger af identiteten: $((\lambda S+T)f|g) = \lambda(Sf|g)+(Tf|g) = \lambda(f|S^*g)+(f|T^*g) = (f|(\bar{\lambda}S^*+T^*)g)$. $(STf|g) = (Tf|S^*g) = (f|T^*S^*g)$ viser, at $(ST)^* = T^*S^*$. Da $\|Sf\|^2 = (Sf|Sf) = (S^*Sf|f)$, gælder: $\|S\|^2 = [\sup\{\|Sf\| \mid f \in B_1\}]^2 = \sup\{\|Sf\|^2 \mid f \in B_1\} = \sup\{(S^*Sf|f) \mid f \in B_1\} \leqq \|S^*S\| \leqq \|S^*\|\cdot\|S\| = \|S\|^2$.

1.3. Definition: $S \in \mathcal{L}$ er selvadjungeret, hvis $S = S^*$, d.v.s. hvis $(Sf|g) = (f|Sg)$, $\forall_H f,g$.

Hvis S er selvadjungeret, er $\overline{(Sf|f)} = (f|Sf) = (Sf|f)$, altså $(Sf|f)$ reel, $\forall f \in H$.

Definition: $S \geqq 0$ hvis S er selvadjungeret, og $(Sf|f) \geqq 0$, $\forall_H f$. $S \geqq T$, hvis $S-T \geqq 0$.

Sætning: De selvadjungerede operatorer $\in \mathcal{L}$ udgør et ordnet vektorrum over $\mathring{R}$.

Bevis: De selvadjungerede operatorer udgør et vektorrum over $\mathring{R}$, da afbildningen: $S \to S^*$ er konjugeret lineær.

$A \leqq B$, $B \leqq C \Longleftrightarrow ((B-A)f|f) \geqq 0$ og $((C-B)f|f) \geqq 0$, $\forall_H f \Rightarrow ((C-A)f|f) \geqq 0$, $\forall_H f \Longleftrightarrow A \leqq C$. $A \leqq B$, $B \leqq A$, $C = A-B$, $\Rightarrow (Cf|f) = 0$, $\forall_H f \Rightarrow 4(Cf|g) = \sum_{n=0}^{3} i^n(C(f+i^n g)|f+i^n g) = 0 \Rightarrow C = 0$. Der er altså virkelig defineret en ordning, som umiddelbart ses at være i overensstemmelse med vektorrum strukturen: $\lambda \in \mathring{R}^+$, $A \leqq B \Rightarrow \lambda A \leqq \lambda B$, og $A \leqq B \Rightarrow A+C \leqq B+C$.

Sætning: $A \in L$, $B \geqq 0 \Rightarrow A^*BA \geqq 0$.

Bevis: A^*BA er selvadjungeret og $(A^*BAf|f) = (BAf|Af) \geqq 0$, $\forall_H f$, da $B \geqq 0$.

Heraf følger: For $A \in L$ er A^*A og $AA^* \geqq 0$; $A \geqq 0 \Rightarrow A^n \geqq 0, \forall n \in \mathring{N}$; A selvadjungeret $\Rightarrow A^{2n} \geqq 0$, $n \in \mathring{N}$; hvis A og B er kommuterende selvadjungerede operatorer og $A \geqq 0$, så er $AB^2 \geqq 0$.

For $A \in L$ defineres $\mathrm{Re}A = \frac{1}{2}(A+A^*)$, $\mathrm{Im}A = \frac{1}{2i}(A-A^*)$.

Sætning: $A \in L$ kan på én måde skrives $A = B+iC$, hvor B og C er selvadjungerede.

Bevis: $A = \mathrm{Re}A+i\,\mathrm{Im}A$ er en sådan opspaltning. $A = B+iC$, $B = B^*, C = C^* \Rightarrow A^* = B-iC$, $B = \frac{1}{2}(A+A^*) = \mathrm{Re}A$, $C = \frac{1}{2i}(A-A^*) = \mathrm{Im}A$.

Definition: En operator $A \in L$ er normal, hvis $AA^* = A^*A$.

Sætning: $A \in L$ er normal, hvis og kun hvis ReA og ImA kommuterer.

Bevis: Sæt $B = \mathrm{Re}A, C = \mathrm{Im}A, AA^* = A^*A \Longleftrightarrow$

$(B+iC)(B-iC) = (B-iC)(B+iC) \Longleftrightarrow B^2-iBC+iCB+C^2 = B^2+iBC-iCB+C^2 \Longleftrightarrow$ $BC = CB$.

<u>Sætning</u>: Produktet af to selvadjungerede operatorer A og B er selvadjungeret, hvis og kun hvis A og B kommuterer.

Bevis: $A = A^*, B = B^* \Rightarrow (AB)^* = B^*A^* = BA$.

Kap. IV. Ubegrænsede operatorer.

§ 1. Almindelige egenskaber.

Vi betragter et fast Hilbertrum H.

En (lineær) operator på H er en lineær afbildning T af et underrum $D(T) \subseteq H$ (definitionsområdet for T) ind i H. To operatorer S og T regnes for ens, hvis og kun hvis $D(S) = D(T)$ og $S(f) = T(f), \forall f \in D(S)$.

For operatorer S og T på H og $\lambda \in \mathbb{C}$ definerer vi operatorer λS, $S+T$, og ST ved: $D(\lambda S) = D(S)$, $(\lambda S)(f) = \lambda S(f)$, $\forall f \in D(\lambda S)$; $D(S+T) = D(S) \cap D(T)$, $(S+T)(f) = S(f)+T(f)$, $\forall f \in D(S+T)$; $D(ST) = \{f \in D(T) | T f \in D(S)\} = D(T) \cap T^{\circ-1}(D(S))$, $(ST)(f) = S(T(f))$, $\forall f \in D(ST)$.

I det følgende skriver vi Sf i stedet for $S(f)$.

Man bemærker, at man <u>ikke</u> kan regne på sædvanlig måde; f.eks. er $0S$ lig sammentrækningen af 0-operatoren til $D(S)$, altså $\neq 0$, hvis $D(S) \neq H$.

Det vises let, at $H^2 = \{(f,g) | f \in H, g \in H\}$ er et Hilbertrum m.h.t. det indre produkt: $((f_1,g_1),(f_2,g_2)) \to (f_1|f_2)+(g_1|g_2)$. (Jfr. III,1, øv. 6, og II,2). En operator S på H kan beskrives fuldstændigt ved sin graf $G(S) = \{(x,y) \in H^2 | x \in D(S),\ y = Sx\}$. $S \to G(S)$ er en enentydig afbildning af mængden af operatorer på H ind i mængden af lineære underrum i H^2. Et underrum $G \subseteq H^2$ er herved graf for en operator, hvis og kun hvis: $(x,y) \in G$ og $(x,z) \in G$ medfører $y = z$, eller ækvivalent hermed (da G er et underrum) hvis og kun hvis: $(0,y) \in G$ medfører $y = 0$.

For to operatorer S og T definerer vi: $S \subseteq T$ (S er indeholdt i T, T er en udvidelse af S), hvis $D(S) \subseteq D(T)$, og $Sf = Tf$, $\forall f \in D(S)$; da mængden af underrum af H^2 er partielt ordnet m.h.t. sædvanlig inclusion, og da $S \subseteq T$, hvis og kun hvis $G(S) \subseteq G(T)$, bliver mængden af operatorer på H partielt ordnet m.h.t. $\subseteqq$.

En operator S på H kaldes afsluttet, hvis G(S) er afsluttet i den stærke topologi på H^2; da H^2 er et metriserbart rum, er G(S) afsluttet, hvis og kun hvis G(S) indeholder grænsepunkterne for alle konvergente følger af elementer $\in G(S)$; S er derfor afsluttet, hvis og kun hvis: $\{x_n \in D(S) | n \in \dot{N}\}$, $x_n \to x \in H$, $Sx_n \to y \in H$ medfører $x \in D(S)$, $Sx = y$.

En operator S kan afsluttes, hvis og kun hvis der eksisterer en operator $\bar{S}$, afslutningen af S, så at $G(\bar{S}) = \overline{G(S)}$, d.v.s. hvis og kun hvis $\overline{G(S)}$ ikke indeholder noget element af form $(0,y)$, $y \neq 0$, d.v.s. hvis og kun hvis: $\{x_n \in D(S) | n \in \dot{N}\}$, $x_n \to 0$, $Sx_n \to y$ medfører $y = 0$. Ikke alle operatorer kan afsluttes (jfr. øv. 1).

Der gælder den vigtige sætning, som vi ikke vil vise, at en afsluttet operator S, for hvilken $D(S) = H$, er begrænset, altså $\in \mathcal{L}$.

En operator S kaldes tæt defineret, hvis $\overline{D(S)} = H$.

En operator S kaldes symmetrisk, hvis $(Sx|y) = (x|Sy)$, $\forall x,y \in D(S)$.

1.2. Lad S være en tæt defineret operator på H. For vilkårligt $y \in H$ er $x \to (Sx|y)$ en lineær funktional på D(S); hvis denne funktional er kontinuert, d.v.s. hvis der eksisterer $k \in \dot{R}^+$, så at $|(Sx|y)| \leq k\|x\|$, $\forall x \in D(S)$, kan den på én måde udvides til en funktional på H (da D(S) er tæt i H), og der eksisterer ét element $S^*y \in H$, så at $(Sx|y) = (x|S^*y)$, $\forall x \in D(S)$. Herved defineres en afbildning S^*, der let ses at blive en operator. Vi har altså: $D(S^*) = \{y \in H | \exists y^* \in H$, så at $(Sx|y) = (x|y^*)$ for $\forall x \in D(S)\}$, et sådant y^* er entydigt bestemt, og $S^*y = y^*$.

Lad S være en operator på H.

Lad $V \in \mathcal{L}(H^2,H^2)$ være givet ved: $V(x,y) = (-y,x)$; da er

$(VG(S))^\perp = V(G(S)^\perp)$, da $(u,v)\perp(-Sx,x)$, $\forall x \in D(S) \iff$ $(v,-u)\perp(x,Sx)$, $\forall x \in D(S)$, og dette afsluttede underrum $\subseteq H^2$ er en graf, hvis og kun hvis S er tæt defineret; thi $(0,y)\perp(-Sx,x)$, $\forall x \in D(S)$, medfører $y = 0$, hvis og kun hvis $D(S)^\perp = \{0\}$. Hvis S er tæt defineret, er operatoren med graf $(VG(S))^\perp$ netop S^*, da $(u,v) \in (VG(S))^\perp \iff 0 = ((u,v)|(-Sx,x)) = (u|-Sx)+(v|x)$, $\forall x \in D(S) \iff (Sx|u) = (x|v)$, $\forall x \in D(S) \iff u \in D(S^*)$, $S^*u = v$.

Det følger straks, at hvis S og T er operatorer, S tæt defineret, og $S \subseteq T$, så er $T^* \subseteq S^*$. [S^* er en afsluttet op.]

Antag, at S er en tæt defineret operator. $(S^*)^* = S^{**}$ er defineret, hvis og kun hvis S^* er tæt defineret, eller hvis og kun hvis $(VG(S^*))^\perp = (V\,V(G(S)^\perp))^\perp = (G(S)^\perp)^\perp = \overline{G(S)}$ er en graf, d.v.s. hvis og kun hvis S kan afsluttes; i dette tilfælde gælder $\overline{S} = S^{**}$. Derfor er også S^{***} defineret, og $S^{***} = \overline{S^*} = S^*$.

En tæt defineret operator S er symmetrisk, hvis og kun hvis $S \subseteq S^*$; en sådan operator har altså altid en afslutning S^{**}, og denne er igen symmetrisk, da $S \subseteq S^*$ medfører $S^{**} \subseteq S^* = S^{***}$.

Hvis en operator S er enentydig, hvis altså $x \in D(S)$, $Sx = 0$ medfører $x = 0$, definerer vi en operator S^{-1}, den inverse operator til S, ved: $D(S^{-1}) = SH$, $S^{-1}Sf = f$ for $f \in D(S)$, altså $Sf \in D(S^{-1})$.

Sætning: Lad S være en afsluttet, symmetrisk operator og $\lambda \in \check{C} \setminus \check{R}$. $S - \lambda E$ har en invers, der er defineret på et afsluttet underrum $\subseteq H$, og opfylder $\|(S-\lambda E)^{-1}f\| \leqq |\mathrm{Im}(\lambda)|^{-1}\|f\|$, $\forall f \in D((S-\lambda E)^{-1})$.

symmetrisk.

Bevis: Sæt $\lambda = \alpha + i\beta$, $\alpha,\beta \in \check{R}$, og $S-\alpha E = T$; $\|(T-i\beta E)f\|^2 = (Tf|Tf) + i\beta(Tf|f) - i\beta(f|Tf) + \beta^2(f|f) = \|Tf\|^2 + \beta^2\|f\|^2 \geqq \beta^2\|f\|^2$, $\forall f \in D(T) = D(S)$; $T-i\beta E$ er derfor enentydig, og har derfor en invers, der opfylder $\|(T-i\beta E)^{-1}g\| \leq |\beta|^{-1}\|g\|$, $\forall g \in (T-i\beta E)\cancel{H}D(S)$.

$y \in \overline{(T-i\beta E)\cancel{H}D(S)} \Rightarrow \exists\{x_n \in D(S) \mid n \in \mathbb{N}\}$, så at $(T-i\beta E)x_n \to y$ $\Rightarrow ((T-i\beta E)x_n)$ er en fundamentalfølge $\Rightarrow (x_n)$ er en fundamentalfølge $\Rightarrow (x_n)$ konvergerer mod et element $x \in H \Rightarrow Sx_n = (T - i\beta E)x_n + \lambda x_n \to y + \lambda x$. Da S er afsluttet, vil $x \in D(S)$, og $Sx = y + \lambda x$, $(S - \lambda E)x = y$, $y \in (T - i\beta E)\cancel{H}D(S) = D(S - \lambda E)^{-1})$.

Definition: En operator A er selvadjungeret, hvis A er tæt defineret, og $A = A^*$.

Spektret for en ubegrænset operator T defineres, ligesom for en begrænset operator, som $\{\lambda \in \mathbb{C} \mid T - \lambda E$ har ~~en~~ invers $\in \mathcal{L}\}$

<u>Sætning</u>: <u>En selvadjungeret operator A har reelt spektrum.</u>

Bevis: Vi skal vise, at $A - \lambda E$ har en invers $\in \mathcal{L}$, for $\mathrm{Im}(\lambda) \neq 0$; da A specielt er symmetrisk og afsluttet, mangler vi kun at vise, at $(A - \lambda E)H$ er tæt i H: $((A - \lambda E)f|g) = 0, \forall f \in D(A) \Rightarrow g \in D(A^*)$, $A^*g = \bar{\lambda}g \Rightarrow (A - \bar{\lambda}E)g = 0 \Rightarrow g = 0$, da $A - \bar{\lambda}E$ er enentydig; $((A - \lambda E)H)^{\perp} = \{0\}$.

1.3 Antag, at A,B og A + B er tæt definerede operatorer; for $f \in D(A + B)$, $g \in D(A^* + B^*)$ fås: $((A + B)f|g) = (Af|g) + (Bf|g) = (f|A^*g + B^*g)$, og derfor $g \in D((A + B)^*)$, $(A + B)^*g = (A^* + B^*)g$; vi har vist, at $\boxed{A^* + B^* \subseteq (A + B)^*}$. Hvis specielt $A \in \mathcal{L}$, gælder: $B = (A + B) + (-A)$, $B^* \supseteq (A + B)^* - A^*$, $A^* + B^* \supseteq (A + B)^*$, altså $(A + B)^* = A^* + B^*$.

Antag, at A,B, og AB er tæt definerede operatorer; for $f \in D(AB)$, $g \in D(B^*A^*)$ fås: $(ABf|g) = (Bf|A^*g) = (f|B^*A^*g)$, $g \in D((AB)^*)$, $(AB)^*g = B^*A^*g$; vi har vist, at $\boxed{B^*A^* \subseteq (AB)^*}$. Hvis specielt $A \in \mathcal{L}$, gælder $(AB)^* = B^*A^*$; thi $f \in D(B)$, $g \in D((AB)^*)$ medfører $(Bf|A^*g) = (ABf|g) = (f|(AB)^*g)$, $A^*g \in D(B^*)$, derfor $g \in D(B^*A^*)$, og $B^*A^*g = (AB)^*g$.

Sætning: Hvis T er en tæt defineret, enentydig operator, så er T^{-1} tæt defineret, hvis og kun hvis T^* er enentydig; hvis dette er opfyldt, gælder $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$.

Bevis: Vi definerer $U \in \mathfrak{L}(H^2,H^2)$ ved $U(f,g) = (g,f)$; da gælder: $UV + VU = 0$, $U(G^{\perp}) = (UG)^{\perp}$ for vilkårligt underrum $G \subseteq H^2$; en operator A har en invers, hvis og kun hvis $UG(A)$ er en graf, og hvis dette er tilfældet, er $G(A^{-1}) = \{(x,A^{-1}x) \mid x \in D(A^{-1}) = AD(A)\} = \{(Ay,y) \mid y \in D(A)\} = UG(A)$.

T^{-1} er tæt defineret $\Longleftrightarrow$ $(VG(T^{-1}))^{\perp} = (VUG(T))^{\perp} = (UVG(T))^{\perp} = U((VG(T))^{\perp}) = UG(T^*)$ er en graf $\Longleftrightarrow$ T^* er enentydig, og disse medfører $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$.

1.4 For operatorer B og T, hvor $B \in \mathfrak{L}$, definerer vi: B og T kommuterer, hvis $BT \subseteq TB$, d.v.s. hvis $f \in D(T)$ medfører $Bf \in D(T)$ og $TBf = BTf$.

Hvis B kommuterer med T, og T er enentydig, kommuterer B også med T^{-1}; thi for $f \in D(T^{-1})$ $\exists$ $g \in D(T)$, så $f = Tg$, og vi finder $Bg \in D(T)$, $TBg = BTg = Bf$, altså $Bf \in TD(T) = D(T^{-1})$, $T^{-1}Bf = Bg = BT^{-1}f$.

Hvis B kommuterer med T, og T er tæt defineret, kommuterer B^* med T^*; thi $B^*T^* \subseteq (TB)^* \subseteq (BT)^* = T^*B^*$.

Lad P være en projektion, der kommuterer med en operator T, $Q = E - P$. $PT \subseteq TP \Rightarrow PTP \subseteq TPP = TP$; da $D(PTP) = D(TP)$ gælder $PTP = TP$; tilsvarende fås $TQ = QTQ$. Desuden får vi $T = (P + Q)T = PT + QT \subseteq TP + TQ \subseteq T(P + Q) = T$, derfor $T = TP + TQ$. T afbilder altså $PH \cap D(T)$ ind i PH og $QH \cap D(T)$ ind i QH, T er fuldstændig bestemt ved TP og TQ.

§ 2. Normalformer for matricer.

Vi minder om den algebraiske definition af ringen (egentlig algebraen) $M[X]$ af polynomier over et kommutativt legeme M (vi skal her kun beskæftige os med tilfældet $M = \mathbb{R}$ og $M = \mathbb{C}$): $M[X] = \{(a_n)_{n=0,1,\ldots} \mid a_n \in M \wedge \exists N \in \mathbb{N}$, så at $a_n = 0$ for $n > N\}$, organiseret ved regnereglerne:

$$(a_n) + (b_n) = (a_n + b_n),\ \lambda(a_n) = (\lambda a_n),\ (a_n)\cdot(b_n) = (c_n),$$

hvor $c_n = \sum_{i+j=n} a_i b_j$ (jfr. AT 2,2, eller H. Cartan: Théorie des fonctions analytiques, chap. 1).

Lad L være en algebra over M med ételement E, A et element $\in L$. Til $P \in M[X]$, $P = (a_n)$, kan vi lade svare elementet $P(A) = a_o A^o + \ldots + a_N A^N \in L$, idet vi definerer $A^o = E$. Det følger da umiddelbart af regnereglerne, at afbildningen: $P \to P(A)$ er en homomorfi af $M[X]$ på en kommutativ delalgebra af L.

Lad f.eks. D være en delmængde af $\mathbb{C}$, $L = C(D,M)$, og A den funktion, der til $z \in D$ lader svare z. $P(A)$ bliver da sammentrækningen P_D til D af den sædvanlige polynomiums funktion, der til vilkårligt $z \in \mathbb{C}$ lader svare $P(z)$. (jfr. AT 2,14). Hvis D er en uendelig delmængde af $\mathbb{C}$, vides det, at afbildningen $P \to P_D$, $M[X] \to C(D,\mathbb{C})$, er en isomorfi; thi en polynomiums funktion er nul i en uendelig mængde, hvis og kun hvis alle koefficienter er nul.

2.2. Vi betragter nu et endelig dimensionalt vektorrum V over $\mathbb{C}$ (ikke nødvendigvis forsynet med en topologi. Vi vil dog lade $L(V,V)$ betegne vektorrummet af alle lineære afbildninger af V ind i V). Vi betragter en fast afbildning $A \in L(V,V)$. For et vilkårligt koordinatsystem (d.v.s. lineært uafhængig basis for V) $e_1,\dots,e_s$ kan A beskrives fuldstændigt ved matricen (a_{ij}), hvis søjler er koordinaterne for $Ae_1,\dots,Ae_s$; det er velkendt, at afbildningen Ψ, der til A lader svare talsættet $(a_{11},\dots,a_{s1},a_{21},\dots,a_{ss})$, er lineær og bijektiv af $L(V,V)$ på $\mathbf{C}^{s^2}$.

Da $\Psi(A^o), \Psi(A^1),\dots,\Psi(A^{s^2})$ er lineært afhængige i det s^2 dimensionale rum $\mathbf{C}^{s^2}$, findes der et egentligt talsæt $(\alpha_o,\dots,\alpha_{s^2})$, så at $\alpha_o\Psi(A^o) +\dots+ \alpha_{s^2}\Psi(A^{s^2}) = 0$; da Ψ er injektiv, er $\alpha_o A^o +\dots+ \alpha_{s^2} A^{s^2} = 0$. Vi har vist, at der findes et egentligt polynomium $P \in \mathbf{C}[X]$, så at $P(A) = 0$.

$\{P \in \mathbf{C}[X] \mid P(A) = o\}$ er et ideal i $\mathbf{C}[X]$, og er derfor hovedidealet frembragt af det entydigt bestemte normerede polynomium Q af mindst grad i idealet. Q kaldes det minimale polynomium for A. Ifølge algebraens fundamentalsætning kan Q opløses i førstegrads faktorer, $Q = \Pi\{(X-\lambda_i)^{m_i} \mid i = 1,\dots,r\}$, hvor X som sædvanlig betegner polynomiet $(a_i) = (\delta_{1i})$, og hvor vi vil forudsætte, at $m_i \geq 1$ og $\lambda_i \neq \lambda_j$ for $i,j = 1,\dots,r, i \neq j$.

Vi ved altså, at $Q(A) = \Pi\{(A-\lambda_i E)^{m_i} \mid i = 1,\dots,r\} = 0$, men at $P(A) \neq 0$ for ethvert polynomium af lavere grad end Q. Vi sætter $Q_j = \Pi\{(X-\lambda_i)^{m_i} \mid i \in \{1,\dots,r\} \setminus \{j\}\}$, og finder specielt, at $Q_j(A)V = V_j \neq \{0\}$ og $(A-\lambda_j E)^{m_j-1} V_j \neq \{0\}$. Da $Q \mid Q_i \cdot Q_j$ for $i \neq j$, er $Q_i(A)Q_j(A) = o$ for $i \neq j$.

Det mindste ideal i $\mathbf{C}[X]$, der indeholder $Q_j, j = 1,\dots,r$, er et hovedideal frembragt af et polynomium, der går op i alle Q_j, og derfor må være 1. Idealet er altså hele $\mathbf{C}[X]$. Specielt findes der polynomier R_i, så at $1 = Q_1R_1 +\dots+ Q_rR_r$, vi sætter $Q_i(A)R_i(A) = E_i$ og finder: $E = E_1 +\dots+ E_r$; $Q_j(A)E_i = 0$ for

$i \neq j$, og dermed $E_j E_i = 0$ for $i \neq j$; $Q_j(A) = \Sigma\{E_i Q_j(A) \mid i = 1,\dots r\} = E_j Q_j(A)$, så at ethvert element i V_i er invariant under E_i og $E_j = E_j Q_j(A) R_j(A) = E_j E_j$; E_j er altså en idempotent afbildning af V på V_j. Heraf følger, at rummene V_i er lineært uafhængige; thi $v_1 + \dots + v_r = 0$, med $v_i \in V_i$, medfører $0 = E_i \Sigma\{E_j v_j \mid j = 1,\dots,r\} = E_i v_i = v_i$. V er altså direkte sum af rummene V_i, $i = 1,\dots,r$.

$V_i = \{v \in V \mid (A-\lambda_i E)^{m_i} v = 0\}$; thi hvis $(A-\lambda_i E)^{m_i} v = 0$, er $Q_j(A)v = 0$ og $E_j v = 0$ for $j \neq i$, så at $v = \Sigma\{E_i v \mid i = 1,\dots,r\} = E_i v \in V_i$, og hvis $v \in V_i$ er $v = Q_i(A) v$ og $(A-\lambda_i E)^{m_i} v = (A-\lambda_i E)^{m_i} Q_i(A)\cancel{R_i(A)} v = Q(A)\cancel{R_i(A)} v = 0$. $(A-\lambda_i E)^{m_i - 1} V_i \neq \{0\}$

<u>Sætning</u>: Til en lineær operator A på et endeligt dimensionalt vektorrum V over $\mathbb{C}$ findes der et og kun ét sæt $(r,(V_i,\lambda_i,m_i)_{i=1,\dots,r})$, så at $r \in \mathbb{N}$, V er direkte sum af underrummene V_i, $\lambda_i \neq \lambda_j$ for $i \neq j$, $m_i \geqq 1$, og $(A-\lambda_i E)^{m_i - 1} V_i \neq \{0\}$, $(A-\lambda_i E)^{m_i} V_i = \{0\}$. $\{\lambda_i \mid i = 1,\dots,r\}$ er mængden af egenværdier for A, og $V_i = \{v \in V \mid (A-\lambda_i E)^{m_i} v = 0\}$.

Bevis: Antag, at der for en operator A eksisterer et sådant sæt. For $v \in (A-\lambda_i)^{m_i - 1} V_i \neq \{0\}$ er $(A-\lambda_i E)v = 0$; λ_i er altså egenværdi for A. Vi vil vise, at det minimale polynomium for A er $\Pi\{(X-\lambda_i)^{m_i} \mid i = 1,\dots,r\}$. Da enhver vektor $v \in V$ kan skrives $v = v_1 + \dots + v_r$, $v_i \in V_i$, og $(A-\lambda_i E)^{m_i} v_i = 0$, er $\Pi\{(A-\lambda_i E)^{m_i} \mid i = 1,\dots,r\} = 0$; derfor går det minimale polynomium for A op i $\Pi\{(X-\lambda_i)^{m_i} \mid i = 1,\dots,r\}$. På den anden side finder vi for en vektor $u \neq 0$ i $(A-\lambda_j E)^{m_j - 1} V_j$, $u = (A-\lambda_j E)^{m_j - 1} v$, at $Au = \lambda_j u$, og $(A-\lambda_i E)u = (\lambda_j - \lambda_i)u$, så at $\Pi\{(A-\lambda_i E)^{m_i} \mid i \neq j\}u = \Pi\{(\lambda_i - \lambda_j)^{m_i} \mid i \neq j\} u \neq 0$, da $\lambda_i \neq \lambda_j$ for $i \neq j$. Da således $\Pi\{(A-\lambda_i E)^{m_i} \mid i \neq j\}(A-\lambda_j E)^{m_j - 1} \neq 0$, $j = 1,\dots,r$, går det minimale polynomium ikke op i noget polynomium af mindre grad end $\Pi\{(X-\lambda_i)^{m_i} \mid i = 1,\ldots,r\}$; derfor er det minimale polynomium netop $\Pi\{(X-\lambda_i)^{m_i} \mid i = 1,\ldots,r$. Dette viser, at r og $\{(\lambda_i,m_i) \mid i = 1,\ldots r\}$ er entydigt bestemt. Vi har tidligere vist, at V er direkte sum af rummene $V_i' = \{v \in V \mid (A-\lambda_i E)^{m_i} v = 0\}$; da også $V_i' \supseteq V_i$ og V er direkte sum af rummene V_i, ser man let, at $V_i' = V_i$ ($v \in V_i' \Rightarrow v=\Sigma v_j, v_j \in V_j \subseteq V_j' \Rightarrow v_j = 0$ for $j \neq i$, og $v = v_i \in V_i$), så at også rummene V_i er entydigt bestemt.

Vi mangler kun at vise, at et tal $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{\lambda_j,\ldots,\lambda_n\}$ ikke kan være egenværdi for A; men $Av = \lambda v$ medfører $0 = \varrho(A)v = \Pi\{(A-\lambda_i)^{m_i} \mid i = 1,\ldots,r\}v = \Pi\{(\lambda-\lambda_i)^{m_i} \mid i = 1,\ldots,r\}v$, så at $v = 0$.

Vi vil nu kort diskutere operatorerne $(A-\lambda_i E)|V_i$, d.v.s. vi vil diskutere en operator B, der er nilpotent af grad m på vektorrum W. Vi har da $W \supsetneq B W \supsetneq\ldots\supsetneq B^{m-1}W \supsetneq B^m W = \{0\}$, og $B^{m-1}W \neq \{0\}$. Vi vælger en lineært uafhængig basis $v_1,v_2,\ldots,v_\alpha \in B^{m-1}W$, og $u_1,\ldots,u_\alpha \in W$, så at $B^{m-1}u_1 = v_1$, $i = 1,\ldots,\alpha$; $\{u_1,Bu_1,\ldots,B^{m-1}u_1,u_2,\ldots,B^{m-1}u_\alpha\}$ er lineært uafhængig, thi relationen $\Sigma\{\lambda_{ij}B^{j-1}u_i \mid i = 1,\ldots,\alpha;\ j = 1,\ldots,m\} = 0$ giver ved anvendelse af B^{m-1}: $\Sigma\{\lambda_{i1}v_i \mid i = 1,\ldots,\alpha\} = 0$, så at $\lambda_{i1} = 0$ for $i = 1,\ldots,\alpha$; derefter fås ved anvendelse af B^{m-2}, at $\Sigma\{\lambda_{i2}v_i \mid i = 1,\ldots,\alpha\} = 0$, o.s.v.

Vi finder nu det største hele tal n, $n \leqq m-2$, for hvilket dimensionen af B^nW er større end $(m-n)\alpha$, d.v.s. for hvilket $\{B^nu_1,\ldots,B^{m-1}u_1,B^nu_2,\ldots,B^{m-1}u_\alpha\}$ ikke udspænder B^nW; vi supplerer dette system til en basis for B^nW ved valg af vektorer $v'_{\alpha+1},\ldots,v'_{\alpha+\beta}$; da $Bv'_{\alpha+i} \in B^{n+1}W$, er $Bv'_{\alpha+i}$ en linearkombination vektorerne $B^{n+1}u_1,\ldots,B^{m-1}u_\alpha$; idet vi fra $v'_{\alpha+1}$ trækker den tilsvarende linearkombination af vektorerne $B^nu_1,\ldots,B^{m-2}u_\alpha$, får vi en vektor $v_{\alpha+i}$, for hvilken B $v_{\alpha+i} = 0$; man ser let, at også $\{B^n u_1, \dots, B^{m-1}u_\alpha, v_{\alpha+1}, \dots, v_{\alpha+\beta}\}$ er et koordinatsystem i B^nW. Vi vælger $u_{\alpha+1}, \dots, u_{\alpha+\beta}$, så at $B^n u_{\alpha+i} = v_{\alpha+i}$; $\{u_1, \dots, B^{m-1}u_\alpha, u_{\alpha+1}, \dots, B^n u_{\alpha+1}, u_{\alpha+2}, \dots, B^n u_{\alpha+\beta}\}$ er lineært uafhængig; thi hvis en linearkombination af disse vektorer er 0, finder man ved efterhånden at anvende B^n, $B^{n-1}, \dots, B$ på kombinationen, at samtlige koefficienter er 0.

På denne måde fortsættes, indtil man efter endeligt mange skridt, da W har endelig dimension, har fået en basis for W. I denne basis har B em matrix, der har lutter nuller undtagen lige under diagonalen, hvor der i rækkefølge efter hinanden først α gange kommer $\underbrace{(m-1) \text{ ettal efterfulgt af et } 0,}_{*)}$ dernæst β gange n ettal efterfulgt af et 0, o.s.v.

For $B = (A-\lambda_i E) \mid V_i$ er $A|V_i = B + \lambda_i E|V_i$; matricen for $A|V_i$ har derfor på alle pladser i diagonalen λ_i, men ser i øvrigt ud lige som matricen for B.

<u>Sætning</u> (Jordans normalform): En lineær operator A på et endelig dimensionalt vektorrum V over $\mathbb{C}$ udtrykkes i en passende valgt basis ved en matrix, der i diagonalen har A's egenværdier, lige under diagonalen o eller 1, ellers lutter nuller; d.v.s. A udtrykkes ved en blokmatrix, hvor de enkelte blokke er nulmatricer eller matricer af formen

$$\begin{pmatrix} \lambda_i & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_i & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda_i \end{pmatrix} \quad \text{eller af formen } (\lambda_i).$$

Det karakteristiske polynomium for A, $\det(\underline{\underline{A}} - \lambda\underline{\underline{E}})$, hvor $\underline{\underline{A}}$ er matricen for A i et vilkårligt koordinatsystem for V og $\underline{\underline{E}}$ er

*) medfører dim W ≥ m.

enhedsmatricen, udregnes i den her valgte basis til $\Pi\{(X-\lambda_i)^{\mu_i} \mid i = 1,\dots,r\}$, hvor μ_i er dimensionen af V_i, og derfor $\geqq m_i$; det minimale polynomium går derfor op i det karakteristiske polynomium.

Hvis vi har givet et koordinatsystem for V, og A i dette udtrykkes ved matricen $\underline{\underline{A}}$, udtrykkes A i et andet koordinatsystem ved matricen $\underline{\underline{N}}^{-1}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{N}}$, hvor $\underline{\underline{N}}$ er en matrix, hvis søjler er koordinaterne i det første koordinatsystem for grundvektorerne i det andet; omvendt er $\underline{\underline{N}}^{-1}\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{N}}$ for en vilkårlig invertibel matrix $\underline{\underline{N}}$ matricen for A i et koordinatsystem, hvis grundvektorer udtrykt i det givne koordinatsystem er søjlerne i $\underline{\underline{N}}$. Sætningen kan altså udtrykkes som et udsagn om, at der for enhver matrix $\underline{\underline{A}}$ findes en inventibel matrix $\underline{\underline{N}}$, så at $\underline{\underline{N}}^{-1}\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{N}}$ har den beskrevne simple form.

Enhver operator B på V, der kommuterer med A, kommuterer også med ethvert polynomium af A, specielt med operatorerne $E_i, i = 1,\dots,r$; for $v \in V_i$ er da $Bv = BE_iv = E_iBv \in V_i$, så $B|V_i$ er en operator på V_i.

2.3. Vi antager nu, at V er et Hilbertrum, og at A er en normal operator, d.v.s. $A^*A = AA^*$. Da $A^*|V_i \subseteqq V_i$ og $(A\,u|v) = (u|A^*v)$ for u og $v \in V_i$, er $(A|V_i)^* = A^*|V_i$. $A|V_i$ er da også normal, idet $(A|V_i)^*(A|V_i)v = A^*Av = AA^*v = (A|V_i)(A|V_i)^*v$ for $v \in V_i$.

Da $A|V_i - \lambda_iE|V_i$ er nilpotent af grad m_i, idet $(A-\lambda_iE)^{m_i}V_i = \{0\}$, og normal, er $m_i = 1$ *), så at $V_i = \{v \in V|(A-\lambda_iE)^{m_i}v = 0\}$ netop er egenrummet svarende til egenværdien λ_i, $V_i = \{v \in V|Av = \lambda_iv\}$. Det minimale polynomium for A har altså formen $Q = \Pi\{(X-\lambda_i) \mid i = 1,\dots,r\}$. I et vilkårligt koordinatsystem i V_i udtrykkes $A|V_i$ ved en diagonalmatrix. Da $AE_i = \lambda_iE_i$ og

*) jfr. side K II, 3,10 Kom. til K III, 1, 1962-63 s.1

$E = \Sigma\{E_i \mid i = 1,\dots,r\}$, er $A = \Sigma\{\lambda_i E_i \mid i = 1,\dots,r\}$.

For $P = (a_i) \in \mathbb{C}[X]$ sætter vi $P^* = (\overline{a}_i)$ d.v.s. $P^*(z) = \overline{P(\overline{z})}$ for $z \in \mathbb{C}$; vi ser, at $P(A)^* = P^*(A^*)$, så at $P^*(A^*) =$
0, hvis og kun hvis $P(A) = 0$; det minimale polynomium for A^* er derfor Q^*, og egenværdierne for A^* er de konjugerede til egenværdierne for A, og de til operatorerne $E_i, i = 1,\dots,r$, svarende operatorer for A^* er $E_i^*, i = 1,\dots,r$ (dette gælder også, hvis A ikke er normal).

For A normal ser vi jo også straks ved adjungering, at $A^*E_i^* = \overline{\lambda}_i E_i^*$, og $A^* = \Sigma\{\overline{\lambda}_i E_i^* \mid i = 1, \dots,r\}$. For $v \in V$ er $\lambda_i \|E_i E_j^* v\|^2 = (AE_iE_j^*v \mid E_iE_j^*v) = (E_iE_j^*v \mid E_iA^*E_j^*\, v) = (E_iE_j^*v \mid \overline{\lambda}_j E_i E_j^* v) = \lambda_j \|E_iE_j^*v\|^2$; hvis $i \neq j$ er således $E_iE_j^*v = 0$ for alle $v \in V$, altså $E_iE_j^* = 0$. Derfor er $E_i = E_iE = \Sigma\{E_iE_j^* \mid j = 1,\dots,r\} = E_iE_i^* = \Sigma\{E_jE_i^* \mid j = 1,\dots,r\} = E_i^*$. Operatorerne E_i er således idempotente og selvadjungerede, altså ortogonale projektioner, egenrummene for A og A^* til tilsvarende egenværdier falder sammen, og egenrummene til forskellige egenværdier for A er ortogonale.

<u>Sætning</u>: En normal operator A på et endelig dimensionalt Hilbertrum udtrykkes i et passende valgt ortonormalt koordinatsystem ved en diagonalmatrix.

Lad nu S betegne mængden $\{\lambda_i \mid i = 1,\dots,r\}$ af egenværdier for A. Kernen af homomorfien $P \to P_S$ af $\mathbb{C}[X]$ ind i $C(S,\mathbb{C})$ er $\{P \in \mathbb{C}[X] \mid P(\lambda_i) = 0 \text{ for } i = 1,\dots,r\}$; da et polynomium P er nul i et punkt λ_i, hvis og kun hvis $(X-\lambda_i)$ går op i P, er kernen netop idealet frembragt af $Q = \Pi\{(X-\lambda_i) \mid i = 1,\dots,r\}$, altså kernen af homomorfien $P \to P(A)$. Billedmængderne ved de to homomorfier er derfor isomorfe, mængden af polynomier af A er isomorf med mængden af polynomier på S, der igen falder sammen med mængden af alle komplekse funktioner på S, da enhver funktion på

S (jfr. de sædvanlige interpolationsformler) stemmer overens med sammentrækningen til S af et polynomium.

For en funktion f på S finder vi da den tilsvarende operator f(A), idet f(A) = P(A) for et vilkårligt polynomium P, for hvilket $P_S = f$, altså $f(A) = P(A) = P(\Sigma\{\lambda_i E_i \mid i = 1,\ldots,r\}) = \Sigma\{P(\lambda_i)E_i \mid i = 1,\ldots,r\} = \Sigma\{f(\lambda_i)E_i \mid i = 1,\ldots r\}$. Idet $f(A)^* = (\Sigma\{f(\lambda_i)E_i \mid i = 1,\ldots,r\})^* = \Sigma\{\overline{f(\lambda_i)}E_i^* \mid i = 1,\ldots,r\} = \Sigma\{\overline{f}(\lambda_i)E_i \mid i = 1,\ldots,r\} = \overline{f}(A)$, svarer konjugerede funktioner til adjungerede operatorer, specielt reelle funktioner til selvadjungerede operatorer. Den karakteristiske funktion for $\{\lambda_i\}$ svarer således til E_i, og overhovedet svarer karakteristiske funktioner til idempotente, selvadjungerede operatorer, altså projektioner.

Tilsvarende findes der en isomorfi af mængden af komplekse funktioner på $\overline{S} = \{\overline{\lambda}_i \mid i = 1,\ldots,r\}$ ind i L(V,V), så at $P_{\overline{S}}(A^*) = P(A^*) = \Sigma\{P(\overline{\lambda}_i)E_i \mid i = 1,\ldots,r\}$ for $P \in \mathring{C}[X]$. Herved er $\overline{P_S}(A) = P_S(A)^* = P(A)^* = P^*(A^*) = P^*_{\overline{S}}(A^*)$.

<u>Sætning</u>: Lad A være en normal operator på et endelig dimensionalt Hilbertrum V. Der findes et og kun ét sæt (S,φ), hvor S er en delmængde af $\mathring{C}$ og φ er en isomorfi af mængden af komplekse funktioner på S med en delalgebra af L(V,V), så at den identiske funktion $z \to z$ på S svarer til A. S er lig mængden af egenværdier for A; billedalgebraen er den mindste delalgebra af L(V,V), der indeholder E og A; φ er en isometri og fører konjugerede funktioner i adjungerede operatorer.

Bevis: Eksistensen er vist. Vi antager nu, at der findes (S,φ) med de ønskede egenskaber. Da φ er en isomorfi, er $\varphi(P_S) = P(A)$ for alle $P \in \mathring{C}[X]$. Hvis $\lambda \notin S$, er funktionen $z \to (z-\lambda)^{-1}$ defineret for alle $z \in S$, og afbildes i en operator B, for hvilken

$(A - \lambda E)B = B(A - \lambda E) = E$; $A - \lambda E$ har således en invers; λ er derfor ikke egenværdi for A. Hvis $\lambda \in S$, er $\varphi(1_{\{\lambda\}}) = E_\lambda \neq o$; da $Z \cdot 1_{\{\lambda\}} = \lambda \cdot 1_{\{\lambda\}}$ for $Z \in S$ (og for $Z \in \mathbb{C}$), er $AE_\lambda = \lambda E_\lambda$; enhver vektor $E_\lambda v \neq o$ i $E_\lambda V$ er derfor en egenvektor for A, og λ er en egenværdi. Hermed er entydigheden af (S,φ) bevist, og vi mangler kun at vise, at φ er en isometri. For en kompleks funktion f på S er $\varphi(f) = f(A) = \Sigma\{f(\lambda)E_\lambda | \lambda \in S\}$, og $\|f(A)\|^2 = \sup\{\|\sum_S f(\lambda) E_\lambda x\|^2 | x \in V \wedge \|x\| = 1\} = \sup\{\sum_S |f(\lambda)|^2 \|E_\lambda x\|^2 \mid x \in V \wedge \|x\| = 1\} \leq \max\{|f(\lambda)|^2 | \lambda \in S\} \cdot \sup\{\sum_S \|E_\lambda x\|^2 \mid x \in V \wedge \|x\| = 1\} = \|f\|^2 \cdot \sup\{\|x\|^2 \mid x \in V \wedge \|x\| = 1\} = \|f\|^2$, idet $\|f\|$ er $\max\{|f(\lambda)| \mid \lambda \in S\}$; omvendt er $\|f(A)\| \geq \|f\|$, da $\|f(A)v\| = |f(\lambda)|\|v\|$ for $v \in E_\lambda V$, $\lambda \in S$.

En normal operator er selvadjungeret, hvis og kun hvis funktionerne $Z \to Z$ og $Z \to \bar{Z}$ falder sammen på spektret. En operator er således selvadjungeret, hvis og kun hvis den er normal og har lutter reelle egenværdier.

2.4. For en vilkårlig matrix $\underline{\underline{A}} = (a_{rs})_{r=1,\dots,n,\, s=1,\dots,m}$ definerer vi den adjungerede matrix $\underline{\underline{A}}^* = (\overline{a_{sr}})_{s=1,\dots,m,\, r=1,\dots,n}$; herved er f.eks. den adjungerede matrix til en søjlematrix en rækkematrix, og for vektorer $\underline{x},\underline{y} \in \mathbb{C}^s$ er $(\underline{\underline{y}}_|)^* \underline{\underline{x}}_| = \overline{\underline{\underline{y}}}_- \underline{\underline{x}}_| = \Sigma x_\sigma \overline{y}_\sigma = \underline{\underline{x}}_- (\underline{\underline{y}}_-)^*$, det sædvanlige komplekse indre produkt, mens $\underline{\underline{y}}_| (\underline{\underline{x}}_|)^* = \underline{\underline{y}}_| \overline{\underline{\underline{x}}}_-$ er matricen $(y_\sigma \overline{x}_\tau)_{\sigma,\tau = 1,\dots,s}$.

En operater A på det endeligt dimensionale Hilbertrum V udtrykkes i et ortonormalt ks. $(e_i)_{i=1,\dots,s}$ ved matricen $\underline{\underline{A}} = ((Ae_j|e_i))_{i,j=1,\dots,s}$, idet $((Ae_j|e_i))_{i=1,\dots,s}$ er koordinaterne til Ae_j; A^* har matricen $((A^*e_j|e_i))_{i,j=1,\dots,s} = (\overline{(Ae_i|e_j)})_{i,j=1,\dots,s}$, d.v.s. $\underline{\underline{A^*}} = \underline{\underline{A}}^*$.

Isomorfien $A \to \underline{\underline{A}}$, der til en operator lader svare dens matrix i et givet k.s., fører således også, når k.s.et er ortonormalt, adjungeret operator i adjungeret matrix.

En operator A er således f.eks. normal, eller selvadjungeret, hvis den i ét og kun hvis den i ethvert ortonormalt k.s. udtrykkes ved en matrix $\underline{\underline{A}}$, for hvilken $\underline{\underline{A}}^* \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}}\ \underline{\underline{A}}^*$ (en normal matrix) eller for hvilken $\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}}^*$ (en selvadjungeret matrix).

En lineær isometri af et komplekst Hilbertrum V på sig selv kaldes en unitær operator.

Da en unitær operator er bijectiv, har den en invers, der igen er unitær, og de unitære operatorer udgør en gruppe U(s), den s-dimensionale unitære gruppe, hvor s betegner dimensionen af rummet.

En lineær operator U er en isometri, hvis og kun hvis for enhver vektor v $\|v\| = \|Uv\|$, altså $(U^* Uv|v) = (v|v)$, eller $U^* U = E$. Vi har tidligere vist (K II,3,7), at U afbilder V på et underrum med samme dimension som V. Hvis V er endelig dimensionalt, følger heraf, at U er unitær, og har en invers. Hvis V er uendelig dimensionalt, må vi selv tilføje betingelsen, at U har en invers. I begge tilfælde finder vi derefter, at $U^{-1} = U^*$, og derfor at $U(s) = \{U \in L(V,V) | U^* U = U U^* = E\}$. Idet $U^{**} = U$, er U og U^* samtidigt unitære. En operator $U \in L(V,V)$, der fører en ortonormal tilnærmelsesbasis for V i en ny ortonormal tilnærmelsesbasis, er en isometri og afbilder på V (jfr. beviset K II 3 side 7) og er dermed unitær, og afbilder enhver ortonormal tilnærmelsesbasis på en ortonormal tilnærmelsesbasis.

Vi antager nu igen, at V er endelig demensionalt, udvælger et ortonormalt k.s., og udtrykker vore operatorer i det. Vi kalder en matrix unitær, hvis $\underline{\underline{U}}^{-1} = \underline{\underline{U}}^*$, og finder: U er unitær $\iff \underline{\underline{U}}$ er unitær $\iff \underline{\underline{U}}^* \underline{\underline{U}} = E \iff \underline{\underline{U}}\ \underline{\underline{U}}^* = E \iff \Sigma\, \overline{u_{ji}}\, u_{jk} = \delta_{ik} \iff \Sigma\, u_{ij}\, \overline{u_{kj}} =$

$\delta_{ik} \iff \underline{\underline{U}}$ er matrix for overgang til et nyt ortonormalt k.s.

Sætningen om normalform for en normal operator kan nu oversættes til

<u>Sætning</u>: Til en vilkårlig normal matrix $\underline{\underline{N}}$ findes der en unitær matrix $\underline{\underline{U}}$ og en diagonalmatrix $\underline{\underline{D}}$, så at $\underline{\underline{U}}^*\underline{\underline{N}}\,\underline{\underline{U}} = \underline{\underline{D}}$. Diagonalelementerne i $\underline{\underline{D}}$ er egenværdierne for $\underline{\underline{N}}$, og søjlerne i $\underline{\underline{U}}$ er tilsvarende normerede egenvektorer.

(Dette følger også umiddelbart af relationen $\underline{\underline{N}}\,\underline{\underline{U}} = \underline{\underline{U}}\,\underline{\underline{D}}$). $\underline{\underline{N}}$ er selvadjungeret, hvis og kun hvis $\underline{\underline{D}}$ er reel.

En matrix $\underline{\underline{U}}$ kaldes ortogonal, hvis den har en invers, og $\underline{\underline{U}}^{-1} = \overline{\underline{\underline{U}}}^{*}$. En reel matrix er således ortogonal, hvis og kun hvis den er unitær; traditionelt foretrækkes i dette tilfælde glosen ortogonal. Man viser uden vanskelighed, at de ortogonale $s \times s$ matricer udgør en gruppe*) $O(s,\mathbb{R})$, der er isomorf med gruppen af lineære isometrier af det s-dimensionale reelle Hilbertrum, de s-dimensionale ortogonale operatorer. Også i forbindelse med et uendelig-dimensionalt reelt Hilbertrum anvendes glosen ortogonal om de surjective isometrier, og man viser, at en operator er ortogonal hvis den fører én og kun hvis den fører enhver ortonormal tilnærmelsesbasis i en ortonormal tilnærmelsesbasis.

Hvis en selvadjungeret matrix $\underline{\underline{A}}$ er reel, kan alle dens egenvektorer vælges reelle, da egenværdierne er reelle og egenvektorerne kan bestemmes som løsninger til lineære ligningssystemer med reelle koefficienter. Der eksisterer derfor en diagonalmatrix $\underline{\underline{D}}$ og en reel ortogonal matrix $\underline{\underline{U}}$, så at $\underline{\underline{U}}^*\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{U}} = \underline{\underline{D}}$. Dette kan igen oversættes til sætningen:

En selvadjungeret operator på et reelt, endelig dimensionalt Hilbertrum udtrykkes i et passende ortonormalt koordinatsystem ved en diagonalmatrix.

*) $O(s,\mathbb{C})$, og de reelle blandt dem en undergruppe

Teorien for idealer i $C(T,\grave{R})$ udvides let til en teori for visse idealer i algebraen $C(T,\grave{C})$ af komplekse kontinuerte funktioner på T.

<u>Sætning</u>: Lad $\underline{i}$ være et afsluttet ideal i $C(T,\grave{C})$, og antag, at $f \in \underline{i} \Rightarrow \bar{f} \in \underline{i}$. $\underline{i} = k(h(i))$.

Bevis: Sæt $h(\underline{i}) = S$, og lad $k_{\grave{R}}(S)$ betegne $\{f \in C(T,\grave{R}) \mid \forall s \in S\,[f(s) = 0]\} = k(S) \cap C(T,\grave{R})$, idet $k(S) = \{f \in C(T,\grave{C}) \mid \forall s \in S\,[f(s) = 0]\}$; sæt $\underline{i} \cap C(T,\grave{R}) = \underline{j}$; $\underline{j}$ er et afsluttet ideal i $C(T,\grave{R})$, og $h(\underline{j}) = h(\underline{i})$, da $f \in \underline{i}$, hvis og kun hvis $Re(f)$ og $Im(f) \in \underline{j}$. For $f \in k(S)$ vil $Re(f)$ og $Im(f) \in k_{\grave{R}}(S) = k_{\grave{R}}h(\underline{j}) = \underline{j}$ og dermed $f \in \underline{i}$. Da også trivielt $\underline{i} \subseteq k(h(\underline{i}))$, er $\underline{i} = k(h(\underline{i}))$.

En homomorfi p af en algebra C over $\grave{C}$ af funktioner, der med en funktion f også indeholder $\bar{f}$, ind i $L(H,H)$, hvor H er et Hilbertrum over $\grave{C}$, kaldes en *homomorfi, hvis: $\forall f \in C[p(\bar{f}) = p(f)^*]$.

Det er klart, at kærnen $\underline{i}$ af en *isomorfi opfylder betingelsen: $f \in \underline{i} \Rightarrow \bar{f} \in \underline{i}$; der er herefter ingen vanskeligheder ved at bevise

<u>Sætning</u>: Lad p_1 være en *homomorfi af $C(T,\grave{C})$ på en delalgebra $M \subseteq L(H,H)$ med kærnen $\underline{i} = p_1^{o-1}(0)$. Der findes en *isomorfi p af $C(h(\underline{i}),\grave{C})$ på M, så at $p(f|S) = p_1(f)$ for alle $f \in C(T,\grave{C})$.

§3. Idealer af kontinuerte funktioner.

En algebra A over $\mathring{R}$ er en mængde, der er organiseret ved regningsarter $+ : A \times A \to A$, $\cdot : A \times A \to A$, og $\cdot : \mathring{R} \times A \to A$, så at A m.h.t. + og $\cdot$ er en ring, og m.h.t. + og $\cdot$ et vektorrum over $\mathring{R}$, og så at følgende aksiom er opfyldt:

$\forall_{\mathring{R}} \lambda, \forall_A a,b : \lambda(ab) = (\lambda a)b = a(\lambda b)$.

Som eksempel kan nævnes den på sædvanlig måde organiserede mængde af alle $n \times n$ matricer af reelle tal.

En normeret algebra A er en algebra forsynet med en afbildning $a \to \|a\|$, $A \to \mathring{R}$, så at A's underliggende vektorrum er et normeret vektorrum, og så at:

$\forall_A\ a,b: \|ab\| \leqq \|a\| \cdot \|b\|$.

En Banachalgebra er en normeret algebra, hvis underliggende normerede vektorrum er et Banachrum.

En delmængde $\underline{i}$ af en algebra A kaldes et venstre (højre, tosidet) ideal i A, hvis $\underline{i}$ er et underrum i det underliggende vektorrum, og $\underline{i}$ er et venstre (højre, tosidet) ideal i den underliggende ring.

Det følger, at fællesmængde for en vilkårlig mængde af idealer af samme type er et ideal af samme type.

Et ideal $\underline{i}$ kaldes egentligt, hvis $\{o\} \neq \underline{i} \neq A$. $\underline{i}$ kaldes maksimalt (minimalt), hvis det er egentligt, og ethvert egentligt ideal af samme type $\underline{j} \supseteqq \underline{i}$ ($\underline{j} \subseteqq \underline{i}$) er $= \underline{i}$.

En homomorfi af en algebra A_1 ind i en algebra A_2 er en ring homomorfi, der samtidig er lineær. For en sådan homomorfi p er p^{o-1} et ideal (kernen af p), og $p(A_1)$ er isomorf med kvotient algebraen $A_1/p^{o-1}(o)$. (jfr. Mat. 2, 1961-62, AT. 1,9-10).

3.2 Lad T være et kompakt Hausdorff rum. T er da et normalt rum (T 2.20) : til ethvert par af disjunkte, afsluttede delmængder F_1 og $F_2 \subseteqq T$ $\exists$ disjunkte åbne mængder G_1 og G_2, så at $F_1 \subseteq G_1$ og $F_2 \subseteq G_2$ (T.2.17). Vi minder om, at et Hausdorff rum T er normalt, hvis og kun hvis der til et vilkårligt par af disjunkte, afsluttede delmængder A og B $\subseteq$ T $\exists$ en kontinuert afbildning $f: T \to [0,1]$, så at $f(t) = 0$ for $t \in A$ og $f(t) = 1$ for $t \in B$. (Urysohns lemma, T. 2.18).

Vi minder desuden om sætningen: Lad A være en afsluttet delmængde af et normalt rum T, f en kontinuert afbildning af A ind i et kompakt interval $I \subset \dot{R}$; der eksisterer en afbildning $g: T \to I$, så at $g_{|A} = f$. (T.2.19).

Lad $C(T) = C(T,\dot{R})$ betegne mængden af kontinuerte, reelle funktioner på T. Det forudsættes bekendt, at C(T) er en normeret algebra m.h.t. de sædvanlige regneregler: f + g er afbildningen $t \to f(t) + g(t)$, og tilsvarende, og normen $f \to \|f\| = \sup\{|f(t)| \mid t \in T\}$. Det er let at vise, at C(T) er en Banach algebra.

Det følger direkte af definitionerne, at for en vilkårlig afsluttet delmængde $A \subseteq T$ er afbildningen: $f \to f_{|A}$ en norm formindskende homomorfi af C(T) ind i C(A).

3.3 Definition: Lad t være et punkt $\in T$, A en delmængde $\subseteq T$, $\underline{i}$ en delmængde $\subseteq C(T)$; $M_t = \{f \in C(T) \mid f(t) = 0\}$; k(A) = kernen af A (ikke at sammenblande med begrebet kernen af en homomorfi !) $= \{f \in C(T) \mid f(t) = 0, \forall t \in A\} = \bigcap \{M_t \mid t \in A\}$; $h(\underline{i})$ = $\underline{i}$'s hylster $= \{t \in T \mid f(t) = 0, \forall f \in \underline{i}\} = \bigcap \{f^{o-1}(o) \mid f \in \underline{i}\}$.

Da $f \to f(t)$ for fast $t \in T$ er en kontinuert homomorfi af C(T) på den normerede algebra $\dot{R}$ over $\dot{R}$ med kernen M_t, er M_t et afsluttet ideal i C(T); for vilkårlig delmængde $A \subseteq T$ er derfor også k(A) et afsluttet ideal i C(T). Da, for $f \in C(T)$, $f^{o-1}(0)$ er en afsluttet delmængde af T, er $h(\underline{i})$ en afsluttet delmængde af T for vilkårlig delmængde $\underline{i} \subseteq C(T)$. Desuden følger direkte af definitionerne, at $A \subseteq h(k(A))$ og $\underline{i} \subseteq k(h(\underline{i}))$.

<u>Sætning</u>: For vilkårligt $t \in T$ er M_t et maksimalt ideal i $C(T)$. M_t er maximalt da $C(T)/M_t \cong R$ er et legeme.

Bevis: Lad N være et ideal $\subseteq C(T)$, så at $N \supset M_t$. Lad $f \in N \setminus M_t$, d.v.s $f(t) \neq 0$. En vilkårlig funktion $g \in C(T)$ kan skrives $g = g_1 + g_2$, hvor $g_1 = g(t)[f(t)]^{-1} f \in N$, og $g_2 \in M_t$, idet $g_1(t) = g(t)$; heraf følger, at $g \in N$, altså $N = C(T)$.

<u>Sætning</u>: Lad $\underline{i}$ være et ideal $\subseteq C(T)$, og B en kompakt delmængde af T, disjunkt med $h(\underline{i})$. $\underline{i}$ indeholder en funktion g, så at $g(t) > 0$ for alle $t \in B$.

Bevis: Til $t \in B \ \exists f_t \in \underline{i}$, så at $f_t(t) \neq 0$ (ellers ville $t \in h(\underline{i})$); da vil også $|f_t|^2 \in \underline{i}$, og $|f_t|^2(t)$ er > 0; t har derfor en åben omegn V_t, så at $|f_t|^2(s)$ er > 0, $\forall s \in V_t$. $\{V_t \mid t \in B\}$ udgør en overdækning af B med åbne mængder; vi kan udvælge endelig mange punkter $t_1, \ldots, t_n$, så at $B \subseteq \bigcup \{V_{t_v} \mid v = 1, \ldots, n\}$. Som det søgte g kan vi benytte $\sum_{v=1}^{n} |f_{t_v}|^2$.

<u>Sætning</u>: Til ethvert maksimalt ideal $M \subset C(T)$ eksisterer der et punkt $t \in T$, så at $M = M_t$.

Bevis: $h(M)$ kan ikke indeholde to forskellige punkter s og $t \in T$, da M_s så ville være et større, egentligt ideal (i følge Urysohns lemma indeholder $C(T)$ jo en funktion f, så at $f(s) = 0$ og $f(t) \neq 0$).

Vi antager $h(M) = \emptyset$. Vi kan da anvende den foregående sætning med $B = T$. M indeholder altså en funktion g, der er > 0 overalt; da $g^{-1} \in C(T)$, vil M indeholde enhver funktion $f = fg^{-1} \cdot g \in C(T)$. Denne modstrid viser, at $h(M)$ består af ét punkt t.

Da M_t er det største egentlige ideal med $h(M) = \{t\}$, er $M = M_t$.

I det næste bevis får vi brug for det følgende simple topologiske

Lemma: Lad S og T være topologiske rum, $\{G_j \mid j \in J\}$ en mængde af åbne delmængder af S, så at $S \subseteq \bigcup \{G_j \mid j \in J\}$, og f en afbildning: $S \to T$, så at $f_{|G_j}$ er kontinuert, $\forall j \in \mathbb{J}$. f er kontinuert.

Bevis: Lad $s \in S$, $U \in \dot{U}(f(s))$; $V = (f_{|G_j})^{o-1}(U) = f^{o-1}(U) \cap G_j$ er da en omegn af s relativt til G_j og derfor, da G_j er en omegn af s, en omegn af s, og $f(V) \subseteq U$.

Sætning: Lad $\underline{i}$ være et ideal $\subseteq C(T)$. $\underline{i}$ indeholder enhver funktion, der er nul i en omegn af $h(\underline{i})$.

Bevis: Lad $f \in C(T)$, så at $h(\underline{i})$ er indeholdt i den åbne kerne A af $f^{o-1}(0)$, $h(\underline{i}) \subseteq A = \mathring{A} \subseteq \bar{A} \subseteq f^{o-1}(0)$. Vi ved, fra en tidligere sætning, at $\underline{i}$ indeholder en funktion g, så at $g(t) > 0$, $\forall t \in B = T \setminus A$. Idet $D = g^{o-1}(0)$, er A og $T \setminus D$ åbne mængder, og $A \cup (T \setminus D) = T$, da $B \subseteq T \setminus D$. Vi definerer en funktion d ved:

$$d(t) = f(t)[g(t)]^{-1},\ t \in T \setminus D,\ d(t) = 0,\ t \in D.$$

Da er $d_{|A} \equiv 0$, og $d_{|A}$ og $d_{|T\setminus D}$ kontinuerte, derfor $d \in C(T)$; da $f = d \cdot g$, vil $f \in \underline{i}$.

Sætning: Lad $\underline{i}$ være et afsluttet ideal $\subseteq C(T)$. $\underline{i} = k(h(\underline{i}))$.

Bevis: Da $\underline{i} \subseteq k(h(\underline{i}))$, er det nok at vise, at $\underline{i}$ indeholder enhver funktion f, der er nul i ethvert punkt, hvor samtlige funktioner i $\underline{i}$ er nul. Da $\underline{i}$ er afsluttet, er det i følge det foregående nok at vise, at vi til et vilkårligt $\varepsilon > 0$ kan finde en funktion g, der er nul i en omegn af $h(\underline{i})$, og så at $\|f-g\| < \varepsilon$.

*) Sæt $F_1 = \{t \in T \mid |f|(t) \leq \frac{\varepsilon}{2}\}$, $F_2 = \{t \in T \mid |f|(t) \geq \varepsilon\}$; da gælder $h(\underline{i}) \subseteq \mathring{F}_1 \subseteq F_1 = \bar{F}_1 \subseteq T \setminus F_2$. Til de disjunkte afsluttede mængder F_1 og F_2 kan vi finde en funktion $d: T \to [0,1]$, så at $d(t) = 0$, $t \in F_1$, og $d(t) = 1$, $t \in F_2$. Da d er nul i en omegn af $h(\underline{i})$, vil $d \in \underline{i}$, og $g = f \cdot d$ opfylder: $g \in \underline{i}$, $f(t) = g(t)$ for

$t \in F_2$, $|f(t)-g(t)| \leqq \varepsilon|1-d(t)| \leqq \varepsilon$ for $t \in T \setminus F_2$, altså $\|f-g\| \leqq \varepsilon$.

3.4. <u>Sætning</u>: Lad p være en kontinuert homomorfi af C(T) ind i en normeret algebra, og lad p's kerne være idealet $\underline{i}$. p(C(T)) er isomorf med C(h($\underline{i}$)).

Bevis: Da p er kontinuert, er $\underline{i}$ afsluttet. h($\underline{i}$) er en afsluttet delmængde af T, derfor selv et kompakt Hausdorff rum.

Da p(C(T)) er isomorf med C(T) / $\underline{i}$, er det nok at vise, at der eksisterer en homomorfi af C(T) på C(h($\underline{i}$)) med kernen $\underline{i}$

Det er klart, at $f \to f_{|h(\underline{i})}$ definerer en homomorfi af C(T) ind i C(h($\underline{i}$)). Hvis g er kontinuert: h($\underline{i}$) → $\dot{R}$, ∃ a og b ∈ $\dot{R}$, så at g afbilder h($\underline{i}$) ind i [a,b]; der ∃ da en kontinuert afbildning f : T → [a,b], så at $f_{|h(\underline{i})} = g$. Den betragtede homomorfi afbilder altså på C(h($\underline{i}$)). Kernen af homomorfien består netop af alle funktioner, der er nul på h($\underline{i}$), er altså = k(h($\underline{i}$)) = $\underline{i}$, da $\underline{i}$ er afsluttet.

§ 5. Om spektret for en operator.

$a_m \in [-\infty, \infty[$

En talfølge $(a_n)_{n \in \mathring{N}}$ kaldes subadditiv, hvis: $\forall\, n,m \in \mathring{R}\ (a_{n+m} \leqq a_n + a_m)$. idet $(-\infty) + a = a + (-\infty) = -\infty$ for $a \in [-\infty, \infty[$

Lemma: Hvis (a_n) er subadditiv, konvergerer $(n^{-1} a_n)$ mod $\inf\{n^{-1} a_n \mid n \in \mathring{N}\}$.

(Vi udelukker ikke muligheden $\inf\{n^{-1} a_n \mid n \in \mathring{N}\} = -\infty$; i dette tilfælde bliver $n^{-1} a_n$ vilkårligt lille for alle tilstrækkeligt store n).

Bevis: Da (a_n) er subadditiv, er $a_{pn} \leqq p\, a_n$, og $(pn)^{-1} a_{pn} \leqq n^{-1} a_n$ for alle n og $p \in \mathring{N}$. Til $n \in \mathring{N}$ og $\varepsilon > 0$ findes der $m \in \mathring{N}$, så at $\mu^{-1} a_\mu \leqq n^{-1} a_n + \varepsilon$ for $\mu \geqq m$; thi ethvert $\mu \in \mathring{N}$ kan skrives $\mu = pn + r$ med $r \leqq n$ og $p \in \mathring{N}$, og $\mu^{-1} a_\mu \leqq \mu^{-1} a_{pn} + \mu^{-1} a_r \leqq (pn)^{-1} a_{pn} + \mu^{-1} \max\{a_p \mid p = 1,\ldots n\} \leqq n^{-1} a_n + \varepsilon$ for μ tilstrækkelig stor. Heraf og af definitionen af inf følger lemmaet.

Lad nu L være en algebra over $\mathbb{C}$ med ét-element E, og $A \in L$. Spekret for $A = sp(A) = \{\lambda \in \mathring{C} \mid A - \lambda E$ har ingen invers i $L\}$. Hvis L er indeholdt i en større algebra M, kan A's spektrum som element af M godt være en ægte delmængde af A's spektrum som element af L. Spektralnormen af $A = \sup\{|\lambda| \mid \lambda \in sp(A)\}$.

<u>Sætning</u>: For et vilkårligt element A i en Banachalgegra L med ét-element E er $(\|A^n\|^{n^{-1}})$ konvergent med grænseværdien $\inf\{\|A^n\|^{n^{-1}} \mid n \in \mathring{N}\}$, og denne er $\geqq$ spektralnormen af A.

Bevis: Potensrækken $E + t\|A\| + \ldots + t^n\|A^n\| + \ldots$ har konvergensradius r bestemt ved: $r^{-1} = \lim\sup \|A^n\|^{n^{-1}}$; for $|t| < r$ er $(E + tA + \ldots + t^n A^n)$ en fundamental følge, idet $\|\sum_{\nu=n}^{m} t^\nu A^\nu\| \leqq \sum_{\nu=n}^{m} |t|^\nu \|A^\nu\| \to 0$ for $m \geqq n \to \infty$, og har således en grænseværdi

spektralnorm af $A \leq \lim \sqrt[n]{\|A^n\|} \leq \|A\|$

$B(t) = E + tA + \dots$, og $t^n\|A^n\| \to 0$; for $|t| < r$ er $(E-tA)(E+tA +\dots+ t^nA^n) = (E+tA +\dots+ t^nA^n)(E-tA) = E - t^{n+1}A^{n+1}$, og ved grænseovergangen $n \to \infty$ finder vi $(E-tA)B(t) = B(t)(E-tA) = E$, d.v.s. $B(t) = (E-tA)^{-1}$. For $|\lambda| > \frac{1}{r}$ har $A-\lambda E = -\lambda(E-\lambda^{-1}A)$ således den inverse $-\lambda^{-1}B(\lambda^{-1}) = -\lambda^{-1}E - \dots - \lambda^{-n-1}A^n - \dots$; spektralnormen er således $\leqq \lim\sup \|A^n\|^{n^{-1}}$.

Følgen $(\log\|A^n\|)$ er subadditiv, da $\|A^{n+m}\| \leqq \|A^n\|\cdot\|A^m\|$; derfor konvergerer $(n^{-1}\log\|A^n\|)$ mod $\inf\{n^{-1}\log\|A^n\| \mid n \in \mathbb{N}\}$; da log er en monoton og kontinuert bijectiv afbildning af $[-\infty,\infty]$ på $[0,\infty]$, konvergerer også $(\|A^n\|^{n^{-1}})$ mod $\inf\{\|A^n\|^{n^{-1}} \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Bemærkning: Man kan vise, at sp(A) indeholder et tal λ med $|\lambda| = \inf\{\|A^n\|^{n^{-1}} \mid n \in \mathbb{N}\}$, så at sp(A) $\neq \emptyset$ og spektralnormen af $A = \inf\{\|A^n\|^{n^{-1}} \mid n \in \mathbb{N}\}$.

For et nilpotent element A er åbenbart sp(A) $= \{0\}$.

<u>Sætning</u>: Et element A i en Banachalgebra L med ét-element E har kompakt spektrum.

Bevis: Vi har vist, at sp(A) $\subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \leqq \|A\|\}$. Vi vil vise, at $\mathbb{C} \setminus$ sp(A) er åben; lad λ tilhøre denne mængde, d.v.s. antag, at $(A-\lambda E)$ har en invers $(A-\lambda E)^{-1} \in L$; for $B \in L$ med $\|B\| < \|(A-\lambda E)^{-1}\|^{-1}$, og derfor specielt for $B = \mu E$ med $|\mu| < \|(A-\lambda E)^{-1}\|^{-1}\|E\|^{-1}$, er $\|(A-\lambda E)^{-1}B\| \leqq \|(A-\lambda E)^{-1}\|\cdot\|B\| < 1$, så at $1 \notin$ sp$((A-\lambda E)^{-1}B)$ og $E - (A-\lambda E)^{-1}B = (A-\lambda E)^{-1}(A-\lambda E-B)$ er invertibel, og derfor også $(A-\lambda E-B)$. $A-(\lambda+\mu)E$ er altså invertibel, og $\lambda+\mu \notin$ sp(A), for alle tilstrækkeligt små μ.

5.2. Vi betragter nu et Hilbertrum over $\mathbb{C}$ H og Banachalgebraen L(H,H).

Lad A være en (evt. ubegrænset) operator; for $\lambda \in \mathbb{C} \setminus$ sp(A) og $B \in L$ med $\|B\| < \|(A-\lambda E)^{-1}\|^{-1}$ er $(E-B(A-\lambda E)^{-1})^{-1} \in L$, og

$(A-\lambda E)^{-1}(E-B(A-\lambda E)^{-1})^{-1} = ((E-B(A-\lambda E)^{-1}(A-\lambda E))^{-1} = (A-\lambda E-B)^{-1} \in$ L, så at $\lambda \notin sp(A-B)$, og så at $\lambda+\mu \notin sp(A)$ for $|\mu| < \|(A-\lambda E)^{-1}\|^{-1}$; også for en ubegrænset operator er spekret således en afsluttet (men ikke nødvendigvis begrænset) delmængde af $\grave{C}$.

Hvis A er begrænset, d.v.s.: $\exists\, k \in \grave{R}\ \forall\ v \in D(A)(\|Av\| \leqq k\ \|v\|)$, så har A en afslutning $\bar{A}$, og $D(\bar{A}) = \overline{D(A)}$; thi hvis en følge (x_n) af elementer i D(A) konvergerer mod 0, vil også $Ax_n \to 0$, så at A kan afsluttes, og hvis $x_n \to y \in \overline{D(A)}$, er (Ax_n) en fundamentalfølge, og derfor konvergent, så at $y \in D(\bar{A})$.

For en vilkårlig tæt defineret operator A er $[AD(A)]^{\perp} = A^{*\circ -1}(0)$; thi for $v \in H$ er $(Au|v) = 0$ for alle $u \in D(A)$, hvis og kun hvis $v \in D(A^*)$ og $A^*v = 0$

<u>Sætning</u>: Lad S være en tæt defineret, symmetrisk, afsluttet operator.

1) For $\lambda \in \grave{C} \setminus \grave{R}$ og $v \in D(S)$ er $\|(S-\lambda E)v\| \geqq |Im(\lambda)| \cdot \|v\|$; $S-\lambda E$ er injectiv, $(S-\lambda E)^{-1}$ er begrænset og afsluttet, og $D((S-\lambda E)^{-1}) = (S-\lambda E)D(S) = \left[(S^*-\bar{\lambda}E)^{\circ -1}(0)\right]^{\perp}$ $\lambda \in sp(S)$, hvis og kun $\bar{\lambda}$ er egenværdi for S^*.

2) S er selvadjungeret, hvis og kun hvis $sp(S) \subseteqq \grave{R}$, og hvis og kun hvis der eksisterer $\lambda \in \grave{C} \setminus \grave{R}$, så at $S^*-\lambda E$ og $S^*-\bar{\lambda}E$ er injective, d.v.s. så at hverken λ eller $\bar{\lambda}$ er egenværdi for S^*.

Bevis: Sæt $\lambda = \alpha + i\beta, \alpha, \beta \in \grave{R}$, $\beta \neq 0$; for $v \in D(S)$ er $\|(S-\lambda E)v\|^2 = ((S-\alpha E-i\beta E)v \mid (S-\alpha E-i\beta E)v) = \|(S-\alpha E)v\|^2 + i\beta((S-\alpha E)v|v) - i\beta(v|(S-\alpha E)v) + |\beta|^2\|v\|^2 \geqq |\beta|^2\|v\|^2$, da $((S-\alpha E)v|v) = (v|(S-\alpha E)v)$; heraf følger straks, at $(S-\lambda E)^{-1}$ er defineret og begrænset; $(S-\lambda E)^{-1}$ er afsluttet, da S er afsluttet; derfor er $D((S-\lambda E)^{-1}) = (S-\lambda E)D(S)$ afsluttet, så at $(S-\lambda E)D(S) = [(S-\lambda E)D(S)]^{\perp\perp} =$

$\left[(S-\lambda E)^{*\circ -1}(0)\right]^{\perp} = \left[(S^*-\bar{\lambda}E)^{\circ -1}(0)\right]^{\perp}$. $\lambda \notin sp(S)$, hvis og kun hvis $D((S-\lambda E)^{-1}) = H$, derfor hvis og kun hvis $(S^* - \bar{\lambda}E)^{\circ -1}(0) = \{0\}$, d.v.s. hvis og kun hvis $\bar{\lambda}$ ikke er egenværdi for S^*.

Da $S \subseteq S^*$ er $(S-\lambda E) \subseteq (S^*-\lambda E)$; hvis $\bar{\lambda} \notin sp(S)$, er $S^*-\lambda E$ injectiv, og $(S-\lambda E)^{-1} \subseteq (S^*-\lambda E)^{-1}$; hvis også $\lambda \notin sp(S)$, d.v.s. hvis også $S^*-\bar{\lambda}E$ er injektiv, er $D((S-\lambda E)^{-1}) = H$, så at $(S-\lambda E)^{-1} = (S^*-\lambda E)^{-1}$ og $S = S^*$. Betingelserne er åbenbart opfyldt for ethvert $\lambda \in \dot{C} \setminus \dot{R}$, hvis $sp(S) \subseteq \dot{R}$.

Hvis S er selvadjungeret, er $S^*-\lambda E = S-\lambda E$ injectiv for ethvert $\lambda \notin \dot{R}$, og derfor $\lambda \notin sp(S)$.

5.3. Lad nu H være rummet $L^2(\dot{R},\dot{C})$ af kvadratisk integrable komplekse funktioner på $\dot{R}$, og lad en operator Λ være defineret ved: $D(\Lambda) = \{f \in H \mid \int |tf(t)|^2 dt < \infty\}$, $(\Lambda f)(t) = t\cdot f(t)$; Λ er veldefineret, idet funktionerne $t \to tf(t)$ og $t \to tg(t)$ er ens n.o. (næsten overalt), hvis f og g er ens n.o.. Vi vil vise, at Λ er en selvadjungeret operator med $sp(\Lambda) = \dot{R}$ og uden egenværdier.

Λ er tæt defineret, da enhver funktion i H med kompakt støtte tilhører $D(\Lambda)$. Desuden er Λ symmetrisk; thi for f og $g \in D(\Lambda)$ er $(\Lambda f|g) = \int tf(t)\overline{g(t)}dt = \int f(t)\overline{tg(t)}dt = (f|\Lambda g)$. Hvis $g \in D(\Lambda^*)$ findes der $h \in H$, så at $\int tf(t)\overline{g(t)}dt = \int f(t)\overline{h(t)}dt$ for ethvert $f \in D(\Lambda)$; vi sætter specielt $f(t) = 1_I(t)(tg(t)-h(t))$, hvor I er et vilkårligt kompakt interval; f har kompakt støtte og $\in D(\Lambda)$, og vi finder $\int 1_I(t)|tg(t)-h(t)|^2 dt = 0$, så at $tg(t) = h(t)$ n.o. i I og derfor n.o.. Dette viser, at $g \in D(\Lambda)$. Λ er således selvadjungeret.

Λ har ingen egenværdier; thi hvis $\Lambda f = \lambda f$ er $(t-\lambda)f(t) = 0$ n.o. og $f(t) = 0$ n.o. i $\dot{R} \setminus \{\lambda\}$ og dermed n.o..

For $\lambda \in \dot{R}$ er $\Lambda-\lambda E$ ikke surjectiv, idet man let ser, at $(\Lambda-\lambda E)D(\Lambda)$ ikke kan indeholde nogen funktion, der er 1 i en omegn af λ, da $t \to |t-\lambda|^{-2} \notin L^1$. Derfor er $sp(\Lambda) = \dot{R}$.

§6. Kontinuerte funktioner af en selvadjungeret operator.

Vi betragter begrænsede eller ubegrænsede operatorer på et komplekst Hilbertrum H.

For addition og multiplikation gælder de associative love: $(A + B) + C = A + (B + C)$ og $(AB)C = A(BC)$ (jfr. øv.), potenser er således veldefinerede, og vi ser, at $H = D(A^0) \supsetneqq D(A) \supsetneqq D(A^2) \supsetneqq \dots$, idet vi sætter $A^0 = E$.

For et polynomium $P = \alpha_n X^n + \dots + \alpha_0$, $\alpha_0, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$, $\alpha_n \neq 0$, sætter vi $P(A) = \alpha_n A^n + \dots + \alpha_0 E$; $D(P(A)) = D(A^n) \cap \dots \cap H = D(A^n)$; ved hjælp af de distributive love $(A + B)C = AC + BC$ og $A(B + C) \supsetneqq AB + AC$ finder vi, at $(PQ)(A) \subsetneqq P(A)Q(A)$ og $(P + Q)(A) \supsetneqq P(A) + Q(A)$; f.eks. er $A - A = 0|D(A) \subsetneqq 0 = (X - X)(A)$.

Vi beviser nu, at $(PQ)(A) = P(A) \cdot Q(A)$.

Da $v \in D(A(A^n - \gamma A^{n-1})) \iff v \in D(A^n - \gamma A^{n-1}) = D(A^n) \wedge A^n v - \gamma A^{n-1} v \in D(A) \iff v \in D(A^{n-1}) \wedge A^{n-1} v \in D(A) \wedge A^n v = (A^n v - \gamma A^{n-1} v) + \gamma A^{n-1} v \in D(A) \iff v \in D(A^{n+1}) = D(A^{n+1} - \gamma A^n)$, hvor $\gamma \in \mathbb{C}$, er $A(A^n - \gamma A^{n-1}) = A^{n+1} - \gamma A^n$; derfor er også $A^n(A - \gamma E) = A^{n-1}(A^2 - \gamma A) = \dots = A^{n+1} - \gamma A^n$. For $P = \alpha_n X^n + \dots + \alpha_0 = \alpha_n (X - \gamma_1) \dots (X - \gamma_n)$, $\alpha_0, \dots, \alpha_n, \gamma_1, \dots, \gamma_n \in \mathbb{C}$, $\alpha_n \neq 0$, gælder: $\alpha_n (A - \gamma_1 E) \dots (A - \gamma_n E) = \alpha_n A(A - \gamma_2 E) \dots (A - \gamma_n E) - \alpha_n \gamma_1 (A - \gamma_2 E) \dots (A - \gamma_n E) = (\alpha_n A^2 - \alpha_n \gamma_2 A) \dots (A - \gamma_n E) - (\alpha_n \gamma_1 A - \alpha_n \gamma_1 \gamma_2 E) \dots (A - \gamma_n E) = \alpha_n A^2 (A \dots = \dots = \alpha_n A^n + \dots + \alpha_0 E = P(A)$. For to polynomier P og Q finder vi ved opløsning i førstegradsfaktorer, at $(PQ)(A) = P(A)Q(A)$.

Hvis $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in \mathbb{C} \setminus sp(A)$, er $P(A)$ injectiv, og $P(A)^{-1} = \alpha_n^{-1} (A - \gamma_n E)^{-1} \dots (A - \gamma_1 E)^{-1} \in L$; specielt ses, at alle operatorer $(A - \gamma E)^{-1}$, $\gamma \notin sp(A)$, kommuterer; da $(\alpha_1 A - \alpha_0 E)(A - \gamma E)^{-1} = (\alpha_1 A - \alpha_1 \gamma E + (\alpha_1 \gamma - \alpha_0) E)(A - \gamma E)^{-1} = \alpha_1 (A - \gamma E)(A - \gamma E)^{-1} + (\alpha_1 \gamma - \alpha_0)$

$(A-\gamma E)^{-1} = \alpha_1 E + (\alpha_1\gamma - \alpha_o)(A-\gamma E)^{-1} \in L$, kommuterer også alle operatorer af denne form. indbyrdes og med operatorerne $(A-\gamma E)^{-1}$

For en rational funktion R, skrevet som en brøk PQ^{-1}, hvor Q ikke har nulpunkter i sp(A) og graden af P er $\leqq$ graden af Q, sætter vi $R(A) = P(A)Q(A)^{-1}$; R(A) er veldefineret, thi hvis Q_1 er et polynomium uden nulpunkter i sp(A), er $(PQ_1)(A)[(QQ_1)(A)]^{-1} = P(A)Q_1(A)Q_1(A)^{-1}Q(A)^{-1} = P(A)Q(A)^{-1}$. $R(A) \in L$, da R(A) kan omskrives til et produkt af kommuterende faktorer af formen $(\alpha_1 A - \alpha_o E)(A-\gamma E)^{-1}$ (!!), $\gamma \notin sp(A)$. For $R = PQ^{-1}$ og $R_1 = P_1 Q_1^{-1}$ af denne form er også $RR_1 = (PP_1)(QQ_1)^{-1}$ og $R + R_1 = (PQ_1 + P_1 Q)(QQ_1)^{-1}$ af samme form, og $(RR_1)(A) = (PP_1)(A)[(QQ_1)(A)]^{-1} = P(A)P_1(A)Q_1(A)^{-1}Q(A)^{-1}$ NB $= P(A)Q(A)^{-1}P_1(A)Q_1(A)^{-1} = R(A)R_1(A)$, og $(R+R_1)(A) = (PQ_1+P_1Q)(A)[(QQ_1)(A)]^{-1} \supseteq [(PQ_1)(A)+(P_1Q)(A)]Q_1(A)^{-1}Q(A)^{-1} = P(A)Q_1(A)Q_1(A)^{-1}Q(A)^{-1} + P_1(A)Q(A)Q_1(A)^{-1}Q(A)^{-1} = P(A)Q(A)^{-1} + P_1(A)Q_1(A)^{-1} = R(A)+R_1(A)$; da både $(R+R_1)(A)$ og $R(A)+R_1(A)$ er overalt definerede, er $(R+R_1)(A) = R(A)+R_1(A)$. Afbildningen $R \to R(A)$ er således en homomomorfi af en vis delalgebra af kvotientlegemet for ringen $\mathbb{C}[X]$ af komplekse polynomier ind i L(H,H).

* For $R = PQ^{-1}$ sætter vi $R^* = P^* Q^{-1*}$ (jfr. III,2,7); $R \to R^*$ er en veldefineret konjugeret lineær, multiplikativ, bijectiv afbildning; for $z \in \mathbb{C}$ er $R^*(z) = \overline{R(\overline{z})}$.

Vi antager, at A er tæt defineret. For $\gamma \notin sp(A)$ er $(A-\gamma E)^{-1*}$ og $(A-\gamma E)^* = (A^* - \overline{\gamma}E)$ defineret; derfor er også $(A^*-\overline{\gamma}E)^{-1}$ defineret og $= (A-\gamma E)^{-1*} \in L$, så at $\overline{\gamma} \notin sp(A^*)$; d.v.s. $sp(A^*) \subseteq \overline{sp(A)}$ ($\overline{}$ angiver her konjugering); hvis også A er afsluttet, er $A = A^{**}$ og $sp(A^*) = \overline{sp(A)}$.

For $\alpha_1, \alpha_o, \gamma \in \mathbb{C}$, $\gamma \notin sp(A)$, er $[(\alpha_1 A - \alpha_o E)(A-\gamma E)^{-1}]^* = [\alpha_1 E + (\alpha_1\gamma - \alpha_o)(A-\gamma E)^{-1}]^* = \overline{\alpha}_1 E + (\overline{\alpha}_1\overline{\gamma} - \overline{\alpha}_o)(A^* - \overline{\gamma}E)^{-1} =$

$(\bar{\alpha}_1 A^* - \bar{\alpha}_0 E)(A^* - \bar{\gamma} E)^{-1}$; for rationale funktioner af den form, vi betragter, er derfor $R(A)^* = R^*(A^*)$.

6.2. Lad F være en delmængde af Riemannkuglen $\grave{C}_\infty$, og lad os som ovenfor betragte delalgebraen af kvotientlegemet for $\grave{C}[X]$ af de elementer R, der kan skrives PQ^{-1} med Q uden nulpunkter i F og P af højst samme grad som Q. Til R i denne algebra lader vi svare funktionen $R_F = P_F(Q_F)^{-1} \in C(F, \grave{C}_\infty)$ (jfr. § 2); $R \to R_F$ er en veldefineret homomorfi på en delalgebra $\mathcal{R}_F \subseteq C(F, \grave{C}_\infty)$, og er injectiv, hvis og kun hvis F indeholder uendelig mange punkter. Hvis $F \subseteq \grave{R}_\infty$, gælder for $t \in F$: $R^*(t) = \overline{R(t)} = \bar{R}(t)$, d.v.s. $R^*_F = \overline{R_F}$.

I det følgende afsnit vil vi, af bekvemmelighedsgrunde, ikke skrive indeks $\grave{R}_\infty$, d.v.s. vi sætter $R_{\grave{R}_\infty} = R$.

Vi betragter nu en selvadjungeret operator A. Vi ved da, at $sp(A) \subseteq \grave{R}$, og vi har derfor en homomorfi $R \to R(A)$ af delalgebraen $\mathcal{R} \subseteq C(\grave{R}_\infty, \grave{C})$ ind i $L(H,H)$, så at $R(A)^* = R^*(A^*) = \bar{R}(A)$.

Denne homomorfi fører en funktion $R \geq 0$ i en operator $R(A) \geq 0$; thi hvis $R(t) = P(t)Q(t)^{-1} \geq 0$ for alle $t \in \grave{R}$, er også $P\bar{Q}(t) \geq 0$ for alle $t \in \grave{R}$; $P\bar{Q}$ har da reelle koefficienter (disse kan jo f.eks. bestemmes ved hjælp af differentiationer, jfr. Taylors formel), ikke-reelle nulpunkter for $P\bar{Q}$ optræder kun i par af konjugerede med samme multiplicitet, og reelle nulpunkter kun med lige multiplicitet; d.v.s. der findes et polynomium P_1, så at $P\bar{Q} = \bar{P}_1 P_1$; derfor er $R(A) = \overline{(P_1 Q^{-1})}(P_1 Q^{-1})(A) = [(P_1 Q^{-1})(A)]^* (P_1 Q^{-1})(A) \geq 0$. $= PQ^{-1}|Q|^2$

Lemma: For $B \in L(H,H)$ er $\|B\| = \inf\{\lambda \geq 0 \mid B^*B \leq \lambda^2 E\}$.

Bevis: For $\lambda \geq 0$ gælder: $B^*B \leq \lambda^2 E \iff \forall f \in H[(B^*Bf|f) \leq \lambda^2(f|f)] \iff \forall f \in H[\|Bf\| \leq \lambda \|f\|] \iff \|B\| \leq \lambda$.

Heraf følger det straks, at vor homomorfi er normformindskende; thi for $R \in \mathcal{R}$ er $\bar{R}R \leqq \|R\|^2 \cdot 1$, derfor $0 \leqq \|R\|^2 E - \bar{R}R(A) = \|R\|^2 E - R(A)^* R(A)$, så at $\|R(A)\| \leqq \|R\|$.

Den reelle delalgebra af de reelle funktioner i $\mathcal{R}$ indeholder 1 og adskiller punkterne i $\grave{R}_\infty$; f.eks. er for $a \in \grave{R}$ funktionen $t \to (t-a)^2(t^2+1)^{-1}$ kun 0 for $t = a$. Ifølge Stone-Weierstrass' sætning er således $\mathcal{R}$ tæt i $C(\grave{R}_\infty, \grave{C})$ (jfr. § 4).

Da også $L(H,H)$ er et fuldstændigt rum, kan den kontinuerte homomorfi $R \to R(A)$ på én måde udvides til en kontinuert afbildning $p_1: C(\grave{R}_\infty, \grave{C}) \to L(H,H)$ (jfr. I,2,5). p_1 er lineær, og man viser let, at p_1 er multiplikativ og fører konjugeret funktion i

* adjungeret operator (for $f \in \mathcal{R}$ er $\{ g \in C(\grave{R}_\infty, \grave{C}) \mid p_1(fg) - p_1(f) p_1(g) = 0 \}$ og $\{ g \in C(\grave{R}_\infty, \grave{C}) \mid p_1(g)^* - p_1(\bar{g}) = 0 \}$ afsluttede og indeholder $\mathcal{R}$ og dermed $C(\grave{R}_\infty, \grave{C})$, o.s.v.), og at p_1 er normformindskende (idet $p_1(\{g \in C(\grave{R}_\infty, \grave{C}) \mid \|g\| \leqq 1\}) = p_1(\overline{\{g \in \mathcal{R} \mid \|g\| \leqq 1\}}) \subseteq \overline{p_1(\{g \in \mathcal{R} \mid \|g\| \leqq 1\})} \subseteq \{B \in L(H,H) \mid \|A\| \leqq 1\}$; eller fordi $g \geqq 0 \Rightarrow p(g) = p(g^{\frac{1}{2}})^2 \geqq 0$).

Der findes derfor en kompakt delmængde $\sigma(A) = h(p_1^{o-1}(0))$ af $\grave{R}_\infty$ og en *isomorfi p af $C(\sigma(A), \grave{C})$ ind i $L(H,H)$, så at $p(f|\sigma(A)) = p_1(f)$ for enhver funktion $f \in C(\grave{R}_\infty, \grave{C})$, og derfor specielt $p(R_{\sigma(A)}) = R(A)$ for $R \in \mathcal{R}$ (jfr. §3).

6.3. Lad der være givet et kompakt Hausdorffrum T og en *isomorfi p af $C(T, \grave{C})$ ind i $L(H,H)$, for hvilken $p(1) = E$.

<u>Sætning</u>: For $f \in C(T, \grave{C})$ er $p(f)$ selvadjungeret, hvis og kun hvis f er reel, og $p(f) \geqq 0$, hvis og kun hvis $f \geqq 0$. p er en isometri og afbilder på en afsluttet kommutativ algebra af normale operatorer.

Bevis: f er reel, hvis og kun hvis $f - \bar{f} = 0$, altså hvis og kun hvis $0 = p(f - \bar{f}) = p(f) - p(f)^*$, d.v.s. $p(f)$ selvadjungeret. Hvis $f \geqq 0$, er $f^{\frac{1}{2}} \in C(T, \grave{C})$, og $p(f) = p(f^{\frac{1}{2}})^2 \geqq 0$. Hvis $p(f) \geqq 0$, er f reel; vi antager, at f ikke er $\geqq 0$, altså at $f^- = -(f \wedge 0) \neq 0$;

derfor er $o \neq -(f^-)^3 = f(f^-)^2 \leqq 0$, og $0 \neq p(f^-)p(f)p(f^-) \leqq 0$, i modstrid med antagelsen $p(f) \geqq 0$.

For $\lambda \geqq 0$ gælder : $\|f\| \leqq \lambda \iff \bar{f}f \leqq \lambda^2 1 \iff p(f)^*p(f) \leqq \lambda^2 E \iff \|p(f)\| \leqq \lambda$; derfor er $\|f\| = \|p(f)\|$. Da $C(T,\grave{C})$ er et fuldstændigt rum, og p er en isometri, er billedalgebraen fuldstændig og derfor afsluttet; da $C(T,\grave{C})$ er kommutativ, er billedalgebraen også kommunativ, og må derfor bestå af normale operatorer.

<u>Sætning</u>: For $f \in C(T,\grave{C})$ falder spektret for $p(f)$ sammen med værdimængden for f.

Bevis: Hvis $\lambda \notin f(T)$, vil $(f - \lambda)^{-1} \in C(T,\grave{C})$, og $p((f - \lambda)^{-1})$ er en invers i $L(H,H)$ til $p(f) - \lambda E$.

Hvis $\lambda \in f(T)$, har $p(f) - \lambda E$ selvfølgelig ingen invers i $p(C(T,\grave{C}))$, men på forhånd kunne det tænkes, at $p(f) - \lambda E$ havde en invers i $L(H,H)$. Vi kan finde en følge (φ_n) af funktioner i $C(T,\grave{C})$, så at $\|\varphi_n\| = 1$ og $\|\varphi_n(f - \lambda)\| \to 0$ for $n \to \infty$; f.eks. kan vi vælge $\varphi_n = (1 - n|f - \lambda|) \vee 0$, idet: $0 \leqq \varphi_n \leq 1$, φ_n antager værdien 1, da f antager værdien λ, og $\|\varphi_n(f - \lambda)\| \leqq \sup \{|t|[(1 - n|t|) \vee 0] \mid t \in \grave{R}\} \to 0$ for $n \to \infty$. Derfor er også $\|p(\varphi_n)\| = 1$ og $(p(f) - \lambda E)\, p(\varphi_n) \to 0$ ($p(f) - \lambda E$ er en "topologisk nuldivisor"). Hvis $p(f) - \lambda E$ havde en invers $B \in L(H,H)$, ville også $p(\varphi_n) = B(p(f) - \lambda E)p(\varphi_n) \to 0$, i modstrid med at $\|p(\varphi_n)\| = 1$.

<u>Sætning</u>: Hvis $p(f)$ er injectiv, har $f^{o-1}(0)$ ikke indre punkter.

Bevis: Hvis $G = f^{o-1}(0)$ har et indre punkt λ, findes der i følge Urysohns lemma en funktion $g \in C(T,[0,1])$, så at $g(\lambda) = 1$ og $g(t) = 0$ for $t \notin \mathring{F}$; for en vilkårlig vektor $\neq 0$ af form $p(g)x$ er $p(f)p(g)x = p(fg)x = 0$.

6.4. Ved kombination af resultaterne i afsnit 2 og 3 finder vi

<u>Sætning</u>: Til en selvadjungeret operator A på et Hilbertrum H findes der en kompakt mængde $\sigma(A) \subseteq \grave{R}_\infty$ og en isometri og *iso-

morfi p af $C(\sigma(A),\dot{C})$ på den mindste afsluttede delalgebra af $L(H,H)$, der indeholder E og alle operatorer $(A - \lambda E)^{-1}$, $\lambda \in \dot{C}\setminus\dot{R}$. $p(R_{\sigma(A)}) = R(A)$ for alle $R \in \mathcal{R}$. For $f \in C(\sigma(A),\dot{C})$ er $sp(p(f)) = f(\sigma(A))$.

Enhver begrænset operator, der kommuterer med A, kommuterer med enhver operator i $p(C(\sigma(A),\dot{C}))$.

Bevis: Hvis $B \in L(H,H)$ kommuterer med A, kommuterer B også med $A - \lambda E$ og med $(A - \lambda E)^{-1}$ for vilkårligt $\lambda \in \dot{C}\setminus\dot{R}$. Da $\{C \in L(H,H) \mid BC = CB\}$ er en afsluttet algebra, kommuterer B også med enhver operator i $p(C(\sigma(A),\dot{C}))$.

<u>Sætning</u>: ∞ kan ikke være et isoleret punkt i $\sigma(A)$. A er begrænset, hvis og kun hvis $\infty \notin \sigma(A)$. I dette tilfælde er $sp(A) = \sigma(A)$, og $p(R_{\sigma(A)}) = P(A)Q(A)^{-1}$ for alle rationale funktioner $R = PQ^{-1}$ med $R_{\sigma(A)} \in C(\sigma(A),\dot{C})$.

Bevis: Da $(A - iE)^{-1}$ er injektiv, og funktionen $t \to (t - i)^{-1}$ er 0 netop for $t = \infty$, kan $\{\infty\}$ ikke være en åben delmængde af $\sigma(A)$, d.v.s. ∞ kan ikke være et isoleret punkt i $\sigma(A)$. $\infty \notin \sigma(A) \iff$ funktionen $t \to (t - i)^{-1}$ antager ikke værdien 0 for noget $t \in \sigma(A) \iff 0 \notin sp((A - iE)^{-1}) \iff ((A - iE)^{-1})^{-1} = (A - iE) \in L(H,H) \iff A \in L(H,H) \iff A$ er begrænset da A er tæt defineret og afsluttet.

I dette tilfælde finder vi for polynomiet X, at $X_{\sigma(A)} \in C(\sigma(A),\dot{C})$, og $p((X - i)_{\sigma(A)}) = [(A - iE)^{-1}]^{-1} = A - iE$, $p(X) = A$. Derfor er også $p(P_{\sigma(A)}) = P(A)$ for et vilkårligt polynomium, og for et polynomium Q uden nulpunkter i $\sigma(A)$ er $p((Q_{\sigma(A)})^{-1}) = Q(A)^{-1}$; for en rational funktion $R = PQ^{-1}$, for hvilken $R_{\sigma(A)} \in C(\sigma(A),\dot{C})$, er derfor $p(R_{\sigma(A)}) = P(A)Q(A)^{-1}$.

Da $X_{\sigma(A)}$ har værdimængden $\sigma(A)$, er $sp(A) = \sigma(A)$. ▮

Vi vil nu for $A \in L(H,H)$ og $f \in C(\sigma(A),\dot{C})$ sætte $p(f) = f(A)$. For rationale funktioner $R = PQ^{-1}$ med $R_{\sigma(A)} \in C(\sigma(A),\dot{C})$, d.v.s. med Q uden nulpunkter i $\sigma(A)$, sætter vi $R(A) = P(A)Q(A)^{-1}$ og dermed $R(A) = p(R_{\sigma(A)}) = R_{\sigma(A)}(A)$, i overensstemmelse med den tidligere definition af $R(A)$ i de specielle tilfælde, hvor også P har højst samme grad Q.

Sæt nu $\alpha = \inf \{(Ax|x) \mid x \in H, \|x\| = 1\} = \sup \{\lambda \in \mathring{R} \mid A \geqq \lambda E\}$ og $\beta = \sup \{(Ax|x) \mid x \in H, \|x\| = 1\} = \inf \{\lambda \in \mathring{R} \mid A \leqq \lambda E\}$. Vi har tidligere vist, at $-\|A\| \leqq \alpha \leqq \beta \leqq \|A\|$. Hvis $\alpha = \beta$, er $(Ax|x) = \alpha(x|x)$ for alle x, derfor $(Ax|y) = \sum_{\nu=0}^{3} i^{\nu}(A(x + i^{\nu}y)|x + i^{\nu}y) = \sum_{\nu=0}^{3} i^{\nu}\alpha(x + i^{\nu}y|x + i^{\nu}y) = \alpha(x|y)$ for alle x og y, og $A = \alpha E$; da $\alpha E - \lambda E$ har en invers i $L(H,H)$, hvis og kun hvis $\lambda \neq \alpha$, er $\sigma(A) = \{\alpha\}$. Vi antager nu, at $\alpha < \beta$; for $c \in]\alpha,\beta[$ er hverken $A - cE$ eller $cE - A \geqq 0$; derfor er hverken $t - c$ eller $c - t \geqq 0$ for alle $t \in \sigma(A)$, d.v.s. $\sigma(A) \cap]-\infty,c[\neq \emptyset$ og $\sigma(A) \cap]c, \infty[\neq \emptyset$; på den anden side er $\sigma(A) \cap]-\infty, \alpha[= \emptyset$ og $\sigma(A) \cap]\beta, \infty[= \emptyset$, da $A - \alpha E$ og $\beta E - A \geqq 0$. I begge tilfældende finder vi, at $\{\alpha,\beta\} \subseteqq \sigma(A) \subseteqq [\alpha,\beta]$. Heraf følger, at $\|A\| =$ da $p(t) = A$. $\sup \{|t| \mid t \in \sigma(A)\} = \max \{|\alpha|, |\beta|\} = \sup \{|(Ax|x)| \mid x \in H, \|x\| = 1\}$.

Hvis $A \geqq 0$, er $\sigma(A) \subseteqq [0,\|A\|]$, og funktionen $t \to t^{\frac{1}{2}}$ på $\sigma(A)$ tilhører $C(\sigma(A),\mathring{R})$. Dette viser, at en positiv begrænset operator har en positiv begrænset kvadratrod, der kommuterer med enhver operator $\in L(H,H)$, der kommuterer med A. Denne sætning, der også kan bevises mere direkte (se f.eks. i bogen af F.Riesz og B. Sz-Nagy) bruges i nogle fremstillinger som grundlag for beviser for isomorfisætningen. Den medfører umiddelbart:

Produktet af to kommuterende positive operatorer er positivt.

Thi hvis $AB = BA$ og $A \geqq 0$ og $B \geqq 0$, så er $AB = A^{\frac{1}{2}}BA^{\frac{1}{2}} \geqq 0$

6.5. Lad os nu igen antage, at vi har givet et kompakt Hausdorffrum T og en * isomorfi p af $C(T,\mathring{C})$ ind i $L(H,H)$. for hvilken $p(1) = E$

Vi vil sige, at en afsluttet mængde $S \subseteqq T$ har spektralmålet 0 (m.h.t. til p), hvis:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \forall x \in H \; \exists f \in C(T,[0,\infty[)[f|S \geqq 1|S \wedge (p(f)x|x) < \varepsilon].$$

Hvis en funktion $f \in C(T,[0,\infty[)$ er $\geqq 1$ på S og har $(p(f)x|x) < \varepsilon$, vil $(f + \varepsilon) \wedge 1 \in C(T,[0,1])$ og være $= 1$ i en omegn af S, og $(p((f + \varepsilon) \wedge 1)\, x|x) \leqq ((p(f) + \varepsilon E)\, x|x) = (p(f)x|x) + \varepsilon(x|x) < \varepsilon(1 + \|x\|^2)$.

En afsluttet mængde $S \subseteqq T$ har derfor spektralmålet 0, hvis og kun hvis:

$\forall \varepsilon > 0\ \forall x \in H\ \exists f \in C(T,[0,1])\ [(p(f)x|x) < \varepsilon \wedge f = 1$ i en omegn af $S]$.

En afsluttet mængde S med indre punkter kan ikke have spektralmålet 0; thi til $s \in \mathring{S}$ kan vi, i følge Urysohns lemma, vælge en funktion $g \in C(T,[0,1])$, så at $g(s) = 1$ og $g|T\setminus\mathring{S} = 0|T\setminus\mathring{S}$; da $p(g) \neq 0$ kan vi vælge $x \in H$, så at $(p(g)x|x) > 0$; til dette x og $\varepsilon = (p(g)x|x)$ kan vi da ikke finde $f \in C(T,[0,1])$, så at $f|S \geqq 1|S$ og $(p(f)x|x) < \varepsilon$; thi $f \geqq g$ og derfor $(p(f)x|x) \geqq \varepsilon$.

Hvis to afsluttede mængder S_1 og S_2 begge har spektramålet 0, har også den afsluttede mængde $S_1 \cup S_2$ spektralmålet 0; thi dersom f_1 og $f_2 \in C(T,[0,\infty[)$ for $\varepsilon > 0$ og $x \in H$ er bestemt, så at f_i er $\geqq 1$ på S_i og $(p(f_i)x|x) < \varepsilon$, $i = 1,2$, så vil $f_1 + f_2 \in C(T,[0,\infty[)$ være $\geqq 1$ på $S_1 \cup S_2$ og $(p(f_1 + f_2)x|x) < 2\varepsilon$.

Vi lader nu S være en afsluttet mængde med spektralmålet 0.

Lad os for $f \in C(T,[0,1])$ sætte $G(f) = \{g \in C(T,[0,1]) \mid g \geqq f$, og g er nul i en omegn af $S\}$, og $\mathcal{G}(S) = \{G(f) \mid f \in C(T,[0,1]) \wedge f$ er nul i en omegn af $S\}$.

$\mathcal{G}(S)$ er en filterbasis, da $f_i \in C(T,[0,1]) \wedge f_i = 0$ i en omegn U_i af S, $i = 1,2$, medfører $f_1 \vee f_2 \in C(T,[0,1])$ og $f_1 \vee f_2 = 0$ i omegnen $U_1 \cap U_2$ af S, og $G(f_1 \vee f_2) \subseteqq G(f_1) \cap G(f_2)$.

For $x \in H$ vil $p(g)x \to x$ gennem $\mathcal{G}(S)$, d.v.s. filterbasen $p(\mathcal{G}(S))x$ konvergerer mod x; thi til $\varepsilon > 0$ og x kan vi finde $f \in C(T,[0,1])$, så at f er 1 i en omegn af S og $(p(f)x|x) < \varepsilon$; $1 - f^{\frac{1}{2}} \in C(T,[0,1])$ og er 0 i en omegn af S, og for $g \in G(1 - f^{\frac{1}{2}}) \in \mathcal{G}(S)$ er $1 \geqq g \geqq 1 - f^{\frac{1}{2}}$ og $(1 - g)^2 \leqq f$, så at $\|x - p(g)x\|^2 = (p((1 - g)^2)x|x) \leqq (p(f)x|x) < \varepsilon$; $p(G(1 - f^{\frac{1}{2}}))x$ er altså indeholdt i omegnen $\{y \in H \mid \|y - x\|^2 < \varepsilon\}$ af x.

Lad nu h være en vilkårlig kontinuert afbildning af $T \setminus S$ ind i $\mathbb{C}$. For en funktion $f \in C(T,\mathbb{C})$ kan der højst eksistere én funktion $g \in C(T,\mathbb{C})$, så at $g|T\setminus S = (f|T\setminus S)\cdot h$, da S ikke har indre punkter; vi vil tillade os, dersom et sådant g eksisterer, at sige at fh er kontinuert, og at skrive $p(fh)$ i stedet for $p(g)$. $\{f \in C(T,\mathbb{C}) \mid fh \text{ er kontinuert}\}$ er åbenbart et ideal i $C(T,\mathbb{C})$, og indeholder enhver funktion i $C(T,\mathbb{C})$, der er nul i en omegn af S; thi hvis f er nul i en omegn U af S, er funktionen g, defineret ved: $g(t) = 0$ for $t \in S$, $g(t) = f(t)h(t)$ for $t \in T\setminus S$, kontinuert, da $g|T\setminus S$ og $g|U = 0|U$ er kontinuerte og T er foreningsmængden af de åbne mængder U og $T\setminus S$.

Vi vælger nu en filterbasis $\mathcal{G}$ på $C(T,[0,1])$ med egenskaberne: for ethvert $x \in H$ konvergerer $p(\mathcal{G})x$ mod x, og: $\mathcal{G}$ består af mængder af funktioner g, for hvilke gh er kontinuert. $\mathcal{G}$ kan f.eks. være $\mathcal{G}(S)$.

Vi definerer en operator $q(h)$ ved: $D(q(h)) = \{x \in H \mid \exists y \in H\ [p(gh)x \to y \text{ gennem } \mathcal{G}]\}$; et sådant y er entydigt bestemt, da H er et Hausdorffrum, og vi sætter $q(h)x = y$. Hvis $p(h\mathcal{G})x_1 \to y_1$ og $p(h\mathcal{G})x_2 \to y_2$ og $\lambda \in \mathbb{C}$, vil $p(h\mathcal{G})(x_1 + \lambda x_2) \to y_1 + \lambda y_2$ (fordi H er et t.v.r.); $q(h)$ er således en lineær operator.

For $x \in H$ og en funktion g i en mængde i $\mathcal{G}$ og en funktion $e \in C(T,\mathbb{C})$, for hvilken eh er kontinuert, gælder: $p(gh)p(e)x = p((gh)e)x = p(g(he))x = p(g)p(eh)x$; da $p(g)p(eh)x \to p(eh)x$ gennem $\mathcal{G}$, er $p(gh)p(e)x$ konvergent gennem $\mathcal{G}$, så at $p(e)x \in D(q(h))$ og $q(h)p(e)x = p(eh)x$; d.v.s. $\underline{q(h)p(e) = p(eh)}$. Hvis $x \in D(p(e)q(h)) = D(q(h))$ vil $p(gh)x \to q(h)x$ gennem $\mathcal{G}$, og derfor $p(e)p(gh)x \to p(e)q(h)x$ gennem $\mathcal{G}$; da $p(e)p(gh)x = p(egh)x = p(g)p(eh)x \to p(eh)x$ gennem $\mathcal{G}$, er $p(e)q(h)x = p(eh)x$. Derfor er $p(e)q(h) \subseteq q(h)p(e) = p(eh)$.

Hvis h selv kan fortsættes til en kontinuert funktion på T, kan vi her som e vælge 1, og finder: $q(h)E = p(1h)$. q er således en udvidelse af p.

I alle fald er $q(h)$ tæt defineret, da enhver vektor $x \in H$ er grænseværdi for vektorer $p(g)x \in D(q(h))$, da $p(\grave{G})x \to x$. $D(q(h))$ indeholder det mindste underrum i H, der indeholder $\{p(e)x \mid eh$ er kontinuert og $x \in H\}$, og grafen for $q(h)$ er indeholdt i afslutningen af grafen for $q(h)$'s sammentrækning til hint underrum, da vi for $x \in D(q(h))$ ved, at $(p(g)x,\ q(h)p(g)x) = (p(g)x,\ p(gh)x) \to (x,\ q(h)x)$ gennem $\grave{G}$. Når vi om lidt har bevist, at $q(h)$ er en afsluttet operator, ved vi altså også, at $q(h)$ er afslutningen af denne sammentrækning, så at $q(h)$ ikke afhænger af det specielle valg af filterbasen $\grave{G}$.

For $e \in C(T,[0,1])$, så at eh er kontinuert, er også $e\bar{h}$ og $e|h|$ kontinuerte; ved definition af $q(\bar{h})$ og $q(|h|)$ kan vi altså benytte den samme filterbasis $\grave{G}$. Nu er $p(h\grave{G})x$ basis for et fundamental filter, hvis og kun hvis der til $\varepsilon > 0$ eksisterer $G \in \grave{G}$, så at $\|p(g_1h)x - p(g_2h)x\| < \varepsilon$ for g_1 og $g_2 \in G$, altså så at $\varepsilon^2 > (p((g_1 - g_2)h)x \mid p((g_1 - g_2)h)x) = (p(\overline{(g_1 - g_2)h}\ (g_1 - g_2)h)\ x \mid x) = p((g_1 - g_2)^2 |h|^2)x \mid x) = \|p((g_1 - g_2)|h|)x\|^2$, d.v.s. hvis og kun hvis $p(|h|\grave{G})$ er basis for et fundamentalfilter. $q(h)$ og $q(|h|)$ og så også $q(\bar{h})$ har derfor samme definitionsområde.

* For $x \in D(q(h))$ finder vi ved grænseovergang gennem $\grave{G}$, at $\|q(h)x\| = \|q(\bar{h})x\| = \|q(|h|)x\|$, da $\|p(gh)x\|^2 = \|p(g\bar{h})x\|^2 = \|p(g|h|)x\|^2 = (p(g^2|h|^2)x \mid x)$. $q(h)$, $q(\bar{h})$ og $q(|h|)$ er således metrisk ens (jfr. øv.).

Af relationerne $p(g)q(h) \subseteq q(h)p(g) = p(gh)$, hvor g tilhører en mængde i $\grave{G}$, finder vi ved adjungering, K IV, 1, 4 1962-63 at $q(h)^*p(g) = [p(g)q(h)]^* \supseteq p(gh)^* = p(g\bar{h}) = [q(h)p(g)]^* \supseteq p(g)q(h)^*$. For $x \in D(q(\bar{h}))$ vil $p(g)x \to x$ og $q(h)^*p(g)x = p(g\bar{h})x \to q(\bar{h})x$ gennem $\grave{G}$; da $q(h)^*$

er afsluttet, vil $x \in D(q(h)^*)$ og $q(h)^*x = q(\bar{h})x$; d.v.s. $q(\bar{h}) \subseteq q(h)^*$. For $x \in D(q(h)^*) = D(p(g)q(h)^*)$ er $p(g\bar{h})x = p(g)q(h)^*x \to q(h)^*x$ gennem $\grave{G}$, så at $x \in D(q(\bar{h}))$ og $q(\bar{h})x = q(h)^*x$; derfor er også $q(h)^* \subseteq q(\bar{h})$. Vi har altså $q(\bar{h}) = q(h)^*$, og tilsvarende $q(h) = q(\bar{h})^*$; <u>$q(h)$ er en tæt defineret, afsluttet operator, og $q(h)$ og $q(h)^* = q(\bar{h})$</u> er metrisk ens (d.v.s. $q(h)$ er en normal operator, jfr. øv.). Hvis h er reel, er $q(h)$ selvadjungeret.

Lad nu S_1 og S_2 være to afsluttede delmængder af T med spektralmålet 0, og h_i en kontinuert afbildning: $T \setminus S_i \to \dot{C}$, $i = 1,2$. Idet vi betragter $h_1 + h_2$ og $h_1 \cdot h_2$ som definerede på $T \setminus (S_1 \cup S_2)$, er også $q(h_1 + h_2)$ og $q(h_1 h_2)$ defineret, da $S_1 \cup S_2$ har spektralmålet 0. Vi sætter f.eks. $\grave{G} = \grave{G}(S_1 \cup S_2)$. For $x \in H$ og g i en mængde i $\grave{G}$ er $p(g(h_1 + h_2))x = p(gh_1)x + p(gh_2)x$; hvis to af filterbaserne $p(\grave{G}(h_1 + h_2))x$, $p(\grave{G}h_1)x$, $p(\grave{G}h_2)x$ konvergerer, konvergerer også den tredie, og i dette tilfælde fås $q(h_1 + h_2)x = q(h_1)x + q(h_2)x$; derfor er $D(q(h_1) + q(h_2)) = D(q(h_1)) \cap D(q(h_2)) = D(q(h_1 + h_2)) \cap D(q(h_1)) = D(q(h_1 + h_2)) \cap D(q(h_2))$, og $q(h_1 + h_2) \supseteq q(h_1) + q(h_2)$. For $x \in D(q(h_2))$ og g i en mængde i $\grave{G}$ er $p(g(h_1 h_2))x = p((gh_1)h_2)x = p(gh_1)q(h_2)x$; $p(\grave{G}(h_1 h_2))x$ er derfor konvergent, hvis og kun hvis $p(\grave{G}h_1)q(h_2)x$ er konvergent, og i dette tilfælde er $q(h_1 h_2)x = q(h_1)q(h_2)x$; derfor er $D(q(h_1)q(h_2)) = \{x \in D(q(h_2)) \mid q(h_2)x \in D(q(h_1))\} = D(q(h_2)) \cap D(q(h_1 h_2))$ og $q(h_1 h_2) \supseteq q(h_1)q(h_2)$.

Hvis $D(q(h_1 + h_2))$ eller $D(q(h_1 h_2))$ er indeholdt i $D(q(h_2))$, f.eks. hvis $q(h_2) \in L(H,H)$, er således $q(h_1 + h_2) = q(h_1) + q(h_2)$, henholdsvis $q(h_1 h_2) = q(h_1)q(h_2)$.

Lad nu igen h være kontinuert: $T \setminus S \to \check{C}$, hvor S er en afsluttet mængde med spektralmålet 0; hvis h er begrænset, $\|h\| = \sup\{|h(t)| \mid t \in T\setminus S\} < \infty$, så er $q(h) \in L(H,H)$ og $\|q(h)\| \leqq \|h\|$.

Bevis: For $x \in H$ og g i en mængde i $\check{G}(S)$ (jfr. side 8) er $\|p(gh)x\| \leqq \|(g|T\setminus S)h\| \cdot \|x\|$ (idet $\overline{T\setminus S} = T$) $\leqq \|h\| \cdot \|x\|$; for $x \in D(q(h))$ har derfor også grænseværdien $q(h)x$ for $p(\check{G}\cdot h)x$ norm $\leqq \|h\| \cdot \|x\|$; da således $q(h)$ er tæt defineret, afsluttet og begrænset, er $q(h) \in L(H,H)$ og $\|q(h)\| \leqq \|h\|$ (jfr. 5, 3).

Mængden af begrænsede komplekse funktioner, der er definerede og kontinuerte undtagen på en afsluttet delmængde af T med spektralmålet 0, kan vi på naturlig måde opfatte som en normeret algebra (ikke nødvendigvis en Banachalgebra), idet vi identificerer to funktioner, der antager samme værdi i ethvert punkt, hvor de begge er definerede (Nøjagtigere: Vi danner mængden af par (S,h), hvor $S = \bar{S}$ har spektralmålet 0 og h er kontinuert: $T\setminus S \to$
1) $|T\setminus(S_1 \cup S_2)$ $\check{C}$, og indfører regnereglerne $(S_1,h_1) + (S_2,h_2) = (S_1 \cup S_2, h_1 + h_2 | T\setminus(S_1 \cup S_2))$ og tilsvarende for multiplikation og ækvivalensrelationen: $(S_1,h_1) \sim (S_2,h_2)$ hvis $h_1(t) = h_2(t)$ for $t \notin S_1 \cup S_2$; relationen harmonerer med regnereglerne, og klasserne udgør en algebra; idet $\|(S,h)\| = \sup\{|h(t)| \mid t \in T\setminus S\}$, er $\|(S,h)\| = 0 \iff (S,h) \sim (\emptyset,0)$; idet vi sætter $q((S,h)) = q(h)$, er $q((S_1,h_1)) = q((S_2,h_2))$ når $(S_1,h_1) \sim (S_2,h_2)$, q er således veldefineret på klasserne).

Sammentrækningen af q til denne mængde er en normformindskende *homomorfi ind i $L(H,H)$; vi beviser om lidt, at afbildningen er en isometri, og dermed en *isomorfi. Specielt er sammentrækningen af q til $C(T\setminus S, \check{C})$ en *isomorfi for hvert fast S.

Lad nu h være en kompleks funktion, der er defineret, kontinuert og $\neq 0$ på $T\setminus S$, hvor S er en afsluttet mængde med spektralmålet O. $q(h^{-1})$ er da også defineret, og $q(h\,h^{-1}) = q(1|T\setminus S) = E$; af regnereglerne følger, at $q(h)q(h^{-1}) = E|D(q(h^{-1}))$ og $q(h^{-1})q(h) = E\,|D(q(h))$, d.v.s. $q(h^{-1}) = q(h)^{-1}$.

For $h\colon T\setminus S \to \check{C}$, så at $q(h)$ er defineret, falder spektret for $q(h)$ sammen med afslutningen i $\check{C}$ af værdimængden for h.

Bevis: Hvis $\lambda \in \check{C}$ ikke er fortætningspunkt for værdimængden for h, er $(h - \lambda)^{-1}$ defineret, kontinuert, ulig nul, og begrænset på $T\setminus S$, og $q((h - \lambda)^{-1})$ er en invers $\in L(H,H)$ til $q(h - \lambda) = q(h)-\lambda E$, så at λ ikke tilhører spektret for $q(h)$.

Antag nu, at λ tilhører værdimængden for h, $\lambda = h(\tau), \tau \in T\setminus S$. Vi vælger $e \in C(T,[0,1])$, nul i en omegn af S og 1 i τ (Urysohns lemma); $\varphi_n = e[(1 - n|h - \lambda|) \vee 0]$ er kontinuert og nul i en omegn af S og antager værdien 1, og $(h - \lambda)\varphi_n$ er kontinuert og $\|(h-\lambda)\varphi_n\| \to 0$ for $n \to \infty$; hvis $q(h) - \lambda E$ havde en invers $B \in L(H,H)$,1) $p(\varphi_n) \to 0$ for $n \to \infty$, i modstrid med at $\|p(\varphi_n)\| = 1$ for alle n. λ tilhører altså spektret for $q(h)$.

Da $sp(q(h))$ er en afsluttet delmængde af $\check{C}$, falder det sammen med afslutningen af værdimængden for h.

For en begrænset funktion h finder vi specielt, at $\|h\| = \sup\{|\lambda| \mid \lambda \in sp(q(h))\}$ = spektralnormen af $q(h) \leq \|q(h)\|$ (jfr. § 5) $\leq \|h\|$, så at sammentrækningen af q til disse funktioner er en isometri.

En delmængde G af en partielt ordnet mængde M kaldes opad filtrerende, hvis $\{\{f \in G | f \geq g\} | g \in G\}$ er en filterbasis, d.v.s. hvis og kun hvis:

$$\forall f,g \in G\ \exists h \in G\ [h \geq f \wedge h \geq g].$$

Tilsvarende defineres begrebet nedad filtrerende.

1) ville $Bp((h - \lambda)\varphi_n) = Bq(h - \lambda)p(\varphi_n) = B(q(h) - \lambda E)p(\varphi_n) =$

F.eks. er $G(1_S) = \{f \in C(T,[0,1]) | f(t) = 1 \text{ for } t \in S\}$, hvor S er en delmængde af T, nedad filtrerende (og opad filtrerende), og det samme gælder da om billedmængden under p i $L(H,H)$.

I en følgende § vil vi bevise:

Til en vilkårlig nedad filtrerende mængde G af positive operatorer $\in L(H,H)$ findes der en operator $P \in L(H,H)$, for hvilken $(Px|x) = \inf \{(Bx|x) \mid B \in G\}$ for alle $x \in H$. P er positiv og kommuterer med enhver operator, der kommuterer med enhver operator i G.

<u>Sætning</u>: Lad S være en afsluttet delmængde af T. Om følgende betingelser:

I Der findes en funktion $f \in C(T,\overset{\circ}{C})$, så at $p(f)$ er injectiv og $S \subseteqq f^{\circ -1}(0)$.

II S har spektralmålet 0.

III For enhver funktion $f \in C(T,C)$, så at $f^{\circ -1}(0) \subseteqq S$, er $p(f)$ injectiv og $q(f^{-1})$ er defineret og $= p(f)^{-1}$.

gælder: I $\Rightarrow$ II $\Rightarrow$ III.

Bevis: II $\Rightarrow$ III er vist i det foregående: Hvis S har spektralmålet 0 og $S_1 = f^{\circ -1}(0) \subseteqq S$, så har S_1 spektralmålet 0, og f^{-1} er defineret og kontinuert: $T \setminus S_1 \to \overset{\circ}{C}$, så at $q(f^{-1})$ er defineret og $= p(f)^{-1}$.

I $\Rightarrow$ II Om $f \in C(T,\overset{\circ}{C})$ antager vi, at $p(f)$ er injectiv, og at $S \subseteqq f^{\circ -1}(0) = S_2$. $p(\bar{f}\, f) = p(f)^* p(f)$ er injectiv, thi for $B \in L(H,H)$ og $x \in H$ gælder: $B^*Bx = 0 \Rightarrow (B^*Bx|x) = \|Bx\|^2 = 0 \Rightarrow Bx = 0 \Rightarrow B^*Bx = 0$.

Lad P være den til den nedad filtrerende mængde $\{p(g) | g \in G(1_S)\}$ af positive operatorer svarende operator, for hvilken $(Px|x) = \inf \{(p(g)x|x) \mid g \in G(1_S)\}$ for alle $x \in H$. Da $p(\bar{f}\, f)$ kommuterer med $p(g)$ for $g \in G(1_S)$, kommuterer $p(\bar{f}\, f)$ med P, og da også $0 \leqq P \leqq p(g)$, er $0 \leqq p(\bar{f}\, f)P \leqq p(\bar{f}\, f\, g)$, for alle $g \in G(1_S)$.

Til $\varepsilon > 0$ kan vi vælge $g \in G(1_S)$, så at g er nul på $\{t \in T \mid \bar{f}\, f\,(t) \geqq \varepsilon\}$ (Urysohns lemma); for et sådant g er $\bar{f}\, f\, g \leqq \varepsilon$, og $(p(\bar{f}\, f)P\, x|x) \leqq (p(\bar{f}\, f\, g)\, x|x) \leqq \|p(\bar{f}\, f\, g)\| \cdot \|x\|^2 \leqq \varepsilon\|x\|^2$ for ethvert $x \in H$, så at $(p(\bar{f}\, f)P\, x|x) = 0$ for $x \in H$, og $p(\bar{f}\, f)Px = 0$ for $x \in H$; da $p(\bar{f}\, f)$ er injectiv, er $Px = 0$ for $x \in H$, altså $P = 0$. Da således $\inf\{(p(g)x|x) \mid g \in G(1_S)\} = 0$ for alle $x \in H$, kan vi til $\varepsilon > 0$ og $x \in H$ finde $g \in G(1_S)$, så at $(p(g)x|x) < \varepsilon$, d.v.s S har spektralmålet 0.

6.6. Vi minder om, at vi til en selvadjungeret operator A har konstrueret en kompakt mængde $\sigma(A) \subseteq \grave{R}_\infty$ og en * isomorfi p af $C(\sigma(A),\grave{C})$ på den mindste afsluttede delalgebra af $L(H,H)$, der indeholder E og alle operatorer $(A - \gamma E)^{-1}$, $\gamma \in \grave{C}\setminus\grave{R}$, så at $p(R_{\sigma(A)}) = R(A)$ for enhver rational funktion R, der er begrænset på $\grave{R}$.

For $A \in L(H,H)$ har vi i afsnit 4 vist, at $\sigma(A) = sp(A)$, og at $p(R_{\sigma(A)}) = R(A)$ for enhver rational funktion R, der er begrænset på $\sigma(A)$.

Vi antager nu, at A er ubegrænset, så at $\infty \in \sigma(A)$. Da funktionen $t \to (t - i)^{-1}$ er 0, netop når $t = \infty$, og af p afbildes i den injective operator $(A - iE)^{-1}$, har $\{\infty\}$ spektralmålet 0.

Da et polynomium P ikke kan afbilde $\grave{R}$ på $\grave{C}$, kan vi til P vælge $\lambda \in \grave{C}$, så at $P(t) - \lambda \neq 0$ for $t \in \sigma(A)$; da vil $(P - \lambda)^{-1}_{\sigma(A)} \in C(\sigma(A),\grave{C})$, og $p((P - \lambda)^{-1}_{\sigma(A)}) = (P(A) - \lambda E)^{-1}$. Da $(P(t) - \lambda)^{-1}$ kun er nul for $t = \infty$, er $q\,(P_{\sigma(A)\setminus\{\infty\}}-\lambda)$ defineret og $= [(P(A) - \lambda E)^{-1}]^{-1} = P(A) - \lambda E$, og $q(P_{\sigma(A)\setminus\{\infty\}}) = P(A)$. Specielt svarer funktionen: $t \to t$, $t \in \sigma(A)\setminus\{\infty\}$, til A; da værdimængden for denne funktion er den (relativt til $\grave{C}$) afsluttede mængde $\sigma(A)\setminus\{\infty\}$, er $sp(A) = \sigma(A)\setminus\{\infty\}$, ligesom for $A \in L(H,H)$.

For en vilkårlig rational funktion $R = PQ^{-1}$, for hvilken Q ikke har nulpunkter i $\sigma(A)$ og derfor $Q^{-1}_{\sigma(A)} \in C(\sigma(A), \grave{C})$ og

$p(Q_{\sigma(A)}^{-1}) \in L(H,H)$, er $q(R_{\sigma(A)}) = q(P_{\sigma(A)}Q_{\sigma(A)}^{-1}) = q(P_{\sigma(A)})q(Q_{\sigma(A)}^{-1}) = P(A)Q(A)^{-1}$ og dette sætter vi $= R(A)$. For $f \in C(\sigma(A),\check{C})$ sætter vi $p(f) = f(A)$; herved bliver $R_{\sigma(A)}(A) = R(A)$ for en rational funktion R med $R_{\sigma(A)} \in C(\sigma(A),\check{C})$.

Vi fremhæver specielt, at vi har bevist, at et reelt polynomium af en selvadjungeret operator er en selvadjungeret operator.

6.7. Lad os sige, at en spektralfremstilling af en operator B er et par (σ,p), hvor σ er en kompakt delmængde af $\check{C}_\infty$ og p er en * isomorfi af $C(\sigma,\check{C})$ ind i $L(H,H)$, for hvilken $p(1) = E$, $\{\infty\} \subsetneqq \sigma$ og har spektralmålet nul eller $\infty \notin \sigma$, og $q(X_{\sigma\setminus\{\infty\}}) = B$.

Vi har vist, at kun en normal operator kan have en spektralfremstilling, at σ er entydigt bestemt, σ = afslutningen relativt til $\check{C}_\infty$ af sp(B), og at enhver selvadjungeret operator har en spektralfremstilling.

Lad igen T være et kompakt Hausdorffrum og p en * isomorfi af $C(T,\check{C})$ ind i $L(H,H)$, så at $p(1) = E$, og lad h være defineret og kontinuert: $T \setminus S \to \check{C}$, hvor S er en afsluttet delmængde af T med spektralmålet 0.

Lad σ være afslutningen relativt til $\check{C}_\infty$ af $h(T \setminus S)$, altså $\sigma = sp(q(h))$, hvis h er begrænset, og $\sigma = sp(q(h)) \cup \{\infty\}$ ellers.

Afbildningen $f \to f \circ h$ er en * isomorfi og isometri af $C(\sigma,\check{C})$ ind i $C(T \setminus S,\check{C})$; f.eks. er $\overline{f} \circ h(t) = \overline{f}(h(t)) = \overline{f(h(t))} = \overline{f \circ h}(t)$ for $t \in T \setminus S$, og $\|f \circ h\| = \sup\{|f\circ h(t)| \mid t \in T \setminus S\} = \sup\{|f(z)| \mid z \in h(T \setminus S)\} = \sup\{|f(z)| \mid z \in \sigma\} = \|f\|$. Idet vi sammensætter denne afbildning med sammentrækningen af q til $C(T \setminus S,\check{C})$, der jo også er en *isomorfi og isometri, får vi en * isomorfi og isometri p_h af

$C(\sigma,\dot{C})$ ind i $L(H,H)$, $p_h(f) = q(f \circ h)$, og $p_h(1) = q(1 \circ h) = q(1) = E$.

For $\gamma \in \dot{C}\backslash\sigma$ er funktion $t \to (t-\gamma)^{-1}$, $t \in \sigma$, kontinuert, og afbildes ved p_h i $q((h-\gamma)^{-1}) = q(h-\gamma)^{-1} = (q(h) - \gamma E)^{-1}$.

Heraf følger, hvis ikke $\sigma = C_\infty$ som for en selvadjungeret operator, at $\{\infty\} \subsetneq \sigma$ og har spektralmålet $\circ$ eller $\infty \notin \sigma$, og at den til p_h svarende afbildning q_h afbilder $X_{\sigma\backslash\{\infty\}}$ i $q(h)$. Enhver sådan operator $q(h)$ har derfor en spektralfremstilling.

Da enhver rational funktion $R = PQ^{-1}$, for hvilken Q ikke har nulpunkter i σ og P har højst samme grad som Q, kan opløses i faktorer af formen $\alpha\mathbb{1} + \beta(X-\gamma)^{-1}$, $\gamma \in \dot{C}\backslash\sigma$, er $p_h(R_\sigma) = R(q(h))$ for alle sådanne R.

Hvis h er reel, er $q(h)$ selvadjungeret, og vi har tidligere konstrueret en spektralfremstilling $(\sigma, p_{q(h)})$ for $q(h)$; da mængden af funktionen R_σ, hvor R er en rational funktion, der er begrænset på $\sigma \cup \{\infty\}$, er tæt i $C(\sigma,\dot{C})$ og p_h og $p_{q(h)}$ falder sammen på denne mængde, falder de sammen for alle $f \in C(\sigma,\dot{C})$, $p_{q(h)}(f) = p_h(f) = q(f \circ h)$.

Specielt ser vi:

<u>Sætning</u>: En selvadjungeret operator A har én spektralfremstilling.

Thi hvis (σ, p) er en fremstilling, og $f \in C(\sigma,\dot{C})$, er $p(f) = q(f \circ X_{\sigma\backslash\{\infty\}}) = p_{X_{\sigma\backslash\{\infty\}}}(f) = p_{q(X_{\sigma\backslash\{\infty\}})}(f) = p_A(f)$.

Desuden har vi vist:

<u>Sætning</u>: Lad A være en selvadjungeret operator, f en funktion $\in C(\sigma(A),\dot{R})$ og g en funktion $\in C(f(\sigma(A)),\dot{C}) = C(\sigma(f(A)),\dot{C})$. $g \circ f(A) = g(f(A))$.

Thi $g \circ f(A) = p_A(g \circ f) = p_{f(A)}(g) = g(f(A))$.

6.8. Lad h være defineret og kontinuert: $T \setminus S \to \mathbb{C}$, hvor S er en afsluttet mængde med spektralmålet 0, og lad $\sigma(h)$ være afslutningen relativt til $\mathbb{C}_\infty$ af $h(T \setminus S)$.

Man kan uden større besvær vise, at hvis en afsluttet delmængde S_1 af $\sigma(h)$ har spektralmålet 0 m.h.t. *isomorfien p_h, så har $\overline{h^{o-1}(S_1)} \subsetneqq h^{o-1}(S_1) \cup S$ spektralmålet 0 m.h.t. p. Specielt har $\{\infty\}$ spektralmålet 0 m.h.t. p_h, også hvis $\sigma(h) = \mathbb{C}_\infty$. For en funktion f, for hvilken q_h er defineret, er da også $q(f \circ h)$ defineret, og man viser, at $q_h(f) = q(f \circ h)$ (jfr. øv.).

Man kan vise, at enhver normal operator har én spektralfremstilling; i øvelserne vises dette for en unitær operator. Vi vil i det følgende tillade os at benytte denne sætning.

De beviser, vi har anvendt, er modifikationer af tilsvarende beviser i bogen af Riesz og Sz.-Nagy. Andre beviser gives f.eks. i samme bog, i en bog af Sz.-Nagy i serien: Ergebnisse der Math. und ihrer Grenzgebiete, og i bøger af Stone og af Halmos og af Achieser og Glasmann.

Vi vil endnu nævne hovedsætningen inden for denne teori, en sætning, der gør det berettiget, at vi har beskæftiget os med kompakte Hausdorffrum, og ikke blot med kompakte delmængder af $\mathbb{C}_\infty$.

En C^*algebra er en afsluttet, selvadjungeret (d.v.s. $A \in C^* \Rightarrow A^* \in C^*$) delalgebra af L(H,H).

Det er ikke svært at vise, at for et vilkårligt kompakt Hausdorffrum T findes der et Hilbertrum H og en *isomorfi p af $C(T, \mathbb{C})$ med en kommutativ C^* delalgebra af L(H,H).

<u>Hovedsætning</u>: Til en vilkårlig kommutativ C^* algebra, der indeholder E, på et Hilbertrum H findes der et kompakt Hausdorffrum T og en *isomorfi p af $C(T, \mathbb{C})$ på C^*.

Beviset for denne sætning kan f.eks. findes hos Loomis eller Naimark.

§ 7. Topologier på H og L(H,H).

Lad E være et topologisk vektorrum over K(= $\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$), og lad I være en vilkårlig indeksmængde. Produktrummet E^I af I eksemplarer af E, der jo kun opfattes som mængden af alle afbildninger af I ind i E, forsyner vi med produkttopologien. E^I er desuden på naturlig måde organiseret som et vektorrum, idet vi for f og $g \in E^I$ og $\lambda \in K$ lader $f+\lambda g$ være elementet i E^I med koordinaterne $f(i)+\lambda g(i)$.

E^I bliver herved et topologisk vektorrum. Idet en basis for filtret af omegne af $f \in E^I$ udgøres af mængderne $\{\{g \in E^I \mid \forall\, i \in S[g(i)-f(i) \in U\} \mid U$ er en omegn af o i E og S er en endelig delmængde af I$\}$, er nemlig topologien bestemt ved en basis for filtret af omegne af o, og man ser let, at $\{\{g \in E^I \mid \forall i \in S[g(i) \in U]\} \mid U \in \mathcal{B}(o)$ og S er endelig delmængde af I$\}$ opfylder betingelserne V1,...,V6(I 1 s.2-3), når $\mathcal{B}$ er en basis for filtret af omegne af 0 i E, der opfylder V1,...,V6.(jfr. øv. 9). (Hvis $U,S = \{g \in E^I \mid \forall i \in S[g(i) \in U]\}$, så vil $o \in U,S \cup T \subsetneq U,S \cap U,T$; $\lambda f(i) \in U$ for $f(i) \in U$ og $|\lambda| \leq 1$; $\lambda \cdot U,S = (\lambda U),S$; $f \in \lambda U,S$ for $\lambda \geq \max\{\lambda_i \mid i \in S\}$, hvor $\lambda_i > 0$ er valgt så $f(i) \in \lambda_i U$; $U,S+U,S \subsetneq (U+U),S$; og $f \in \bigcap U,S \Rightarrow f(i) \in \bigcap U = \{0\}$ for alle $i \Rightarrow f = 0$).

Lad der nu for hvert $i \in I$ være givet en kompakt delmængde K_i af E. $\Pi\{I_i \mid i \in I\}$ er kompakt ifølge Tychonoffs sætning (jfr. T.2.12). En delmængde af E^I bestående af afbildninger f, for hvilke $f(i) \in K_i$ for alle i, er en delmængde af $\Pi\{K_i \mid i \in I\}$ og derfor kompakt, hvis blot den er afsluttet.

Vi antager nu, at I er et vektorrum over K. Mængden af lineære afbildninger af I ind i E er da en afsluttet delmængde af E^I; thi for $a \in I$ er afbildningen $f \to f(a)$, $E^I \to E$, kontinuert, da produkttopologien jo er den svageste topologi på E^I, der gør disse afbildninger kontinuerte; for $a, b \in I$ og $\lambda \in K$ er da også afbildningen $\alpha(a,b,\lambda)$: $f \to f(a+\lambda b)-f(a)-\lambda f(b)$ kontinuert, og mængden af lineære afbildninger $= \bigcap\{\alpha(a,b,\lambda)^{o-1}(0) \mid a,b \in I, \lambda \in K\}$ er derfor afsluttet.

Lad nu I være et normeret vektorrum H, og $E = K$; vi har vist, at H's algebraisk duale rum H^*, = mængden af lineære afbildninger af H ind i K, er en afsluttet delmængde af K^H. Den af K^H inducerede topologi på H^*, eller på H's topologisk duale rum H', kaldes den svage topologi på dette rum, og betegnes hyppigt σ eller $\sigma(H^*,H)$, henholdsvis $\sigma(H',H)$.

Da σ er den svageste topologi, der gør alle afbildningerne $pr(x)$: $f \to f(x)$, $x \in H$, kontinuerte, er σ svagere end normtopologien, der også undertiden kaldes den stærke topologi, på H'.

<u>Sætning</u>: Enhedskuglen i det duale rum til et normeret vektorrum H er kompakt i den svage topologi.

Bevis: For f i enhedskuglen i H' er $|f(x)| \leqq \|x\|$ for alle $x \in H$; enhedskuglen er derfor en delmængde af $\Pi\{C_x \mid x \in H\}$, hvor for hvert x C_x betegner den kompakte mængde $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leqq \|x\|\}$; da enhedskuglen $= \bigcap\{pr(x)^{o-1}(\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leqq 1\}) \mid x \in H, \|x\| \leqq 1\} \cap H^*$, er den afsluttet og dermed kompakt.

Tilsvarende viser man, at mængden af kontinuerte homomorfier af en normeret algebra H ind i K er kompakt; en kontinuert homomorfi h tilhører specielt H' og har norm $\leqq 1$, for hvis der fandtes $x \in H$ med $\|x\| < 1$ og $|h(x)| = 1$, ville $\|x^n\| \leqq \|x\|^n \to 0$ for $n \to \infty$ medens $|h(x^n)| = |h(x)|^n = 1$, i strid med kontinuiteten; de kontinuerte homomorfier er fællesmængden af enhedskuglen i H' med fællesmængden af nulmængderne for de kontinuerte afbildninger $h \to h(xy)-h(x)\,h(y)$, $x,y \in H$, og udgør dermed en kompakt mængde. Hvis H er en normeret algebra med ét-element E, og h er en homomorfi ind i K, så er $h(E) = h(E^2) = h(E)^2$, og $h(E) = 0$ eller 1; hvis $h(E) = 0$, er $h(x) = 0$ for alle x; h afbilder således på K, hvis og kun hvis $h(E) = 1$. I dette tilfælde er 0 homomorfien et isoleret punkt i mængden af kontinuerte homomorfier, og også mængden af kontinuerte homomorfier på K er kompakt i den svage topologi.

Hvis H er en Banach-algebra er i øvrigt enhver homomorfi ind i K kontinuert; vi viser det dog kun under den yderligere antagelse, at H har et ét-element: antag, at $h(E) = 1$, og at der findes $x \in H$ med $\|x\| < 1$ og $h(x) = 1$; da $\|x\| < 1$, har $E-x$ en invers y, og $1 = h(E) = h(y(E-x)) = h(y)(1-h(x)) = 0$..

Lad igen H være et normeret vektorrum. Da et filter på et produktrum konvergerer, hvis og kun hvis alle dets projektioner konvergerer (T.2.11), ser vi, at et filter på H' konvergerer mod $f \in \grave{F}$ i den svage topologi, hvis og kun hvis $\grave{F}(a) \to f(a)$ for ethvert $a \in H$, specielt, at en følge (f_n) konvergerer svagt mod f, hvis og kun hvis $f_n(a) \to f(a)$ for ethvert $a \in H$.

Hvis H er et Hilbertrum, har vi en konjugeret lineær bijectiv isometri J af H' på H; vi definerer den svage topologi på H som den topologi, der gør J til en homeomorfi mellem H' forsynet med den svage topologi og H. En basis for filtret af omegne i denne topologi er $\{\{f \in H \mid \forall g \in S[\,|(f|g)| < 1]\} \mid S \text{ er en endelig delmængde af } H\}$.

Hvis H ikke er endelig dimensionalt, findes der et ortonormalsystem (e_n) i H; et sådant konvergerer svagt mod o, thi for

$g \in H$ er $\sum_n^{\infty} |(e_n|g)|^2 \leqq \|g\|^2$, så at $(e_n|g) \to 0$. (e_n) konvergerer ikke stærkt, da det ikke er nogen fundamentalfølge. Den svage og den stærke topologi er således forskellige. Hvis H er endelig dimensionalt $H = K^n$, ser man let, at begge topologier falder sammen med produkttopologien.

7.2. Lad H være et Hilbertrum, og lad os indføre topologier på $L(H,H)$. (Vi kunne almindeligere se på $L(H_1,H_2')$, hvor H_1 og H_2 er normerede vektorrum).

$L(H,H) = L$ kan betragtes som en delmængde af H^H. Lad H_σ betegne H forsynet med den svage topologi, og $H_\tau H$ forsynet med den stærke topologi. Vi vil anvende følgende betegnelser: Den ligelige topologi på L er topologien induceret af normen; den stærke topologi på L er topologien induceret af produkttopologien/[1] induceret af produkttopologien på H_σ^H.

Som basis for filtret af omegne af 0 i den stærke topologi kan vælges mængderne $\{T \in L \mid \|Tf\| < 1, \forall f \in S\}$, hvor S er en vilkårlig endelig delmængde af H. Den stærke topologi kan karakteriseres som den svageste topologi, med hensyn til hvilken alle afbildninger $T \to Tf$, $f \in H$, af L ind i H_τ er kontinuerte. Den er derfor svagere end den ligelige topologi.

Som basis for filtret af omegne af 0 i den svage topologi kan vælges mængderne $\{T \in L \mid |(Tf|g)| < 1, \forall f \in S, \forall g \in S_f\}$, hvor S er en vilkårlig endelig delmængde af H, og hvor, for hvert $f \in S$, S_f er en endelig delmængde af H. Disse mængder kan lige så godt beskrives som $\{T \in L \mid |(Tf_\nu|g_\nu)| < 1, \nu = 1,\dots,n\}$, hvor $n \in \mathring{N}$ og $f_1,\dots,f_n,g_1,\dots,g_n \in H$, idet hvert $f \in S$ skrives et antal gange, der er lig antallet af elementer i S_f. Som basis-

1) på H_τ^H; den svage topologi på L er topologien

mængder er det nok at benytte delsystemet af mængder $\{T \in L \mid |(Th_\nu|h_\nu)| < 1,\ \nu = 1,\ldots,n\}$, hvor $n \in \mathring{N}$ og $h_1,\ldots,h_n \in H$; thi $\{T \in L \mid |(Tf_\nu|g_\nu)| < 1,\ \nu = 1,\ldots,n\} \supseteqq \{T \in L \mid |T(f_\nu+i^\nu g_\nu)|f_\nu+i^\mu g_\nu)| < 1,\ \nu = 1,\ldots,n,\ \mu = 0,\ldots,3\}$, idet, for vilkårlige $T \in L, f,g \in H$, $4(Tf|g) = \sum_{\mu=0}^{3} i^\mu(T(f+i^\mu g) \mid f+i^\mu g)$. Den svage topologi kan karakteriseres som den svageste topologi på L, med hensyn til hvilken alle afbildninger $T \to Tf, f \in H$, af L ind i H_σ er kontinuert, eller som den svageste topologi på L, med hensyn til hvilken alle afbildninger $T \to (Tf|g)$, $f,g \in H$, af L ind i $\check{C}$ er kontinuerte. Den er derfor svagere end den stærke topologi (jfr. øv.).

Sætning. Enhedskuglen i L(H,H) er kompakt i den svage topologi.

Bevis: For T i enhedskuglen og $f \in H$ er $\|Tf\| \leqq \|f\|$, derfor er enhedskuglen en delmængde af den kompakte mængde $\Pi\{H_f | f \in H\}$, hvor H_f for hvert f betegner den svagt kompakte mængde $\{g \in H \mid \|g\| \leqq \|f\|\}$. Enhedskuglen i L er fællesmængden af mængden af lineære afbildninger $H \to H$ med fællesmængden af urbillederne ved de kontinuerte afbildninger: $T \to Tf$, hvor $f \in H$ og $\|f\| = 1$, af enhedskuglen i H, der er kompakt og derfor afsluttet i den svage topologi; derfor er enhedskuglen i L kompakt.

Lad L_λ, L_τ og L_σ betegne L forsynet med den ligelige, henholdsvis den stærke og den svage topologi.

Sætning: For $B \in L$ er $A \to AB$ og $A \to BA$ kontinuerte afbildninger $L_\sigma \to L_\sigma$.

Bevis: Lad en omegn U af 0 i den svage topologi være givet ved $\{f_1,\ldots,f_n\}$ og $\{g_1,\ldots,g_n\}$.

$A \in \{S \in L \mid |(SBf_\nu|g_\nu)| < 1,\ \nu = 1,\dots,n\} \Rightarrow AB \in U$, og
$A \in \{S \in L \mid |(Sf_\nu|B^* g_\nu)| < 1,\ \nu = 1,\dots,n\} \Rightarrow BA \in U$.

Bemærkning: En tilsvarende sætning gælder i den stærke topologi (jfr. øv.).

Sætning: Lad N være en vilkårlig delmængde $\subsetneqq L$.
$\{T \in L \mid TA = AT,\ \forall A \in N\}$ er afsluttet i den svage topologi.

Bevis: For $A \in L$ er $T \to TA-AT$ en kontinuert afbildning $\gamma_A : L_\sigma \to L_\sigma$. Derfor er $\cap\{\gamma_A^{o-1}(0) \mid A \in N\}$ afsluttet i den svage topologi.

Sætning: Afbildningen $A \to A^*$ er kontinuert $L_\sigma \to L_\sigma$. Mængden af selvadjungerede operatorer $\in L$ er svagt afsluttet.

Bevis: Kontinuiteten følger let af, at $|(A^*g|f)| < 1 \Rightarrow |(Af|g)| < 1$. Derfor er $\beta : A \to A^*-A$, en kontinuert afbildning $L_\sigma \to L_\sigma$, og mængden af selvadjungerede operatorer $\in L = \beta^{o-1}(0)$ er svagt afsluttet.

Bemærkning: $A \to A^*$ er ikke kontinuert $L_\tau \to L_\tau$ (jfr. øv. 3).

Sætning: Lad B være en selvadjungeret operator $\in L$.
$\{A \in L \mid A \geqq B\}$ og $\{A \in L \mid A \leqq B\}$ er afsluttede i den svage topologi.

Bevis: Afbildningen $\alpha_f : A \to ((A-B)f|f)$ er kontinuert $L_\sigma \to \mathring{C}$, derfor er $\cap\{\alpha_f^{o-1}(\mathring{R}^+ \cup \{0\}) \mid f \in H\}$ og $\cap\{\alpha_f^{o-1}(\mathring{R} \setminus \mathring{R}^+) \mid f \in H\}$ svagt afsluttede.

7.3. Definition: En delmængde N af en partielt ordnet mængde M er opad filtrerende, hvis mængderne $N_B = \{A \in N \mid A \geqq B\}$, $B \in N$, udgør en basis for et filter $\mathring{F}_N$ på N. Betingelsen er åbenbart ækvivalent med følgende: til A og $B \in N\ \exists C \in N$, så at $C \geqq A$ og $C \geqq B$. Tilsvarende defineres begrebet nedad filtrerende.

Sætning: Lad N være en opad filtrerende mængde af selvadjungerende operatorer $\in L$. Hvis $A \in L$ er en majorant for N, og A tilhører det svagt afsluttede hylster af N, så er A den mindste majorant for N, og $\dot{F}_N$ konvergerer mod A i den stærke topologi.

Bevis: For B selvadjungeret $\in L$ er $\{S \in L \mid S \leqq B\}$ svagt afsluttet. $S \leqq B$, $\forall S \in N$, medfører derfor $A \leqq B$, d.v.s. A er den mindste majorant for N.

Vi vælger $R \in N$. For $S \in N_R$ gælder: $-\|R\| \cdot E \leqq R \leqq S \leqq A \leqq \|A\| \cdot E$, derfor $0 \leqq A-S \leqq aE$ for $a \geqq \|R\|+\|A\|$, og, da produktet af to kommuterende, positive operatorer er positivt, $0 \leqq (A-S)^2 \leqq a \cdot (A-S)$.

Lad U være en omegn af A i den stærke topologi,
$U = \{T \in L \mid \|(T-A)f_\nu\| < 1,\ \nu = 1,\dots,n\}, n \in \dot{N}, f_1,\dots,f_n \in H$;
$V = \{T \in L \mid |((T-A)f_\nu | f_\nu)| < a^{-1},\ \nu = 1,\dots,n\}$ er da en omegn af A i den svage topologi, derfor $\exists T_1 \in V \cap N$. Vi vælger $T \in N$, $T \geqq T_1$ og $T \geqq R$. For $S \in N_T \subseteq N_R$ gælder: $\|(A-S)f_\nu\|^2 = ((A-S)^2 f_\nu | f_\nu) \leqq a((A-S)f_\nu | f_\nu) \leqq a((A-T)f_\nu | f_\nu) < 1$, $\nu = 1,\dots,n$, altså $S \in U$. Vi har $N_T \subseteq U$, derfor $U \in \dot{F}_N$, $\dot{F}_N$ er finere end filtret af omegne af A i den stærke topologi, d.v.s. $\dot{F}_N$ konvergerer mod A i den stærke topologi.

Sætning: En opad begrænset, opad filtrerende mængde N af selvadjungerede operatorer $\in L$ har én mindste majorant $\sup N$. $\dot{F}_N$ konvergerer mod $\sup N$ i den stærke topologi.

Bevis: Vi vælger $R \in N$ og en majorant B for N.
For $S \in N_R$ og $b = \max\{\|R\|, \|B\|\}$ gælder $-bE \leqq S \leqq bE$, derfor $\|S\| \leqq b$.
Da $\{T \in L \mid \|T\| \leqq b\}$ er kompakt i den svage topologi, har filt-

med basis $\{N_S | S \in N_R\}$ et fortætningspunkt A, d.v.s. A tilhører det svagt afsluttede hylster af $N_S, \forall S \in N_R$, og derfor det svagt afsluttede hylster af N. Da $\{C \in L \mid C \geqq S\}$ er svagt afsluttet og $\supseteq N_S$, vil den indeholde A, d.v.s. $A \geqq S, \forall S \in N_R$. Til $T \in N$ $\exists\ S \geqq T, S \in N_R$, og vi har $T \leqq S \leqq A$. Sætningen følger nu af den foregående.

En tilsvarende sætning gælder om nedad begrænsede, nedad filtrerende mængder af selvadjungerende operatorer $\in L$. Den største minorant for en sådan mængde N vil vi betegne inf N.

<u>Sætning</u>: Lad N og P være opad begrænsede, opad filtrerende mængder af selvadjungerede operatorer $\in L$.

1) $-N = \{-S | S \in N\}$ er nedad begrænset og nedad filtrerende; $\inf(-N) = -\sup(N)$.

2) For $\lambda \in \dot{R}^+$ er $\lambda N + P = \{\lambda S + T | S \in N, T \in P\}$ opad begrænset og opad filtrerende; $\sup(\lambda N + P) = \lambda \sup N + \sup P$.

3) Antag yderligere, at $S \geqq 0$, $T \geqq 0$, og $ST = TS$, for $\forall S \in N$, $\forall T \in P$. $N \cdot P = \{ST \mid S \in N, T \in P\}$ er opad begrænset og opad filtrerende; $\sup(N \cdot P) = (\sup N) \cdot (\sup P)$.

Bevis: 3) $N \cdot P$ er opad filtrerende; thi $S_3 \geqq S_1$, $S_3 \geqq S_2$, $T_3 \geqq T_1$, $T_3 \geqq T_2$, $S_i \in P$, $T_i \in P$, $i = 1,2,3$, medfører $S_3T_3 \geqq S_3T_1 \geqq S_1T_1$ og tilsvarende $S_3T_3 \geqq S_2T_2$, d.v.s. at S_1T_1 og S_2T_2 har den fælles majorant $S_3T_3 \in N \cdot P$.

Da sup N tilhører N's svagt afsluttede hylster, kommuterer sup N med $T, \forall T \in P$; tilsvarende kommuterer sup P med $S, \forall S \in N$. $S \in N, T \in P \Rightarrow ST \leqq (\sup N) \cdot (\sup P) \Rightarrow \sup(N \cdot P) \leqq (\sup N) \cdot (\sup P)$. Omvendt ser vi, at $S \in N$, $T \in P \Rightarrow ST \leqq \sup(N \cdot P) \Rightarrow S \cdot \sup P \leqq \sup(N \cdot P)$, da $S \cdot \sup P$ tilhører det svagt afsluttede hylster af $\{ST | T \in P\}$, idet $T \to ST$ er kontinuert $L_\sigma \to L_\sigma$. Da også (sup N)·

(sup P) tilhører det svagt afsluttede hylster af $\{S(\sup P) \mid S \in \dot{N}\}$, er $(\sup N)\cdot(\sup P) \leqq \sup(N\cdot P)$.

1) og 2) vises tilsvarende.

Hvis N og P er voksende følger (S_n) og (T_n), finder vi, med forudsætninger som under punkt 3), at (S_nT_n) er en voksende følge; for $n \leqq m$ er $S_nT_n \leqq S_nT_m \leqq S_mT_m$ og $S_nT_n \leqq S_mT_n \leqq S_mT_m$; derfor er $(\sup N)\cdot(\sup P) = \sup(N\cdot P) = \sup_{n,m} (S_nT_m) = \sup_n (S_nT_n)$.

For nedad begrænsede, nedad filtrerende mængder gælder tilsvarende sætninger.

En nedad filtrerende mængde G af positive operatorer $\in L(H, H)$ er specielt nedad begrænset, og har derfor en største minorant P; for alle $x \in H$ og $\varepsilon > 0$ eksisterer $B \in G$, så at $(Px|x) \leqq (Bx|x) \leqq (Px|x) + \varepsilon$, da P tilhører det svagt afsluttede hylster af G; derfor er $0 \leqq (Px|x) = \inf \{(Bx|x) | B \in \mathfrak{G}\}$. Da mængden af operatorer, der kommuterer med enhver operator, der kommuterer med enhver operator i $\mathfrak{G}$, er svagt afsluttet og indeholder $\mathfrak{G}$, indeholder den også P. Hermed har vi bevist en sætning, der blev anvendt i § 6, side 14.

§ 8. Fortætningspunkter for spektret.

Vi betragter et Hilbertrum H og en operator T på H.

For $\lambda \in \mathring{C}$ kaldes $(T-\lambda E)^{\circ -1}(0)$ egenrummet for λ. Hvis egenrummet er $\neq \{0\}$, kaldes λ en egenværdi for T, og ethvert element $\neq 0$ i egenrummet kaldes en egenvektor svarende til λ. Dimensionen af egenrummet kaldes λ's multiplicitet.

Antag nu, at T er en normal operator $\in$ L. <u>Ethvert isoleret punkt λ i spektret $\sigma(T)$ er en egenværdi for T.</u>

Bevis: Da λ er isoleret, findes der $a > 0$, så at $\{\lambda\}$ er fællesmængde for $\sigma(T)$ og cirklen $C(\lambda,a)$ med centrum λ og radius a. Den karakteristiske funktion for $\{\lambda\}$, $1_{\{\lambda\}}$, $\in C(\sigma(T),\mathring{C})$, og for den tilsvarende operator $1_{\{\lambda\}}(T) = P_\lambda$ er $TP_\lambda = \lambda P_\lambda$, da $t1_{\{\lambda\}}(t) = \lambda 1_{\{\lambda\}}(t)$ for $t \in \sigma(T)$. λ er derfor egenværdi, og det tilsvarende egenrum indeholder $P_\lambda H$.

P_λ er en projektion, da $1_{\{\lambda\}}$ kun antager værdierne 0 og 1, så at $P_\lambda{}^2 = P_\lambda{}^* = P_\lambda$. Da $|t-\lambda|^2 \geq a^2\,(1 - 1_{\{\lambda\}}(t))$ for $t \in \sigma(T)$ er $\|(T-\lambda E)x\|^2 = ((T^* - \bar{\lambda}E)(T-\lambda E)x|x) \geq a^2\,((E-P_\lambda)x|x) = a^2\,\|(E-P_\lambda)x\|^2$ for ethvert $x \in H$. For en egenvektor x svarende til λ er derfor $x = P_\lambda x \in P_\lambda H$. P_λ er således netop projektionen på egenrummet for λ.

Da $\|(T^* - \bar{\lambda}E)x\| = \|(T-\lambda E)x\|$, er P_λ også projektionen på egenrummet for T^* svarende til $\bar{\lambda}$.

<u>Sætning</u> (H.Weyl 1909): <u>Lad T være en normal operator $\in$ L. $\lambda \in \mathring{C}$ er fortætningspunkt for $\sigma(T)$ eller egenværdi for T med multiplicitet ∞, hvis og kun hvis der eksisterer et numerabelt ortonormalsystem (f_n) i H, for hvilket $\|(T-\lambda E)f_n\| \to 0$.</u>

Bevis: Hvis $\lambda \in \mathring{C}$ er egenværdi for T med multiplicitet ∞, kan vi finde et numerabelt ortonormalsystem (f_n) i ...

egenrum, og opnår $(T-\lambda E)f_n = 0 \to 0$. Antag nu, at følgen (a_n) af punkter i $\sigma(T)$, med $a_n \neq a_m \neq \lambda$ for $n \neq m$, konvergerer mod λ. Vi kan da induktivt vælge funktioner $\varphi_n \in C(\sigma(T),[0,1])$, så at
* $\varphi_n(a_n) = 1$, $\|\varphi_n\| = 1$, φ_n har støtte $\subsetneqq \{z \in \mathbb{C} \mid |z-\lambda| < 2|a_n-\lambda|\}$ og er 0 i en omegn af $\{a_m \mid m \neq n\}$ og $\varphi_n\varphi_m = 0$ for $n \neq m$. Da $\|\varphi_n(T)\| = 1$ kan vi vælge $g_n \in H$ med $\|g_n\| < 2$, så at $\|\varphi_n(T)g_n\| = 1$. Vektorerne $f_n = \varphi_n(T)g_n$ udgør da et ortonormalsystem, idet $(f_n|f_m) = (\varphi_m(T)^*\varphi_n(T)g_n|g_m) = (\overline{\varphi_m}\varphi_n(T)g_n|g_m) = 0$ for $n \neq m$. Da $\|(T-\lambda E)f_n\| \leqq \|(T-\lambda E)\varphi_n(T)\|\cdot\|g_n\| \leqq 2\sup\{|z-\lambda|\varphi_n(z) \mid z \in \sigma(T)\} \leqq 2\sup\{|z-\lambda| \mid |z-\lambda| < 2|a_n-\lambda|\} = 4|a_n-\lambda|$, vil $(T-\lambda E)f_n \to 0$.

Hvis λ ikke er egenværdi med multiplicitet ∞ og ikke er fortætningspunkt for $\sigma(T)$, så er λ egenværdi med endelig multiplicitet, og $P_\lambda = 1_{\{\lambda\}}(T)$ er projektionen på det tilsvarende egenrum. Da et vilkårligt ortonormalsystem (f_n) konvergerer svagt mod 0, vil specielt $(P_\lambda f_n|g) = (f_n|P_\lambda g) \to 0$ for $g \in P_\lambda H$, d.v.s. $P_\lambda f_n \to 0$ i den svage og derfor i den stærke topologi på $P_\lambda H$, da $P_\lambda H$ er endelig dimensionalt. Da $\|(T-\lambda E)f_n\|^2 \geqq a^2((E-P_\lambda)f_n|f_n)$ for et passende $a > 0$ (jfr. ovenfor), og $((E-P_\lambda)f_n|f_n) = 1-\|P_\lambda f_n\|^2 \to 1$, kan $(T-\lambda E)f_n$ ikke konvergere mod 0.

Med lidt påpasselighed kan man bevise de ovenstående sætninger også for ubegrænsede normale operatorer.

8.2. Lemma: Lad N være en delmængde af et fuldstændigt metrisk rum M. Følgende egenskaber er ækvivalente:

I $\overline{N}$ er kompakt.

II For et vilkårligt $\varepsilon > 0$ findes der en endelig delmængde S af M, så at ethvert punkt i N har en afstand $\leqq \varepsilon$ fra S (et endeligt ε-net for N). (N er fuldstændigt begrænset).

III Enhver følge af elementer i N har en konvergent delfølge.

Bevis: II $\Rightarrow$ I: Lad $\dot{F}$ være et ultrafilter på $\bar{N}$, og lad S være et endeligt ε-net for N; S er da et endeligt (2ε)-net for $\bar{N}$, så at $\bar{N}$ er overdækket af de endelig mange kugler $K_1,\ldots,K_n$ med centrer i S og radius 2ε. $\dot{F}$ indeholder en af disse kugler, thi $K_1 \notin \dot{F} \Rightarrow \bar{N} \setminus K_1 \in \dot{F}$ (jfr. T.2.7), og hvis også $K_2 \notin \dot{F}$, vil $\bar{N} \setminus (K_1 \cup K_2) = (\bar{N} \setminus K_1) \cap (\bar{N} \setminus K_2) \in \dot{F}$ o.s.v., så at enten K_1 eller ... eller $K_{n-1} \in \dot{F}$, eller $K_n \supseteq \bar{N} \setminus (K_1 \cup\ldots\cup K_{n-1}) \in \dot{F}$; $\dot{F}$ er således et fundamentalfilter og dermed konvergent.

I $\Rightarrow$ III: Da $\bar{N}$ er kompakt, har enhver følge af elementer i N et fortætningspunkt x i $\bar{N}$. Da filtret af omegne af x har numerabel basis, vil en delfølge konvergere mod x.

III $\Rightarrow$ II: Antag, at der findes $\varepsilon > 0$, så at ingen endelig delmængde af M er et ε-net for N; $N \neq \emptyset$, og vi kan ved induktion vælge en følge $x_1, x_2, \ldots$ af elementer i N, så at x_n har en afstand $> \varepsilon$ fra x_m for alle $n \in \dot{N}$, og $m < n$; da ingen delfølge af denne følge er en fundamentalfølge, kan følgen ikke udtyndes til en konvergent delfølge.

En operator $T \in L$ siges at have endelig rang, hvis dimensionen af TH er endelig.

Sætning: Lad T være en operator $\in$ L. Om følgende egenskaber:

I T har endelig rang.

II T er grænseværdi i L_λ for operatorer med endelig rang.

III $\overline{T\{f \in H \mid \|f\| \leq 1\}}$ er kompakt i H_τ.

IV T er grænseværdi i L_λ for operatorer, der opfylder III.

V Enhver begrænset følge har en delfølge, hvis billedfølge er konvergent i H_τ.

VI T afbilder en vilkårlig begrænset svagt konvergent følge i en stærkt konvergent følge.

VII Hvis (f_n) er et numerabelt ortonormalsystem og $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, er $(T-\lambda E)f_n$ ikke konvergent i H

gælder: I $\Rightarrow$ II $\Rightarrow$ III $\Longleftrightarrow$ IV $\Longleftrightarrow$ V $\Rightarrow$ VI $\Rightarrow$ VII.

Hvis T er normal, er II, III, IV, V, VI og VII ækvivalente; i dette tilfælde består $\sigma(T)$ af højst numerabelt mange punkter, og ethvert punkt i $\sigma(T) \setminus \{0\}$ er isoleret i $\sigma(T)$ og er en egenværdi med endelig multiplicitet. T opfylder også I, hvis og kun hvis $\sigma(T)$ er en endelig mængde.

Bemærkning: Man kan vise, at enhver svagt konvergent følge er begrænset, så at ordet begrænset kan stryges i VI (princippet om ligelig begrænsning). Man kan vise, at VI $\Rightarrow$ II også for ikke normale operatorer. Operatorer, der opfylder disse betingelser, kaldes kompakte eller totalkontinuerte. Trods VI behøver en sådan operator ikke at være kontinuert: $H_\sigma \to H_\tau$. (Jfr. øv.)

Bevis: I $\Rightarrow$ II og III $\Rightarrow$ IV er trivielt

IV $\Rightarrow$ III: Antag, at der til $\varepsilon > 0$ findes $S \in L$, der opfylder III og $\|S-T\| < \varepsilon$; lad R være et endeligt ε-net for $S\{f \in H \mid \|f\| \leqq 1\}$; R er da et endeligt (2ε)-net for $T\{f \in H \mid \|f\| \leqq 1\}$; denne mængde har derfor kompakt afsluttet hylster i H_τ.

I $\Rightarrow$ III: $T\{f \in H \mid \|f\| \leqq 1\}$ er en begrænset mængde i det endelig dimensionale rum TH, og har derfor kompakt afslutning relativt til TH og derfor relativt til H_τ.

II $\Rightarrow$ IV da I $\Rightarrow$ III.

III $\Longleftrightarrow$ V følger af det foregående lemma

V $\Rightarrow$ VI: Lad (f_n) være en begrænset følge, der konvergerer svagt mod f; enhver delfølge $(Tg_\nu) = (Tf_{n_\nu})$ af (Tf_n) har da en delfølge $(Th_u) = (Tg_{\nu_\mu})$, der konvergerer stærkt mod et element

$h \in H$; for ethvert $g \in H$ er $(h|g) = \lim_{\mu}(Th_{\mu}|g) = \lim_{\mu}(h_{\mu}|T^{*}g) = (f|T^{*}g) = (Tf|g)$; derfor er $h = Tf$. Dette medfører, at $(Tf_n) \to Tf$: ellers ville der eksistere et $\varepsilon > 0$ og en delfølge (Tg_{ν}), så at $\|Tf - Tg_{\nu}\| > \varepsilon$ for $\nu \in \dot{N}$, og ingen delfølge af (Tg_{ν}) kunne konvergere mod Tf.

VI $\Rightarrow$ VII: Et numerabelt ortonormalsystem (f_n) konvergerer svagt mod 0; hvis $\lambda \in \dot{C} \setminus \{0\}$, og $(T-\lambda E)f_n \to g$, så vil $f_n = \lambda^{-1}Tf_n - \lambda^{-1}(T-\lambda E)f_n \to 0 - \lambda^{-1}g$, i modstrid med Cauchy-kriteriet. Antag nu, at T er normal og opfylder VII; sætningen i det foregående afsnit viser da, at intet $\lambda \in \dot{C} \setminus \{0\}$ kan være fortætningspunkt for $\sigma(T)$ eller egenværdi for T med multiplicitet ∞. For $n \in \dot{N}$ kan $\sigma(T) \cap \{z \in \dot{C} \mid |z| \geqq n^{-1}\}$ kun indeholde endelig mange punkter; $\sigma(T)$ indeholder derfor højst numerabelt mange punkter. Lad $(\lambda_n)_{n \in N}$, hvor $N = \dot{N}$ eller et afsnit i $\dot{N}$, betegne de fra 0 forskellige punkter i $\sigma(T)$, nummereret, så at $|\lambda_1| \geqq |\lambda_2| \geqq \ldots$; hvis $N = \dot{N}$, vil $\lambda_n \to 0$; til $\varepsilon > 0$ findes der n, så at $|\lambda_{\nu}| < \varepsilon$ for $\nu \in N$, $\nu \geqq n$; da $|z - \Sigma\{\lambda_{\nu}1_{\{\lambda_{\nu}\}}(z) \mid \nu \in N, \nu \leqq n\}| < \varepsilon$ for $z \in \sigma(T)$, er $\|T - \Sigma\{\lambda_{\nu}P_{\nu} \mid \nu \in N, \nu \leqq n\}\| < \varepsilon$ for $P_{\nu} = 1_{\{\lambda_{\nu}\}}(T)$; $\Sigma\{\lambda_{\nu}P_{\nu} | \nu \in N, \nu \leqq n\}$ har åbenbart endelig rang; T opfylder altså II, og hvis N er endelig endog I. Operatorerne P_{ν} er åbenbart parvis ortogonale projektioner. TH indeholder hvert af rummene $P_{\nu}H$, da $f = T(\lambda_{\nu}^{-1}f)$ for $f \in P_{\nu}H$; da $\Sigma\lambda_{\nu}P_{\nu} \to T$ i L_{λ}, vil $\Sigma\lambda_{\nu}P_{\nu}f \to Tf$ i H_{τ} for ethvert $f \in H$; $\overline{TH}$ er derfor det mindste afsluttede underrum af H_{τ}, der indeholder alle $P_{\nu}H$; desuden er $\overline{TH}^{\perp} = T^{*\circ -1}(0) = T^{\circ -1}(0)$; hvis vi lader P_0 være projektionen på egenrummet svarende til 0 for T, er derfor $(E-P_0)H = (\Sigma P_{\nu})H$.

Hvis T har endelig rang, kan TH kun indeholde endelig mange af de parvis ortogonale endelig dimensionale underrum $P_{\nu}H$, og $\sigma(T) \setminus \{0\}$ må være en endelig mængde.

For $x \in H$ er $(E-P_o)x = \Sigma P_\nu x$, hvor højresiden er en endelig sum, eller er konvergent i H_τ. ΣP_ν er således en endelig sum, eller konvergent i L_τ med summen $E-P_o$.

For $\nu \in N$ kan vi vælge en endelig ortonormal basis $e_{\nu 1},\ldots,e_{\nu n_\nu}$ for $P_\nu H$, n_ν = dimensionen af $P_\nu H$. For $x \in H$ er da $P_\nu x = \sum_{\mu=1}^{n_\nu} (x|e_{\nu\mu})e_{\nu\mu}$. Vi vælger en indexmængde I med card(I) = dim $P_o H$ og et maximalt ortonormalsystem $(e_{oi})_{i \in I}$ i $P_o H$. $\{e_{oi}|i \in I\} \cup \{e_{\nu\mu} \mid \nu \in N, \mu = 1,\ldots,n_\nu\}$ er da et maximalt ortonormalsystem i H, thi hvis $x \in H$ er ortogonal på alle disse vektorer, er $x \perp P_\nu H$ for $\nu \in N$, så at $x \in P_o H$ og $x = o$.

Til en normal kompakt operator $T \in L(H,H)$ findes der altså en ortonormal tilnærmelsesbasis for H bestående af egenvektorer for T (sammenlign med § 2).

Lad f være en kontinuert funktion på $\sigma(T)$. $\Sigma[f(\lambda_\nu)-f(o)]1_{\{\lambda_\nu\}}$ er konvergent i $C(\sigma(T),\mathbb{C})$, eller en endelig sum, med summen $f-f(o)1$; derfor er $f(T) = f(o)E + \Sigma[f(\lambda_\nu)-f(o)]P_\nu$ i L_λ. Så meget des mere er $f(T) = f(o)E + \Sigma[f(\lambda_\nu)-f(o)]P_\nu$ i L_τ, og da $f(o)E = f(o)P_o + \Sigma f(o)P_\nu$ i L_τ, er $f(T) = f(o)P_o + \Sigma f(\lambda_\nu)P_\nu$ i L_τ.

Hvis $f(o) = o$, finder vi specielt, at $f(T) = \Sigma f(\lambda_\nu)P_\nu$ i L_λ. Da afsnittene $\sum_{\nu=1}^{n} f(\lambda_\nu)P_\nu$ er operatorer af endelig rang, og konvergerer mod $f(T)$ i L_λ, er $f(T)$ kompakt, når $f(o) = o$.

Ved anvendelser inden for teorien for differentialoperatorer møder man hyppigt følgende problem: Der er givet en operator A, for hvilken A^{-1} er en normal kompakt operator $\in L$; for hvilke $\lambda \in \mathbb{C}$ og $y \in H$ findes der $x \in D(A)$, så at $Ax-\lambda x = y$.

Ved multiplikation med A^{-1} får vi problemet: $x-\lambda A^{-1}x = A^{-1}y$; i ældre litteratur kaldes undertiden λ en egenværdi for problemet, hvis der findes $x \in H \setminus \{0\}$, så at $x-\lambda A^{-1}x = 0$.

Vi vil her diskutere problemet: der er givet en operator $T \in L$; for hvilke $\lambda \in \mathbf{C}$ og $y \in H$ findes der $x \in H$, så at $\lambda x-Tx = y$.

For $\lambda \notin sp(T)$ har $\lambda E-T$ er invers i L; der findes da for ethvert y en og kun én løsning $x = (\lambda E-T)^{-1}y$; hvis specielt $|\lambda| >$ spektralnormen for T, er $(\lambda E-T)^{-1} = \lambda^{-1}\sum_{\nu=0}^{\infty}(\lambda^{-1}T)^{\nu}$, hvor rækken er konvergent i L_λ (jfr. § 5), og $x = \lambda^{-1}\sum_{\nu=0}^{\infty}(\lambda^{-1}T)^{\nu}y$ (C. Neumanns række).

Hvis λ ikke er egenværdi for T, har $\lambda E-T$ en invers; der er da højst én løsning $x = (\lambda E-T)^{-1}y$.

Hvis λ er egenværdi for T er for $y \in H$ $(\lambda E-T)^{\circ -1}(y)$ tom eller et siderum til egenrummet for T svarende til λ.

Vi minder om, at $\bar{\lambda} \in sp(T^*) \iff \lambda \in sp(T)$, og at $\overline{(\lambda E-T)H} = [(\bar{\lambda}E-T^*)^{\circ -1}(o)]^{\perp}$. Hvis $\bar{\lambda}$ er egenværdi for T^*, vil $\lambda \in sp(T)$, og en nødvendig betingelse for, at der findes x, er at y er ortogonal på egenrummet for T^* svarende til $\bar{\lambda}$. Hvis T er normal, falder dette rum sammen med egenrummet for T svarende til λ.

<u>Sætning</u>: Lad T være en normal kompakt operator. For $\lambda \notin \sigma(T)$ er $(\lambda E-T)^{-1} = \lambda^{-1}E+\lambda^{-1}\Sigma\lambda_\nu(\lambda-\lambda_\nu)^{-1}P_\nu$ i L_λ, og $(\lambda E-T)^{-1} = \lambda^{-1}P_o + \Sigma(\lambda-\lambda_\nu)^{-1}P_\nu$ i L_τ. For $\lambda = \lambda_\mu \in \sigma(T) \setminus \{0\}$ eksisterer der $x \in H$, så at $\lambda_\mu x-Tx = y$, hvis og kun hvis y er ortogonal på egenrummet for T svarende til λ_μ; hvis betingelsen

er opfyldt, er den fuldstændige løsning $x = z_1+\lambda_\mu^{-1}y + \lambda_\mu^{-1} \sum_{\nu \neq \mu} \lambda_\nu(\lambda_\mu-\lambda_\nu)^{-1}P_\nu y = z_2+\lambda_\mu^{-1}P_o y + \sum_{\nu\neq\mu}(\lambda_\mu-\lambda_\nu)^{-1}P_\nu y$, hvor z_1 og z_2 er vilkårlige løsninger til $Tz = \lambda_\mu z$, og rækkerne er konvergente i H_τ (og $\lambda_\mu^{-1}E+\lambda_\mu^{-1} \sum_{\nu\neq\mu} \lambda_\nu(\lambda_\mu-\lambda_\nu)^{-1}P_\nu$ er konvergent i L_λ).

Bevis: For $\lambda \notin \sigma(T)$ er funktionen $t \to (\lambda-t)^{-1}$ kontinuert på $\sigma(T)$; derfor er $(\lambda E-T)^{-1} = \lambda^{-1}E + \Sigma[(\lambda-\lambda_\nu)^{-1} - \lambda^{-1}]P_\nu = \lambda^{-1}E + \lambda^{-1}\Sigma\, \lambda_\nu(\lambda-\lambda_\nu)^{-1}P_\nu$ i L_λ og $(\lambda E-T)^{-1} = \lambda^{-1}P_o+\Sigma(\lambda-\lambda_\nu)^{-1}P_\nu$ i L_τ.

Summen $\lambda_\mu^{-1}\, 1 + \sum_{\nu\neq\mu} [(\lambda_\mu-\lambda_\nu)^{-1}-\lambda_\mu^{-1}]1_{\{\lambda_\nu\}}$, hvor $\lambda_\mu \in \sigma(T) \setminus \{0\}$ er endelig eller konvergent i $C(\sigma(T), \mathbb{C})$ med en sum $g \in C(\sigma(T),\mathbb{C})$; $g(t) = (\lambda_\mu-t)^{-1}$ for $t \neq \lambda_\mu$, og $g(\lambda_\mu) = \lambda_\mu^{-1}$, og $(\lambda_\mu\cdot 1-t)g(t) = 1-1_{\{\lambda_\mu\}}$. Derfor er $\lambda_\mu^{-1}E + \lambda_\mu^{-1} \sum_{\nu\neq\mu} \lambda_\nu(\lambda_\mu-\lambda_\nu)^{-1}P_\nu$ konvergent i L_λ med en sum $g(T)$, og $g(T)(\lambda_\mu E-T) = E-P_\mu$. For $y \in (E-P_\mu)H$ og $x = g(T)y$ er da $\lambda_\mu x-Tx = (\lambda_\mu E-T)g(T)y = (E-P_\mu)y = y$. Den nødvendige betingelse $P_\mu y = 0$ er således i dette tilfælde også tilstrækkelig.

Desuden er $g(T) = g(o)P_o + \Sigma g(\lambda_\nu)P_\nu = \lambda_\mu^{-1}P_o + \lambda_\mu^{-1}P_\mu + \sum_{\nu\neq\mu} (\lambda_\mu-\lambda_\nu)^{-1}P_\nu$ i L_τ, så at $g(T)y = z + \lambda_\mu^{-1}P_o y + \sum_{\nu\neq\mu}(\lambda_\mu-\lambda_\nu)^{-1}P_\nu y$, med $z \in P_\mu H$.

§ 9. Integralligninger.

Vi minder om Fubinis sætning: Hvis en funktion $K:\dot{R}^2 \to \dot{C}$, er integrabel, så er funktionen $t \to K(s,t)$ en integrabel funktion $\dot{R} \to \dot{C}$ for næsten ethvert $s \in \dot{R}$, den næsten overalt definerede funktion $s \to \int K(s,t)dt$ er integrabel, og $\iint K(s,t)dtds = \int K dm_2$ (m_2 betegner det to-dimensionale Lebesgue-mål).

Lemma: Lad K være en målelig funktion: $\dot{R}^2 \to \dot{C}$, og antag, at $t \to |K(s,t)|$ er integrabel for næsten alle s, og at $s \to \int |K(s,t)|dt$ er integrabel. K er integrabel.

Bevis: Vi sætter $K_n = |K| \wedge n\, 1_{W_n}$, hvor $W_n = [-n,n] \times [-n,n]$; K_n er målelig, og $0 \leqq K_n \leqq n\, 1_{W_n}$; derfor er K_n integrabel. For næsten ethvert s er $t \to K_n(s,t)$ målelig; da $K_n(s,t) \leqq |K(s,t)|$ er for næsten alle s $\int K_n(s,t)dt \leqq \int |K(s,t)|dt$; $s \to \int K_n(s,t)dt$ er integrabel, og $\int K_n dm_2 = \iint K_n(s,t)d\,t\,ds < \iint |K(s,t)|dtds < \infty$. Da (K_n) er en voksende følge, der konvergerer punktvis mod $|K|$, og $\{\int K_n dm_2 \mid n \in \dot{N}\}$ er begrænset, er $|K|$ integrabel. Da K er målelig og har den integrable majorant $|K|$, er K integrabel.

Hvis en mængde $A \subseteq \dot{R}$ er målelig i udvidet forstand, d.v.s. $A \cap [-n,n]$ er målelig for ethvert n, så er $A \times \dot{R}$ målelig i udvidet forstand; thi $(A \times \dot{R}) \cap W_n = (A \cap [-n,n]) \times [-n,n]$, og til $\varepsilon > 0$ og $n \in \dot{N}$ findes en voksende følge af trappemænger (F_ν) og en aftagende følge af trappemængder (G_ν), så at $\bigcap_\nu G_\nu \subseteq A \cap [-n,n] \subseteq \bigcup_\nu F_\nu$ og $m(\bigcup_\nu F_\nu) - m(\bigcap_\nu G_\nu) < \varepsilon$; $(F_\nu \times [-n,n])$ er da en voksende følge af trappemængder og $(G_\nu \times [-n,n])$ en aftagende følge af trappemængder, så at $\bigcap_\nu (G_\nu \times [-n,n]) \subseteq (A \cap [-n,n]) \times [-n,n] \subseteq$

$\bigcup_\nu (F_\nu \times [-n,n])$, og $m_2(\bigcup_\nu (F_\nu \times [-n,n])) - m_2(\bigcap_\nu (G_\nu \times [-n,n])) <$ $\varepsilon \cdot 2n$, så at $(A \times \dot{R}) \cap W_n$ er målelig for ethvert n.

Heraf følger det straks, at hvis en funktion $f : \dot{R} \to \dot{C}$, er målelig, er f også målelig som funktion: $\dot{R}^2 \to \dot{C}$, idet f.eks. $\{(s,t) \in \dot{R}^2 \mid \text{Re } f(s) > a\} = \{s \in \dot{R} \mid \text{Re } f(s) > a\} \times \dot{R}$.

Hvis to funktioner f og g er integrable : $\dot{R} \to \dot{C}$, finder vi, at $(s,t) \to f(s)g(t)$ er målelig; for næsten alle s er f(s) endelig og derfor $t \to |f(s)g(t)|$ integrabel, og $s \to \int |f(s)g(t)|dt = |f(s)| \int |g(t)dt$ er integrabel; derfor er $(s,t) \to f(s)g(t)$ integrabel.

Lad nu K være en funktion $\in L^2(\dot{R}^2, \dot{C})$, d.v.s. K er målelig og $\int |K|^2 dm_2 < \infty$; $t \to K(s,t)$ er da en funktion i $L^2(\dot{R}, \dot{C})$ for næsten alle s. Vi sætter $L^2(\dot{R}, \dot{C}) = H$. For $f \in H$ og $n \in \dot{N}$ er $(s,t) \to 1_{[-n,n]}(s)f(t) \in L^2(\dot{R}^2, \dot{C})$; derfor er $(s,t) \to K(s,t)\, 1_{[-n,n]}(s)f(t)$ integrabel, så at $t \to K(s,t)1_{[-n,n]}(s)f(t)$ er integrabel for næsten alle s, og $s \to \int K(s,t)1_{[-n,n]}(s)f(t)dt$ er integrabel og specielt målelig; da dette gælder for vilkårligt $n \in \dot{N}$, er $s \to \int K(s,t)f(t)dt$ målelig; denne funktion sætter vi lig kf. Da $|kf(s)|^2 = |\int K(s,t)f(t)dt|^2 \leqq \int |K(s,t)^2 dt \int |f(t)|^2 dt$ for næsten alle s (Schwartz' ulighed), og $s \to \int |K(s,t)|^2 dt$ er integrabel, er $|kf|^2$ integrabel, d.v.s. $kf \in H$, og $\int |kf(s)|^2 ds \leqq \int |f(t)|^2 dt \cdot \iint |K(s,t)|^2 dt ds$. Da $k(\lambda f + g) = \lambda kf + kg$ for $\lambda \in \dot{C}$ og f og $g \in H$, er $f \to kf$ en kontinuert lineær afbildning $H \to H$ med norm $\leqq$ normen af K som element af $L^2(\dot{R}^2, \dot{C})$. k siges at være en integraloperator af Hilbert-Schmidt type med kernen K.

Afbildningen $K \to k$ af $L^2(\dot{R}^2, C)$ ind i $L(H,H)$ er lineær og normformindskende; vi vil vise, at den er injectiv. For vilkårlige f og $g \in H$ er $(s,t) \to \overline{g(s)}f(t)$ en funktion i $L^2(\dot{R}^2, \dot{C})$; for $K \in L^2(\dot{R}^2, \dot{C})$ er $(s,t) \to K(s,t)f(t)\overline{g(s)}$ integrabel, og $\int K(s,t)f(t)\overline{g(s)}\, dm_2 = \int\int K(s,t)f(t)dt\, \overline{g(s)}\, ds = (kf|g)$. Hvis $k = o$ er således K ortogonal på det mindste underrum, der indeholder alle funktioner $(s,t) \to \overline{g(s)\, f(t)}$, og derfor på alle trappefunktioner; da trappefunktionerne er et tæt underrum i $L^2(\dot{R}^2, \dot{C})$, er $K = o$ næsten overalt.

For $K \in L^2(\dot{R}^2, \dot{C})$, er også $(s,t) \to \overline{K(t,s)}$ en funktion i $L^2(\dot{R}^2, \dot{C})$; for f og $g \in H$ er $\int\int \overline{K(t,s)}\, f(t)\, \overline{g(s)}\, dtds =$ $\int f(t) \overline{\int K(t,s)g(s)ds}\, dt = (f|kg) = (k^* f|g)$; k^* er derfor en integral operator af Hilbert-Schmidt type med kernen K^*, hvor $K^*(s,t) = \overline{K(t,s)}$.

Specielt er k selvadjungeret, hvis kernen er Hermitesk, d.v.s. hvis $K(s,t) = \overline{K(t,s)}$ n.o.

Lemma: Lad $\{e_i | i \in I\}$ være en (ortonormal) tilnærmelsesbasis for H. Mængden af funktioner $(s,t) \to e_i(s)\overline{e_j(t)}$, $i,j \in I$, er en (ortonormal) tilnærmelsesbasis for $L^2(\dot{R}^2, \dot{C})$.

Bevis: For $K \in L^2(\dot{R}^2, \dot{C})$, så at, for alle $i,j \in I$, $\int K(s,t)e_i(s)\overline{e_j(t)}dm_2 = 0$, er $0 = \int\int K(s,t)e_j(t)dt\overline{e_i(s)}ds =$ $(k\, e_j | e_i)$; derfor er $k\, e_j = 0$ for alle j, og $k = o$, og dermed $K = 0$. Hvis $(e_i|e_j) = \delta_{ij}$, er $\int e_i(s)\, \overline{e_j(t)}\, e_k(s)\overline{e_l(t)}dm_2 =$ $\int e_i(s)\overline{e_k(s)}\, ds \int \overline{e_j(t)}e_l(t)dt = \delta_{ik}\, \delta_{lj}$.

~~Lad altså~~ (e_ν) være en ortonormal ~~tilnærmelsesbasis af egen-funktioner for~~ den normale kompakte operator k af ~~Hilbert-Schmidt type med kerne K.~~ Fourierkoefficienterne for K med hensyn til

9.2. Lad nu (f_n) være en følge af elementer i H, der konvergerer svagt mod 0, og er begrænset, $\|f_n\| \leqq a$. For næsten alle s vil da $\int f_n(t)\, \overline{K(s,t)}dt \to 0$, da $t \to K(s,t)$ er en funktion i H; da også $\left|\int K(s,t)f_n(t)dt\right|^2 \leqq a^2 \int |K(s,t)|^2 dt$, får vi ved sætningningen om majoriseret konvergens, idet $s \to \int |K(s,t)|^2 dt$ er integrabel, at $kf_n \to o$ i H.

Hvis k er normal, er k derfor kompakt.

Vi kan da vælge en endelig eller numerabel ortonormal tilnærmelsesbasis $(e_\nu)_{\nu \in N}$ for k H bestående af egenfunktioner for k svarende til egenværdierne $(\lambda_\nu)_{\nu \in N}$, idet vi tænker os egenværdierne $\neq 0$ ordnet, så at $|\lambda_1| \geqq |\lambda_2| \geqq \dots$, og hver egenværdi er skrevet så mange gange, som multipliciteten (dimensionen af det tilsvarende egenrum) angiver. Vi vælger desuden en ortonormal tilnærmelsesbasis $(e_\mu)_{\mu \in M}$ for egenrummet for k svarende til 0; tilsammen udgør disse mængder en ortonormal tilnærmelsesbasis for H.

Fourierkoefficienterne for K i den tilsvarende ortonormale tilnærmelsesbasis for $L^2(\dot{R}^2, \dot{C})$ er $(ke_j|e_i) = \lambda_j(e_j|e_i) = \lambda_j\delta_{ji}$, $i, j \in N \cup M$, idet vi sætter $\lambda_i = 0$ for $i \in M$; derfor er $\Sigma\{|\lambda_i|^2 \mid i \in N \cup M\} = \sum_{\nu \in N} |\lambda_\nu|^2 = \iint |K(s,t)|^2 dtds$, og $K(s,t) = \sum_{\nu \in N} \lambda_\nu e_\nu(s)\overline{e_\nu(t)}$, hvor rækken er endelig eller konvergerer i $L^2(\dot{R}^2, \dot{C})$.

9.3. Vi giver et andet bevis for et resultat i afsnit 2.

Lad $K \in L^2(\dot{R}^2, \dot{C})$, og lad $(e_\nu)_{\nu \in \dot{N}}$ være en vilkårlig ortonormal tilnærmelsesbasis for H. (H har jo dimensionen $\aleph_0$, da H indeholder en numerabel tæt delmængde og ikke har endelig dimension).

Lad K's Fourierkofficient efter funktionen $(s,t) \to e_i(s)\overline{e_j(t)}$ være λ_{ij}; K kan da approksimeres vilkårlig godt i $L^2(\mathring{R}^2, \mathring{C})$ med endelige summer af form $\Sigma\, \lambda_{ij}\, e_i(s)\overline{e_j(t)}$; så meget des mere kan k approksimeres i $L(H,H)_\lambda$ med endelige linearkombinationer af operatorerne V_{ij}, $(V_{ij}f)(s) = \int e_i(s)\overline{e_j(t)}f(t)dt$, d.v.s. $V_{ij}f = (f|e_j)e_i$, og V_{ij} H har dimensionen 1. k er således grænseværdi i $L(H,H)_\lambda$ for en følge af operatorer af endelig rang, og er derfor kompakt.

9.4. I dette afsnit vil vi antage, at vi har givet en målelig funktion $u:\mathring{R}^2 \to \mathring{C}$, der er lokalt kvadratisk integrabel, d.v.s. $u\cdot 1_{W_n} \in L^2(\mathring{R}^2,\mathring{C})$ for ethvert $n \in \mathring{N}$. For enhver trappefunktion f på $\mathring{R}$ er da $s \to \int u(s,t)f(t)dt$ en næsten overalt defineret målelig funktion Uf, og $Uf\cdot 1_{[-n,n]} \in H$ for ethvert $n \in \mathring{N}$; thi hvis f er nul uden for intervallet $[-m,m]$, har $s \to |Uf(s)\cdot 1_{[-n,n]}(s)|^2 = |\int u(s,t)1_{[-n,n]}(s)f(t)dt|^2$ den integrable majorant $s \to \int |u(s,t)1_{[-n,n]\times[-m,m]}|^2dt\cdot\int|f(t)|^2dt$. Vi vil antage, at $Uf \in H$, og at der findes $c \in \mathring{R}$, så at $\int|Uf(s)|^2ds \leqq c^2\int|f(t)|^2dt$, d.v.s. at U er en kontinuert lineær afbildning af trappefunktioner på $\mathring{R}$ forsynet med topologien induceret af normen $f \to [\int|f(t)|^2dt]^{\frac{1}{2}}$ ind i H. Da trappefunktionerne udgør en tæt delmængde af H, og H er et fuldstændigt rum, findes der én udvidelse, som vi igen betegner U, af U til en kontinuert lineær afbildning af H ind i H.

For en vilkårlig funktion $f \in H$ med begrænset støtte $st(f) \subseteq [-m,m]$, er $t \to u(s,t)f(t)$ integrabel for næsten alle s. Lad (f_n) være en følge af trappefunktioner med $st(f_n) \subseteq [-m,m]$, der konvergerer mod f i H. (Uf_n) konvergerer da mod Uf i H. For næsten alle s finder vi: $\left|\int u(s,t)f(t)dt - \int u(s,t)f_n(t)dt\right|^2 \leq$ $\left[\int |u(s,t)|\cdot|f(t)|dt\right]^2 \leq \int_{-m}^{m} |u(s,t)|^2\, dt \int |f(t)-f_n(t)|^2 dt \to 0.$ Fundamentalfølgen (Uf_n) i H konvergerer således mod $s \to \int u(s,t)f(t)dt$ for næsten alle s; ved hjælp af Fatous lemma anvendt på følgen $(|Uf_n-Uf|^2)$, der konvergerer næsten overalt mod $s \to \left|\int u(s,t)f(t)dt - Uf(s)\right|^2$, viser man let, at (Uf_n) konvergerer mod $s \to \int u(s,t)f(t)dt$ i H (jfr. Weyls bevis for Riesz-Fischers sætning). Derfor er $Uf(s) = \int u(s,t)f(t)dt$ for næsten alle s (eller nøjagtigere: den næsten overalt definerede funktion $s \to \int u(s,t)f(t)dt$ tilhører ækvivalensklassen Uf).

Lad nu f være en funktion i H, for hvilken $\int |u(s,t)f(t)|dt < \infty$ for næsten alle s. $(f\cdot 1_{[-n,m]})$ konvergerer mod f i H for $n,m \to \infty$; derfor vil $s \to \int_{-n}^{m} u(s,t)f(t)dt$ konvergere mod Uf i H. $u(s,t)f(t)\, 1_{[-n,m]}(t) \to u(s,t)f(t)$, og for næsten alle s er grænseovergangen majoriseret, idet $t \to |u(s,t)f(t)|$ er integrabel; derfor vil $\int_{-n}^{m} u(s,t)f(t)dt \to \int u(s,t)f(t)dt$ for næsten alle s. Som før slutter vi, at $Uf(s) = \int u(s,t)f(t)dt$ for næsten alle s.

Funktionen $(s,t) \to \overline{u(t,s)} = u^*(s,t)$ er også lokalt kvadratisk integrabel; for en vilkårlig trappefunktion f på $\dot{R}$ og $g \in H$ med begrænset støtte er da $(s,t) \to \overline{\overline{u(t,s)}f(t)\overline{g(s)}}$ integrabel, og $\iint \overline{u(t,s)}f(t)dt\overline{g(s)}ds = \int f(t) \overline{\int u(t,s)g(s)ds}\, dt = (f \mid Ug) =$ $(U^*f \mid g)$; vi kan sætte $g(s) = [U^*f(s) - \int \overline{u(t,s)}\, f(t)dt]1_{[-n,n]}(s)$, idet denne funktion $\in$ H og har begrænset støtte; herved finder vi, at $U^*f(s) = \int \overline{u(t,s)}\, f(t)dt$ for næsten alle $s \in [-n,n]$

for ethvert $n \in \dot{N}$, og derfor for næsten alle s. Derfor er $\int |\int u^*(s,t)f(t)dt|^2 ds = \int |U^*f(s)|^2 ds \leq \|U^*\|^2 \int |f(s)|^2 ds$ for enhver trappefunktion f på $\dot{R}$. U^* er derfor den entydigt bestemte kontinuerte udvidelse til H af afbildningen, der fører en trappefunktion f over i funktionen $s \to \int u^*(s,t)f(t)dt$.

Lad os lige bemærke, at den lineære afbildning, der på den beskrevne måde til visse lokalt kvadratisk integrable funktioner $u : \dot{R} \to \dot{C}$ lader svare operatorer $U \in L(H,H)$, er injectiv; thi hvis $U = o$, ser man let, at den til $u \cdot 1_{W_n}$ svarende integraloperator af Hilbert-Schmidt type er o, så at u er o næsten overalt i W_n for ethvert $n \in \dot{N}$, og derfor u er 0 næsten overalt.

Hvis specielt u er en begrænset målelig funktion, er u lokalt kvadratisk integrabel, og $t \to |u(s,t)f(t)|$ er integrabel for enhver funktion $f \in L^1(\dot{R},\dot{C})$. Vi har altså bevist

Lemma: Lad u være en lokalt kvadratisk integrabel funktion: $\dot{R}^2 \to \dot{C}$, og antag, at der findes $c \in \dot{R}$, så at $\int |\int u(s,t)f(t)dt|^2 ds \leq c^2 \int |f(s)|^2 ds$ for enhver trappefunktion f på $\dot{R}$. Afbildningen $f \to Uf$, $Uf(s) = \int u(s,t)f(t)dt$, kan udvides til en kontinuert lineær afbildning $U:H \to H$. For $f \in H$ er Uf grænseværdi i H for funktionerne $s \to \int_{-n}^{m} u(s,t)f(t)dt$, $n,m \to \infty$.

Hvis $U = 0$, er $u = o$ næsten overalt.

Hvis u specielt er en begrænset målelig funktion, er for enhver funktion $f \in H \cap L^1(\dot{R},\dot{C})$ $Uf(s) = \int u(s,t)f(t)dt$ for næsten alle s.

u^* opfylder de samme betingelser som u, og den tilsvarende operator er U^*.

Vi antager nu, at det er givet om u, at $\int \left| \int_a^b u(s,t)dt \right|^2 ds =$ $b-a$ og $\int \int_a^b u(s,t)dt \int_c^d \overline{u(s,\tau)d\tau} ds = 0$ for $-\infty < a \leq b \leq c \leq d < \infty$; dette udtrykker, at $\|U1_{[a,b]}\|^2 = b-a = \|1_{[a,b]}\|^2$ og $(U1_{[a,b]} | U1_{[c,d]}) = 0 = (1_{[a,b]} | 1_{[c,d]})$ for $]a,b[\cap]c,d[= \emptyset$.

Idet en vilkårlig trappefunktion f kan skrives $f = \Sigma \lambda_\nu 1_{I_\nu}$, hvor intervallerne I_ν er disjunkte, bliver $\|Uf\|^2 = \|\Sigma \lambda_\nu U1_{I_\nu}\|^2 = \Sigma |\lambda_\nu|^2 \|U1_{I_\nu}\|^2 = \Sigma |\lambda_\nu|^2 \|U1_{I_\nu}\|^2 = \Sigma |\lambda_\nu|^2 \|1_{I_\nu}\|^2 = \|f\|^2$; U er således en isometri på rummet af trappefunktioner, og den udvidede afbildning $U: H \to H$, er da også en isometri. U er derfor unitær, hvis og kun hvis værdimængden for U er tæt i H.

Da U er en isometri, er $U^*U = E$, og U er unitær, hvis også $UU^* = E$; dette gælder, hvis blot $(U^*f | U^*g) = (f|g)$ for alle f og g i et tæt underrum i H, f.eks. for alle trappefunktioner.

Vi ser på det specielle tilfælde, hvor u er symmetrisk, $u(s,t) = u(t,s)$. Da er $U^*f(s) = \int \overline{u(t,s)} f(t)dt = \int \overline{u(s,t)} f(t)dt = \overline{\int u(s,t) \overline{f}(t)dt} = \overline{U\overline{f}}$, og $(U^*f | U^*g) = \overline{(U\overline{f} | U\overline{g})} = (U\overline{g} | U\overline{f}) = (\overline{g} | \overline{f}) = (f|g)$; d.v.s. U er unitær, hvis blot U er isometrisk.

9.5. Vi viser nu specielt, at der findes et tal $k > 0$, så at operatoren F, svarende til funktionen $(s,t) \to k \exp(i\, st)$, er unitær. Ifølge afsnit 4 er det nok at undersøge $(F 1_{[a,b]} | F1_{[c,d]})$ for $a \leq b \leq c \leq d$ og for $a = c \leq b = d$.

Da $F1_{[a,b]}(s) = k \int_a^b \exp(i\, st)dt = k(i\, s)^{-1} [\exp(i\, sb) - \exp(i\, sa)]$, (singulariteten i o lappes trivielt), er $F1_{[a,b]} \in H$, og $F1_{[a,b]} \overline{F1_{[c,d]}} \in L^1(\check{R}, \check{C})$, og $(F1_{[a,b]} | F1_{[c,d]}) =$

$k^2 \int s^{-2}[\exp is(b-d)-\exp is(b-c) - \exp is(a-d) + \exp is(a-c)]ds =$

$k^2 \int s^{-2}[-(1-\cos(b-d)s) + (1-\cos(b-c)s) + (1-\cos(a-d)s) -$

$(1-\cos(a-c)s)]ds = k^2\kappa[-|b-d| + |b-c| + |a-d|-|a-c|] =$

$$\begin{cases} k^2\kappa 2(b-a) & \text{for } a = c \lesseqq b = d \\ o & \text{for } a \lesseqq b \lesseqq c \lesseqq d \end{cases},$$

hvor $\kappa = \int s^{-2}(1-\cos s)ds$, idet sinus-leddene går ud, da funktionerne er ulige, og $\int s^{-2}(1-\cos\alpha s)ds = |\alpha| \int \sigma^{-2}(1-\cos\sigma)d\sigma = \kappa|\alpha|$.

For $k = (2\kappa)^{\frac{1}{2}}$ får vi således en unitær operator.

Sætning. (Plancherel 1910): Afbildningen, der til $x \in L^1(\mathring{R},\mathring{C}) \cap L^2(\mathring{R},\mathring{C})$ lader svare funktionen $s \to (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int x(t)\exp(i\,st)dt$, kan udvides til en unitær operator F (Fourier-Plancherel operatoren) på $L^2(\mathring{R},\mathring{C})$; for $x \in L^2(\mathring{R},\mathring{C})$ er herved Fx grænseværdi i $L^2(\mathring{R},\mathring{C})$ for funktionerne $s \to (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-m}^{n} x(t)\exp(ist)dt, n,m \to \infty$; tilsvarende er $F^{-1}x(s) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int x(t)\exp(-ist)dt$ for $x \in L^1(\mathring{R},\mathring{C}) \cap L^2(\mathring{R},\mathring{C})$, og for $x \in L^2(\mathring{R},\mathring{C})$ er $F^{-1}x$ grænseværdi i $L^2(\mathring{R},\mathring{C})$ for funktionerne $s \to (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-n}^{m} x(t)\exp(-ist)dt, n,m \to \infty$.

Bevis: Vi mangler kun at bestemme k!

Lad x være funktionen $t \to \exp(-|t|)$; $x \in L^1(\mathring{R},\mathring{C}) \cap L^2(\mathring{R},\mathring{C})$ og $Ff(s) = k \int \exp(-|t|)\exp(ist)dt = k(is+1)^{-1}\exp[(is+1)t]\Big|_{-\infty}^{o} + k(is-1)^{-1}\exp[(is-1)t]\Big|_{o}^{\infty} = 2k(1+s^2)^{-1}$; derfor er $1 = x(o) = F^{-1}Fx(o) = 2k^2 \int (1+t^2)^{-1}dt = 2k^2\pi$, og $k = (2\pi)^{-\frac{1}{2}}$.

Man ser, at for $x \in L^2(\mathring{R},\mathring{C})$ er $F^{-1}x(s) = Fx(-s)$ for næsten alle s.

§ 2. Lineære integralligninger med symmetrisk kerne.

De følgende undersøgelser vedrører vektorrummet $C_2[a,b]$ bestående af de i et givet begrænset interval $[a,b]$, $a < b$, kontinuerte reelle funktioner med det indre produkt

$$\varphi\cdot\psi = \int_a^b \varphi(t)\psi(t)dt.$$

Foruden den dertil hørende 2-norm

$$\|\varphi\|_2 = (\varphi\cdot\varphi)^{\frac{1}{2}}$$

vil det være nødvendigt at inddrage normen

$$\|\varphi\|_\infty = \sup_{t\in[a,b]} |\varphi(t)|.$$

Der gælder uligheden

$$\|\varphi\|_2 = \left(\int_a^b \varphi(t)^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \leq \|\varphi\|_\infty (b-a)^{\frac{1}{2}}.$$

En mængde Φ af funktioner i $C_2[a,b]$ kan være ensartet begrænset med hensyn til den ene eller den anden af de to normer. Hvis $\|\varphi\|_2$ er begrænset for $\varphi \in \Phi$, siges funktionsmængden Φ at være (ensartet) norm-begrænset. Hvis $\|\varphi\|_\infty$ er begrænset for $\varphi \in \Phi$, siges funktionsmængden Φ at være (ensartet) ligelig begrænset. (Ordet "ensartet" kan uden fare for misforståelser udelades her, idet hver enkelt funktion i $C_2[a,b]$ jo er begrænset.) Af ovenstående ulighed ses, at hvis en funktionsmængde er ligelig begrænset er den også norm-begrænset. Det omvendte gælder derimod ikke, da der findes funktioner med en given 2-norm, som antager vilkårlig store værdier. Tilsvarende er det nødvendigt at skelne mellem 2 slags konvergens af funktionsfølger. Hvis det for en følge $\varphi_i \in C_2[a,b]$, $i \in \mathbb{N}$, og en funktion $\varphi \in C_2[a,b]$ gælder, at $\|\varphi - \varphi_i\|_2$ konvergerer mod 0, siges følgen at konvergere i norm mod φ. Hvis $\|\varphi - \varphi_i\|_\infty$ konvergerer mod 0, siges følgen at konvergere ligeligt mod φ. Ovenstående ulighed viser, at ligelig konvergens medfører konvergens i norm. Det omvendte er ikke rigtigt.

Da der i denne paragraf kun vil være tale om et fast interval $[a,b]$ og alle integrationer udstrækkes over dette, betegnes det betragtede rum kort med C_2, og integrationsgrænserne udelades.

Lad der være givet en reel og kontinuert funktion $K(s,t)$ defineret i $[a,b] \times [a,b]$. For hver funktion $\varphi \in C_2$ er da

$$\psi(s) = \int K(s,t)\varphi(t)dt$$

en kontinuert funktion i $[a,b]$. Da $[a,b] \times [a,b]$ er en begrænset og afsluttet delmængde af R^2, er nemlig K ligelig kontinuert. For hvert tal $\varepsilon > 0$ findes der altså et tal $\delta > 0$, således at

$$|K(s'',t'')-K(s',t')| \leqq \varepsilon$$

for $s',t',s'',t'' \in [a,b]$, $|s'' - s'| + |t'' - t'| \leqq \delta$. Med benyttelse af Cauchy-Schwarz's ulighed fås da for $|s'' - s'| \leqq \delta$, at

$$|\psi(s'') - \psi(s')| = \left|\int(K(s'',t) - K(s',t))\varphi(t)dt\right|$$

$$\leqq \left(\int (K(s'',t) - K(s',t))^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \|\varphi\|_2 \leqq \varepsilon(b - a)^{\frac{1}{2}}\|\varphi\|_2 .$$

Heraf ses, at ψ er kontinuert, som påstået. Ved $\varphi \to k(\varphi) = \psi$ defineres følgelig en afbildning $k: C_2 \to C_2$, som øjensynlig er en lineær operator. Den er fuldstændig bestemt ved funktionen K og kaldes en lineær integraloperator med kernen K.

Af den fundne ulighed følger imidlertid meget mere. Lad Φ være en norm-begrænset mængde af funktioner i C_2, og lad γ være en konstant, således at $\|\varphi\|_2 \leqq \gamma$ for $\varphi \in \Phi$. Om mængden $k(\Phi)$ af de funktioner ψ, som ved k svarer til funktionerne $\varphi \in \Phi$, gælder, at der for hvert tal $\varepsilon > 0$ findes et tal $\delta > 0$, således at

$$|\psi(s'') - \psi(s')| \leqq \varepsilon(b-a)^{\frac{1}{2}}\gamma$$

for alle $\psi \in k(\Phi)$ og alle $s',s'' \in [a,b]$, for hvilke $|s'' - s'| \leqq \delta$.

Dette vil sige, at funktionsmængden $k(\Phi)$ er ensartet ligelig kontinuert. Den er også (ensartet) ligelig begrænset; thi med betegnelsen

$$M = \sup_{s,t\in[a,b]} |K(s,t)|$$

haves for hvert $\psi \in k(\Phi)$ og hvert $s \in [a,b]$

$$|\psi(s)| = \left|\int K(s,t)\varphi(t)dt\right|$$

$$\leqq \left(\int K(s,t)^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \|\varphi\|_2 \leqq M(b-a)^{\frac{1}{2}}\|\varphi\|_2,$$

altså

$$\|\psi\|_\infty \leqq M(b-a)^{\frac{1}{2}}\gamma .$$

Funktionsmængden $k(\Phi)$ opfylder altså forudsætningerne i Ascoli's sætning, nemlig for $X = Y = \mathring{R}$ med den numeriske værdi som norm og $\Omega = [a,b]$. Ifølge denne sætning har altså hver følge $\psi_i = k(\varphi_i) \in k(\Phi)$, $i \in \mathring{N}$, en delfølge, som konvergerer ligelig, altså også i norm, mod en kontinuert funktion ψ. Dette viser, at hver norm-begrænset følge $\varphi_i \in C_2$, $i \in \mathring{N}$, har en delfølge φ_{i_ν}, $\nu \in \mathring{N}$, således at de tilsvarende funktioner $\psi_{i_\nu} = k(\varphi_{i_\nu})$ konvergerer i norm mod en funktion i C_2. Dermed er bevist:

<u>Hver lineær integraloperator i</u> $C_2[a,b]$ <u>med kontinuert kerne er totalkontinuert</u>.

Ved en <u>lineær integralligning af anden art</u> eller en <u>Fredholmsk integralligning</u> forstås en ligning af formen

$$\lambda\varphi(s) - \int K(s,t)\varphi(t)dt = \alpha(s),$$

hvor λ er et givet reelt tal, α en given funktion tilhørende C_2 og <u>kernen</u> K en given kontinuert funktion i $[a,b] \times [a,b]$. Der søges de funktioner $\varphi \in C_2$, der tilfredsstiller ligningen for alle $s \in [a,b]$. (Ved en lineær integralligning af første art forstås en tilsvarende ligning uden leddet $\lambda\varphi$; en sådan foreligger f.eks., når det drejer sig om at bestemme en funktion med en given Fouriertransformeret. Disse ligningers almene teori frembyder store vanskeligheder.) Med betegnelserne e for den identiske afbildning af C_2 og k for integraloperatoren kan den betragtede integralligning kort skrives

$$(\lambda e - k)(\varphi) = \alpha .$$

De almene sætninger om lineære afbildninger af et vektorrum ind i sig selv giver følgende oplysninger om ligningens løsningsmængde: Den homogene ligning $(\lambda e - k)(\varphi) = 0$ har et underrum i C_2 som løsningsmængde. Det består kun af nulfunktionen, hvis λ ikke er egenværdi for k, og er ellers det til egenværdien λ hørende egenrum. Hvis den inhomogene ligning overhovedet har en løsning, fås samtlige løsninger ved til en af dem at addere samtlige løsninger til den homogene ligning. Løsningsmængden er altså et sideunderrum. Hvis λ ikke er egenværdi for k, har ligningen altså højst een løsning. Eksistensspørgsmålet behandles i det følgende kun for en symmetrisk operator k.

Det forudsættes nu, at kernen K er symmetrisk, d.v.s. at $K(s,t) = K(t,s)$ for $s,t \in [a,b]$. Operatoren k er da symmetrisk, idet der for vilkårlige funktioner $\varphi,\psi \in C_2$ gælder

$$\begin{aligned} k(\varphi)\cdot\psi &= \int\left(\int K(s,t)\varphi(t)dt\right)\psi(s)ds \\ &= \iint K(s,t)\varphi(t)\psi(s)dt\,ds \\ &= \int\varphi(t)\left(\int K(t,s)\psi(s)ds\right)dt = \varphi\cdot k(\psi). \end{aligned}$$

Spektralsætningen for totalkontinuerte symmetriske operatorer (AG III,16) kan følgelig anvendes på k. Idet der ses bort fra tilfældet, at K er identisk 0, findes der ifølge denne sætning en endelig eller numerabel mængde af fra 0 forskellige egenværdier for k, som hver har endelig multiplicitet. De betegnes med $\lambda_1,\lambda_2,\dots$, idet hver tages med så mange gange, som dens multiplicitet angiver. Der findes endvidere et endeligt eller numerabelt ortonormalsystem af funktioner $u_1, u_2, \dots$ i C_2, således at u_i er egenfunktion hørende til egenværdien λ_i. Lad U være det af funktionerne u_i udspændte underrum i C_2. Hvis og kun hvis det til U ortogonale underrum $U^\perp$ indeholder fra nulfunktionen forskellige funktioner, altså hvis og kun hvis ortonormalsystemet ikke er maximalt, er også 0 egenværdi, og $U^\perp$ er det tilhørende egenrum. Dette kan være uendelig-dimensionalt.

Hvis der findes uendelig mange egenværdier λ_i, konvergerer disse mod 0. For integraloperatorer gælder endda, at egenværdiernes kvadratsum er konvergent. For hver egenfunktion u_i hørende til egenværdien λ_i er nemlig

$$\int K(s,t)u_i(t)dt = \lambda_i u_i(s),$$

hvilket viser, at $\lambda_i u_i(s)$ for hvert fast s er Fourierkoefficienten for $K(s,t)$ som funktion af t med hensyn til ortonormalsystemet $u_1, u_2, \dots$. Ifølge Bessel's ulighed har man altså for hvert $s \in [a,b]$ og hvert $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 u_i(s)^2 \leq \int K(s,t)^2 dt,$$

og integration med hensyn til s giver

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \leq \iint K(s,t)^2 ds\, dt,$$

hvoraf påstanden følger.

De tidligere resultater viser endvidere, at hvis der findes uendelig mange λ_i, vil rækken

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i (\varphi \cdot u_i) u_i$$

for hvert $\varphi \in C_2$ konvergere i norm mod $k(\varphi)$. Det skal vises, at den konvergerer ligelig. For $p,q \in \mathring{N}$, $p < q$, fås ved hjælp af Cauchy-Schwarz's ulighed

$$\left| \sum_{i=p+1}^{q} \lambda_i (\varphi \cdot u_i) u_i(s) \right|^2 \leq \sum_{i=p+1}^{q} (\varphi \cdot u_i)^2 \sum_{i=p+1}^{q} \lambda_i^2 u_i(s)^2 .$$

Den anden sum på højre side kan vurderes ved hjælp af den første af ovenstående uligheder:

$$\sum_{i=p+1}^{q} \lambda_i^2 u_i(s)^2 \leq \sum_{i=1}^{q} \lambda_i^2 u_i(s)^2 \leq \int K(s,t)^2 dt \leq M^2(b-a),$$

hvor $M = \sup K(s,t)$. Til et givet positivt tal ε findes der et nummer m, således at

$$\sum_{i=p+1}^{q} (\varphi \cdot u_i)^2 \leq \frac{\varepsilon^2}{M^2(b-a)} \qquad \text{for } q > p \geq m;$$

thi $\varphi \cdot u_i$, $i \in \mathring{N}$, er Fourierkoefficienterne for φ med hensyn til ortonormalsystemet u_i, $i \in \mathring{N}$, og har altså en konvergent kvadratsum. Dette viser, at

$$\left| \sum_{i=p+1}^{q} \lambda_i (\varphi \cdot u_i) u_i(s) \right| \leq \varepsilon \qquad \text{for } q > p \geq m$$

og alle $s \in [a,b]$. Dermed er den ligelige konvergens og dermed (på ny) konvergensen i norm af rækken bevist. Summen i norm vides at være $k(\varphi)$. Følgelig gælder med ligelig konvergens i $s \in [a,b]$

$$\int K(s,t)\varphi(t)dt = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i u_i(s) \int \varphi(t) u_i(t) dt$$

for hver funktion $\varphi \in C_2$. Hvis der kun findes endelig mange egenværdier λ_i, gælder ligningen, når den uendelige række erstattes med den tilsvarende endelige sum.

Er λ et tal forskelligt fra 0 og fra de fra 0 forskellige egenværdier λ_i, har operatoren $\lambda e-k$, som vist tidligere, en i hele rummet C_2 defineret invers $(\lambda e-k)^{-1}$. Med andre ord, ligningen $\lambda\varphi - k(\varphi) = \alpha$ har for hver funktion $\alpha \in C_2$ en (og kun een) løsning φ. Denne har en fremstilling af formen

$$\varphi = \lambda^{-1}\alpha + \lambda^{-1} \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i(\lambda-\lambda_i)^{-1}(\alpha\cdot u_i)u_i,$$

hvor rækken konvergerer i norm, hvis der findes uendelig mange λ_i, og skal erstattes med den tilsvarende endelige sum, hvis der kun findes endelig mange λ_i. I det første tilfælde vil denne række være ligelig konvergent. Beviset forløber ganske som ovenstående for den ligelige konvergens af rækken for $k(\varphi)$. Bortset fra, at φ er erstattet med α, består forskellen mellem de to rækker bare i faktoren $(\lambda - \lambda_i)^{-1}$ i den sidstes led. Ifølge forudsætningerne om λ, og da $\lambda_i \to 0$ for $i \to \infty$, konvergerer følgen $|\lambda-\lambda_i|^{-1}$ mod $|\lambda|^{-1}$ og er altså begrænset. Lad c være dens øvre grænse. Man har da

$$\sum_{i=p+1}^{q} \lambda_i^2(\lambda-\lambda_i)^{-2}u_i^2 \leqq c^2 \sum_{i=p+1}^{q} \lambda_i^2 u_i^2 ,$$

og vurderingerne kan gennemføres som før. Integralligningens løsning fremstilles altså ved den ligelig konvergente række

$$\varphi(s) = \lambda^{-1}\alpha(s) + \lambda^{-1} \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i(\lambda - \lambda_i)^{-1}u_i(s)\int\alpha(t)u_i(t)dt.$$

Er λ lig med en af egenværdierne λ_j, har integralligningen kun løsninger, når α er ortogonal til de til λ_j hørende egenfunktioner; thi er u en sådan egenfunktion, fås af $\lambda\varphi - k(\varphi) = \alpha$ ved indre multiplikation med u, at $\lambda\varphi\cdot u - k(\varphi)\cdot u = \alpha\cdot u$, og den venstre side er 0, da $k(\varphi)\cdot u = \varphi\cdot k(u) = \lambda_j\varphi\cdot u$ på grund af operatorens symmetri. Denne nødvendige betingelse for løsbarhed er som vist tidligere (III,§16) også tilstrækkelig. En løsning ψ fås ved simpelthen i ovenstående række for φ at udelade de meningsløse led svarende til de endelig mange numre i, for hvilke $\lambda_i = \lambda$. Den resterende række vil også være ligelig konvergent, idet λ for denne opfylder den forudsætning, under hvilken den ligelige konvergens af rækken for φ blev vist. Enhver anden løsning fås ved til ψ at addere en egenfunktion hørende til egenværdien λ.

Sammenfattende kan altså siges:

Hver lineær integraloperator k i $C_2[a,b]$, hvis kerne er kontinuert, symmetrisk og ikke identisk 0, har en ikke tom og højst numerabel mængde af fra 0 forskellige egenværdier, der hver har endelig multiplicitet. Desuden kan 0 være egenværdi med endelig eller uendelige multiplicitet.

De fra 0 forskellige egenværdier $\lambda_1,\lambda_2,\ldots$, hver taget med så mange gange som multipliciteten angiver, har en konvergent kvadratsum, når der er uendelig mange af dem. Den til en funktion $\varphi \in C_2[a,b]$ svarende funktion $k(\varphi)$ kan udvikles i en endelig eller ligelig konvergent række efter funktionerne $u_1,u_2,\ldots$ i et ortonormalsystem af egenfunktioner hørende til henholdsvis $\lambda_1,\lambda_2,\ldots$. Operatoren k afbilder altså $C_2[a,b]$ ind i den ligelige afslutning $\overline{U}_\infty$ af det af funktionerne u_i frembragte underrum $U \subsetneq C_2[a,b]$.

Integralligningen $\lambda\varphi - k(\varphi) = \alpha$ har, når λ er forskellig fra 0 og fra alle λ_i, en og kun een løsning. Når λ er lig med en af egenværdierne λ_i, har ligningen uendelig mange eller ingen løsninger, efter som α er eller ikke er ortogonal til alle til λ hørende egenfunktioner. Løsningerne kan fremstilles ved hjælp af endelige eller ligelig konvergente rækkeudviklinger efter egenfunktionerne u_i. Nødvendige betingelser for, at ligningen har en løsning for $\lambda = 0$, er at $\alpha \in \overline{U}_\infty$, og at α er ortogonal til de til 0 hørende egenfunktioner, hvis sådanne findes. Disse betingelser er i almindelighed ikke tilstrækkelige.

Bestemmelsen af egenværdier og egenfunktioner for en integraloperator k kan reduceres til et algebraisk problem, når k er af endelig rang r, d.v.s. når k afbilder C_2 på et r-dimensionalt underrum. En operator er af rang r, hvis og kun hvis dens kerne kan skrives

$$K(s,t) = \sum_{i=1}^{r} a_i \kappa_i(s) \kappa_i(t) \ ,$$

hvor $\kappa_1, \ldots, \kappa_r$ er lineært uafhængige funktioner i C_2 og $a_1, \ldots, a_r$ konstanter. At en operator af denne form har rangen r, følger af, at

$$k(\varphi) = \sum_{i=1}^{r} a_i (\kappa_i \cdot \varphi) \kappa_i$$

for hvert $\varphi \in C_2$ er en linearkombination af $\kappa_1, \ldots, \kappa_r$. Det omvendte ses således: Hvis k har rangen r, findes der et ortonormalsystem bestående af r egenfunktioner $u_1, \ldots, u_r$ hørende til fra 0 forskellige egenværdier $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$. Alle til $u_1, \ldots, u_r$ ortogonale funktioner i C_2 er egenfunktioner til egenværdien 0. Formlen for $k(\varphi)$ (side I, 2, 6) kan da skrives

$$\int \Big(K(s,t) - \sum_{i=1}^{r} \lambda_i u_i(s) u_i(t) \Big) \varphi(t) dt = 0.$$

Funktionen i parentesen er altså for hvert fast s ortogonal til alle $\varphi \in C_2$, altså identisk 0, hvilket viser, at K har en fremstilling af den forlangte form.

De til fra 0 forskellige egenværdier hørende egenfunktioner u for en kerne af ovenstående form må være linearkombinationer af $\kappa_1, \ldots, \kappa_r$. Sættes

$$u = x_1 \kappa_1 + \ldots + x_r \kappa_r \ ,$$

drejer det sig om at bestemme et tal λ samt tallene $x_1,\dots,x_r$ således, at

$$\int \sum_{i=1}^{r} a_i\kappa_i(s)\kappa_i(t) \sum_{j=1}^{r} x_j\kappa_j(t)\ dt = \lambda \sum_{j=1}^{r} x_j\kappa_j(s) \ .$$

Da funktionerne $\kappa_i(s)$ er lineært uafhængige, er dette ensbetydende med

$$\sum_{j=1}^{r}\left(\int a_i\kappa_i(t)\kappa_j(t)\ dt\right)x_j = \lambda x_i \ , \qquad i = 1,\dots,r.$$

Der foreligger altså egenværdiproblemet for matricen med integralerne i parentesen som elementer.

Man kan vise, at hver kontinuert kerne k kan approksimeres med kerner af endelig rang, og at de sidstes egenværdier og egenvektorer tilnærmer egenværdier og egenfunktioner for k.

Ovenstående resultater kan generaliseres i forskellige retninger. For det første kan man erstatte $C_2[a,b]$ med $C_2(\Omega)$, hvor Ω er et afsluttet og begrænset område i et endelig-dimensionalt talrum. Teorien kan da gennemføres uden væsentlige ændringer. For det andet giver mangfoldige anvendelser anledning til at tage ubegrænsede intervaller, f.eks. $[a,\infty[$ og $]-\infty,\infty[$, eller ikke-kontinuerte kerner i betragtning. Man går da over til L_2-rum. Integraloperatorer i disse er totalkontinuerte for en meget omfattende klasse af kerner, og for symmetriske sådanne kerner gælder sætninger, der ganske svarer til de ovenfor beviste.

Vedrørende ikke-symmetriske integraloperatorer k i $C_2[a,b]$ med kontinuert kerne $K(s,t)$ nævnes følgende: Enhver sådan integraloperator har en adjungeret k', som også er en integraloperator, nemlig med kernen $K'(s,t) = K(t,s)$. De to operatorer k og k' har de samme egenværdier med de samme multipliciteter. (Men egenfunktionerne er i almindelighed forskellige.) Der gælder følgende, først af I. Fredholm beviste sætning: Integralligningen $\lambda\varphi - k(\varphi) = \alpha$ har, når λ er forskellig fra 0 og fra alle eventuelle egenværdier for k, for hver funktion $\alpha \in C_2[a,b]$ en og kun een løsning φ. Er λ en egenværdi for k, har ligningen løsninger, hvis og kun hvis α er ortogonal til alle til λ hørende egenfunktioner for den adjungerede operator k'. Beviset for eksistensen af løsninger kan ikke føres med de i det symmetriske tilfælde benyttede hjælpemidler, og specielt vil løsningerne ikke kunne udtrykkes ved egenfunktioner, da sådanne ikke behøver at eksistere. Fredholms bevis beror på et af ham udviklet modstykke til determinantteorien. Et andet bevis benytter approksimation af kernen ved kerner af endelig rang. Om en rækkeudvikling efter "itererede kerner" (C. Neumann's række),som giver løsningen for tilstrækkelig store $|\lambda|$, handler øv. 3. Også for ikke symmetriske kerner kan teorien udvikles i L_2-rum.

§ 12 Lebesgue-Stieltjes integralet.

Et topologisk rum T kaldes lokal kompakt, hvis det er et Hausdorff rum, og ethvert punkt har en kompakt omegn.

Man ser let, at i et lokal kompakt rum har filtret af omegne af et vilkårligt punkt en basis bestående af kompakte mængder.

$\dot{R}^n$ er åbenbart et lokal kompakt rum for ethvert $n \in \dot{N}$.

Enhver åben delmængde af et kompakt rum er lokal kompakt; omvendt findes der for ethvert lokal kompakt rum T mindst ét (som regel adskillige) par $(\hat{T},\varphi)$, hvor $\hat{T}$ er et kompakt rum og φ er en homeomorfi af T på en åben, tæt delmængde af $\hat{T}$; $\hat{T}$, eller korrektere $(\hat{T},\varphi)$, kaldes en kompaktificering af T; således er en cirkel og et afsluttet, begrænset interval $\subset \dot{R}$ forskellige kompaktificeringer af $\dot{R}$, og Riemannkuglen og den projective plan og den hyperbolske plan er forskellige kompaktificeringer af $\dot{R}^2$. For at bevise eksistensen betragter vi, hvis ikke T selv er kompakt, et rum T_∞, hvis punkter dels er punkterne i T og dels ét ekstra punkt ∞; vi topologiserer T_∞, idet vi fastsætter, at en mængde $O \subseteqq T_\infty$ er åben, hvis $O \cap T$ både er åben i T og enten er O eller indeholder komplementærmængden til en kompakt delmængde af T; en basis for filtret af omegne af ∞ bliver $\{T_\infty \setminus K \mid K$ er en kompakt delmængde af $T\}$, den relative topologi på T falder sammen med den givne topologi, og $\overline{T} = T_\infty$; man ser let, at T_∞ er et kompakt rum og dermed en kompaktificering, ét-punkts kompaktificeringen eller Aleksandroff kompaktificeringen, af T.

Ved et mål på et kompakt rum T vil vi forstå et element i det duale rum til Banachrummet $C(T,\dot{R})$; målene på T udgør således selv et Banachrum over $\dot{R}$.

Ved et mål μ på et lokal kompakt rum T vil vi forstå en lineær afbildning ind i $\dot{R}$ af vektorrummet $\check{K}(T,\dot{R})$ af kontinuerte reelle funktioner på T med kompakt støtte, der opfylder:

For enhver kompakt delmængde $K \subseteq T$ findes der $c(K) \in \dot{R}$, så at $|\mu(f)| \leq c(K) \sup\{|f(t)| \mid t \in T\}$ for enhver funktion $f \in \dot{K}(T, \dot{R})$ med støtte $st(f) \subseteq K$. 1)

Vi ser, at definitionen reduceres til definitionen af et mål på et kompakt rum, dersom T specielt er kompakt; men bemærk, at et mål på et kompakt interval I og et mål på $\mathring{I}$ er forskellige begreber.

Bemærkning: Man kan forsyne $\dot{K}(T,\dot{R})$ med en topologi, med hensyn til hvilken det er et fuldstændigt topologisk vektorrum, og så at det duale rum til dette rum netop er mængden af mål på T.

Et mål μ på det lokal kompakte rum T kaldes begrænset, hvis der findes $c \in \dot{R}$, så at $|\mu(f)| \leq c \sup\{|f(t)| \mid t \in T\}$ for ethvert $f \in \dot{K}(T,\dot{R})$, d.v.s. hvis μ tilhører det duale rum til det normerede vektorrum, vi får ved at forsyne $\dot{K}(T,\dot{R})$ med normen $f \to \sup\{|f(t)| \mid t \in T\}$.

12.2. Lad F være en reel funktion på $\dot{R}$.

Vi minder om, at F siges at være af begrænset variation på intervallet $[a,b]$, hvis $VF(a,b) = \sup\{\sum_{k=1}^{n} |F(x_k) - F(x_{k-1})| \mid a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\} < \infty$; vi vil sige, at F er af lokalt begrænset variation, hvis F er af begrænset variation på ethvert begrænset interval, og at F er af begrænset variation på $\dot{R}$, hvis $VF(-\infty,\infty) = \sup\{VF(a,b) \mid -\infty < a < b < \infty\} < \infty$.

Idet vi sætter $VF(a,b) = -VF(b,a)$ for $b < a$, er $t \to VF(a,t)$ for et vilkårligt $a \in \dot{R}$ en monotont voksende reel funktion på $\dot{R}$, hvis F er af lokalt begrænset variation; desuden er $t \to VF(a,t) - F(t)$ voksende; da $V(-F)(a,t) = VF(a,t)$, er også $t \to VF(a,t)+F(t)$

1) Mængden af mål på T er et underrum i det algebraisk duale rum til $\dot{K}(T,\dot{R})$.

voksende; funktionerne $t \to V^+F(a,t) = \frac{1}{2}(VF(a,t) + F(t) - F(a))$ og $t \to V^- F(a,t) = \frac{1}{2}(VF(a,t) - F(t) + F(a))$ kaldes den positive, henholdsvis den negative, variation af F ud fra a; de opfylder $V^+F(a,\cdot) + V^-F(a,\cdot) = VF(a,\cdot)$ og $V^+F(a,\cdot) - V^-F(a,\cdot) = F(t) - F(a)$, og er monotont voksende (jfr. $F = F^+ - F^-$, $|F| = F^+ + F^-$); hvis F er af begrænset variation på $\dot{R}$, er $V^+F(a,\cdot)$ og $V^-F(a,\cdot)$ begrænsede funktioner. Omvendt ser man, at differensen mellem to monotone funktioner er af lokalt begrænset variation, og at differensen mellem to monotone begrænsede funktioner er af begrænset variation på $\dot{R}$, idet for to monotone funktioner G og H $V(G-H)(a,b) \leq G(b) - G(a) + H(b) - H(a)$.

For en kontinuert reel funktion f på et kompakt interval $[a,b]$ er Riemann-Stieltjes integralet $\int_a^b fdF$ defineret, hvis F er af begrænset variation på $[a,b]$, og $\left|\int_a^b fdF\right| = \left|\int_a^b fdV^+F(a,\cdot) - \int_a^b fdV^- F(a,\cdot)\right| \leq \left|\int_a^b fdV^+F(a,\cdot)\right| + \left|\int_a^b fdV^-F(a,\cdot)\right| \leq \int_a^b |f|dV^+F(a,\cdot) + \int_a^b |f|dV^-F(a,\cdot) = \int_a^b |f|dVF(a,\cdot) \leq VF(a,b)$ $\sup\{|f(t)| \mid t \in [a,b]\}$. Heraf, og af lineariteten af afbildningerne $f \to \int_a^b fdF$ og $F \to \int_a^b fdF$, følger:

Hvis F er af begrænset variation på $[a,b]$, er $f \to \int_a^b fdF$ et mål på $[a,b]$ med norm $\leq VF(a,b)$. Hvis F er af lokalt begrænset variation, er $f \to \int fdF$ et mål på $\dot{R}$. Hvis F er af begrænset variation på $\dot{R}$, er dette mål på $\dot{R}$ begrænset med norm $\leq VF(-\infty,\infty)$. I hvert af de tre tilfælde er afbildningen, der til funktion lader svare mål, lineær.

En funktion, der tilhører kernen af en af disse afbildninger, antager samme værdi i ethvert af sine kontinuitetspunkter og, i første tilfælde, i punkterne a og b.

Bevis. Vi betragter først andet og tredie tilfælde. Lad s og $t > s$ være to kontinuitetspunkter for F, og lad $\varepsilon > 0$ være givet; s og t er også kontinuitetspunkter for $VF(s,\cdot)$; vi vælger $\delta > 0$, så at $VF(s-\delta,s) < \varepsilon$ og $VF(t,t+\delta) < \varepsilon$ og bestemmer $g \in C(\dot{R},[0,1])$, så at g er 1 på $[s,t]$ og 0 udenfor $[s-\delta,t+\delta]$; da er $|F(t)-F(s)| = |\int_s^t 1dF| = \left|\int gdF - \int_{s-\delta}^{s} gdF - \int_t^{t+\delta} gdF\right| \leq \int_{s-\delta}^{s} dVF(s-\delta,\cdot) + \int_t^{t+\delta} dVF(t,\cdot) = VF(s-\delta,s) + VF(t,t+\delta) < 2\varepsilon$; derfor er $F(s) = F(t)$.

I første tilfælde betragter vi et kontinuitetspunkt $t \in]a,b[$ og, til $\varepsilon > 0$, en funktion $g \in C([a,b],[0,1])$, der er 1 på $[a,t]$ og 0 på $[t+\delta,b]$, hvor δ er bestemt, så at $0 < \delta < b - t$ og $VF(t,t+\delta) < \varepsilon$; vi får da som før $F(t) = F(a)$; desuden er $0 = \int_a^b 1dF = F(b) - F(a)$.

Bemærkning: Det er ikke svært at vise, at omvendt alle disse funktioner tilhører kernerne, idet man benytter, at funktionerne er konstante i tætte mængder (da de er af lokalt begrænset variation, har de højst numerabelt mange diskontinuitetspunkter), der indeholder a og b i første tilfælde, og at de funktioner, der skal integreres, er ligeligt kontinuerte. Vi giver et andet bevis senere i paragraffen.

12.3. Vi antager igen, at vi har givet et lokal kompakt rum T. 1)

<u>Lemma</u>: Ethvert positivt lineært funktional μ på $\dot{K}(T,\dot{R})$ er et mål.

Bevis: Lad K være en kompakt delmængde af T. Antag, at T ikke er kompakt. K og $\{\infty\}$ er disjunkte afsluttede delmængder af

1) Om to mål μ og ν på T siger vi, at $\mu \geq \nu$, hvis $\mu(f) \geq \nu(f)$ for $f \in \dot{K}(T,[0,\infty[)$.

det normale rum T_∞, og har derfor disjunkte åbne omegne U og V; vi bestemmer en funktion $f_1 \in C(T_\infty, [0,1])$, der er 1 på K og o uden for U; sammentrækningen f af f_1 til T har kompakt støtte og er 1 på K. Hvis T er kompakt, sætter vi $f = 1$. I begge tilfælde får vi for en kontinuert funktion g med $st(g) \subseteq K$, at $|g| \leqq \sup\{|g(t)| \mid t \in T\} f$, og $|\mu(g)| = |\mu(g^+ - g^-)| \leqq \mu(g^+) + \mu(g^-) = \mu(|g|) \leqq \sup\{|g(t)| \mid t \in T\}\mu(f)$. μ er således et mål.

<u>Lemma</u>: Lad f, g og h være positive kontinuerte funktioner, for hvilke $f \leqq g+h$; der findes positive kontinuerte funktioner f_g og f_h, så at $f_g \leqq g$, $f_h \leqq h$, og $f = f_g + f_h$.

Bevis: Da $f \leqq g + h$ er $f \leqq (f+h) \wedge (g+h) = f \wedge g+h$; vi kan derfor sætte $f_g = f \wedge g$ og $f_h = f - f \wedge g$.

Lemma: Lad m være en additiv afbildning af $\grave{K}(T, [o,\infty[)$ ind i $[o,\infty[$. Der findes en og kun én udvidelse af m til et mål μ på T.

Bevis: Da m er additiv, er $qm(pq^{-1}f) = pm(f)$ for $f \in \grave{K}(T, [o,\infty[)$ og $p, q \in \grave{N}$; da funktionen $t \to m(tf)$ er monoton $[o,\infty[\to [o,\infty[$, idet $m(sf) = m(tf) + m((s-t)f) \geqq m(tf)$ for $0 \leqq t \leqq s$, og antager samme værdi som den lineære funktion $t \to tm(f)$ for alle rationale $t \geqq 0$, er funktionerne ens, $m(tf) = tm(f)$ for alle $t \geqq 0$, idet $tm(f) =$ *) / Hvis f, g, h og $k \in \grave{K}(T, [o,\infty[)$ opfylder $f - g = h - k$, så er $f+k = g + h$, $m(f) + m(k) = m(g) + m(h)$, og $m(f) - m(g) = m(h) - m(k)$. Enhver funktion $f \in \grave{K}(T, \grave{R})$ kan skrives som differens af to funktioner g og $h \in \grave{K}(T, [o,\infty[)$; for en vilkårli sådan opspaltning $f = g - h$ definerer vi $\mu(f) = m(g) - m(h)$; μ er da en veldefineret udvidelse af m. μ er additiv, idet $f_1 = g_1 - h_1$, $f_2 = g_2 - h_2$ med $g_1, g_2, h_1, h_2 \in \grave{K}(T, [o,\infty[)$ medfører

*) $\sup\{m(rf) \mid r \in \grave{Q},\ 0 \leqq r \leqq t\} \leqq m(tf) \leqq \inf\{m(rf) \mid r \in \grave{Q},\ r \geqq t\} = tm(f)$.

$f_1 + f_2 = g_1 + g_2 - (h_1+h_2)$ og $\mu(f_1+f_2) = m(g_1+g_2) - m(h_1+h_2) = m(g_1)-m(h_1) + m(g_2) - m(h_2) = \mu(f_1) + \mu(g_1)$. Tilsvarende vises, at $\mu(tf) = t\mu(f)$ for $t \in \dot{R}$. Da μ er positiv, er μ et mål.

<u>Sætning</u>: Ethvert mål μ på T er differens mellem to positive mål.

Bevis: Vi definerer en afbildning $m:\dot{K}(T,[0,\infty[) \to \dot{R}$ ved $m(f) = \sup\{\mu(g) \mid g \in \dot{K}(T,\dot{R}),\ 0 \leqq g \leqq f\}$; $m(f) \geqq 0$, da $m(f) \geqq \mu(o) = o$, og $m(f) \geqq \mu(f)$; [1)] desuden er m additiv, idet for $f_1,f_2 \in \dot{K}(T,[o,\infty[)$ $m(f_1+f_2) = \sup\{\mu(g) \mid g \in \dot{K}(T,\dot{R}),\ 0 \leqq g \leqq f_1 + f_2\} = \sup\{\mu(g_1+g_2) \mid g_i \in K(T,\dot{R}),\ 0 \leqq g_i \leqq f_i \text{ for } i = 1,2\} = \sup\{\mu(g_1) \mid g_1 \in \dot{K}(T,\dot{R}),\ 0 \leqq g_1 \leqq f_1\} + \sup\{\mu(g_1) \in K(T,\dot{R}),\ 0 \leqq g_2 \leqq f_2\} = m(g_1) + \ddot{m}(g_2)$. Der findes derfor et positivt mål μ^+ på T, så at $\mu^+(f) = m(f) \geqq \mu(f)$ for $f \in \dot{K}(T,[o,\infty[)$. Da $\mu^+ \geqq o$ og $\mu^+ \geqq \mu$, er også $\mu^- = \mu^+ - \mu \geqq 0$, og $\mu = \mu^+ - \mu^-$.

μ^+ er det mindste mål, der er $\geqq 0$ og $\geqq \mu$; thi $\nu \geqq 0$ og $\nu \geqq \mu$ medfører $\nu(f) \geqq \nu(g) \geqq \mu(g)$ for $f,g \in \dot{K}(T,[o,\infty[)$, $0 \leqq g \leqq f$, så at $\nu(f) \geqq m(f) = \mu^+(f)$. Tilsvarende er μ^- det mindste mål, der er $\geqq o$ og $\geqq -\mu$, $\mu^- = (-\mu)^+$, da $\mu^- + \mu$ er det mindste mål, der er $\geqq \mu$ og $\geqq 0$.

Vi sætter $|\mu| = \mu^+ + \mu^- = 2\mu^+ - \mu$; $|\mu| + \mu$ er da det mindste mål, der er $\geqq 2\mu$ og $\geqq 0$, og $|\mu|$ derfor det mindste mål, der er $\geqq \mu$ og $\geqq -\mu$. $\sup\{|\mu^+(f)| \mid f \in \dot{K}(T,[-1,1])\} = \sup\{\mu^+(f) \mid f \in \dot{K}(T,[o,1])\} = \sup\{\mu(g) \mid g \in \dot{K}(T,[0,1])\}$; tilsvarende er $\sup\{|\mu^-(f)| \mid f \in \dot{K}(T,[-1,1])\} = \sup\{\mu(-g) \mid g \in \dot{K}(T,[o,1])\}$; da $f \in \dot{K}(T,[-1,1])$ er differens mellem to funktioner i $\dot{K}(T,[o,1])$, er $\sup\{|\mu^+(f)| \mid f \in \dot{K}(T,[-1,1])\} + \sup\{|\mu^-(f)| \mid f \in \dot{K}(T,[-1,1])\} = \sup\{\mu(g-h) \mid g,h \in \dot{K}(T,[o,1])\} = \sup\{|\mu(f)| \mid f \in \dot{K}(T,[-1,1])\}$ derfor er μ et begrænset mål, hvis og kun hvis μ^+ og μ^- er be-

1) $m(f) < \infty$, da $|\mu(g)| \leqq \sup\{g(t) \mid t \in T\}c(stf)$, idet μ er et mål;
$\leqq \sup f(t) \cdot c$

grænsede, og om de tilsvarende normer gælder $\|\mu\| = \|\mu^+\| + \|\mu^-\|$. Da $|\mu|$ er $\geq \mu$ og $\geq -\mu$, er $|\mu|(f) \geq |\mu(f)|$, og derfor $\|\mu\| \leq \||\mu|\| = \|\mu^+ + \mu^-\| \leq \|\mu^+\| + \|\mu^-\| = \|\mu\|$; vi ser, at μ er begrænset, hvis og kun hvis $|\mu|$ er begrænset, og $\|\mu\| = \||\mu|\| = \|\mu^+\| + \|\mu^-\|$. Hvis T er kompakt, er $\||\mu|\| = \sup\{\,||\mu|(f)| \mid f \in C(T,[-1,1])\} = |\mu|(1)$.

12.4. I teorien for Lebesgue integralet på $\dot{R}^n$ betragter man et funktional I, det naivt konstruerede integral, på det lineære funktionsrum og funktionsgitter $Tr(\dot{R}^n,\dot{R})$ af trappefunktioner på $\dot{R}^n$, og viser, at der findes et større lineært funktionsrum og funktionsgitter **L** og en udvidelse af I til et lineært, positivt funktional, som vi igen betegner I, på **L**, således at en række pæne grænseværdisætninger er opfyldt; desuden indfører man begrebet målelighed, og andre funktionsrum $\mathbf{L}^p$, o.s.v..

En gennemgang af teoriens opbygning viser, at man kun benytter følgende egenskaber:

Der er givet en mængde T og et lineært rum og gitter $\dot{K}$ af reelle funktioner på T, og en positiv lineær afbildning $\mu : \dot{K} \to \dot{R}$ med den egenskab, at $\mu(f_n) \to 0$ for en vilkårlig følge (f_n) af funktioner i K, der konvergerer monotont aftagende mod 0 i ethvert punkt af T: $f_n \downarrow 0 \Rightarrow \mu(f_n) \to 0$.

I denne situation findes der altså et større lineært rum og gitter $\mathbf{L}_\mu$ af reelle funktioner på T og en udvidelse af μ til et positivt lineært funktional μ på $\mathbf{L}_\mu$, så at sætningerne om Lebesguemålet også her er sande; undtagelser er dog sætninger om flytningsinvarians af målet, og om, at endelige og numerable mængder er nulmængder.

Vi antager nu, at vi har givet et lokal kompakt rum T og et positivt mål μ på T; vi vil vise, at vi kan anvende de ovenstående bemærkninger på $\dot{K}(T,\dot{R})$ og μ.

Sætning (Dini): Hvis en nedad filtrerende mængde N af funktioner i $\dot{K}(T,\dot{R})$ har nedre grænse 0, så konvergerer filterbasen $\{N_f \mid f \in N\}$, hvor $N_f = \{g \in N \mid g \leq f\}$, mod o ligeligt, og $\{\mu(N_f) \mid f \in N\}$ konvergerer mod 0.

Bevis: Vi vælger en funktion $f \in N$; $N_f = \{g \in N \mid g \leq f\}$ er igen nedad filtrerende og har nedre grænse o, da der for $h \in N$ findes en mindre funktion $k \in N_f$. For $\varepsilon > o$ og $g \in N_f$ sætter vi $A(\varepsilon,g) = \{t \in T \mid g(t) \geq \varepsilon\}$; da $o \leq g \leq f$, er $A(\varepsilon,g)$ en afsluttet delmængde af den kompakte mængde $\overline{st(f)}$. Da der til $t \in T$ findes $g \in N_f$ med $g(t) < \varepsilon$, er $\bigcap\{A(\varepsilon,g) \mid g \in N_f\} = \emptyset$; derfor findes der $n \in \dot{N}$ og $g_1,\ldots,g_n \in N_f$, så at $\bigcap\{A(\varepsilon,g_\nu) \mid \nu = 1,\ldots,n\} = \emptyset$. Lad h være en funktion i N, der er $\leq g_1 \wedge \ldots \wedge g_n$; for en vilkårlig funktion $k \in N_h$ er $\sup\{|k(t)| \mid t \in T\} \leq \sup\{h(t) \mid t \in T\} < \varepsilon$. Dette viser, at filterbasen $\{N_h \mid h \in N\}$ konvergerer mod o ligeligt

Heraf følger også, at $\{\{\mu(g) | g \in N_h\} | h \in N\}$ konvergerer mod o. Thi til f findes $c \in \dot{R}$, så at $|\mu(g)| \leq c \sup\{|g(t)| \mid t \in T\}$ for $st(g) \subseteq st(f)$, og specielt for $g \in N_f$. For $g \in N_h$ er derfor $|\mu(g)| \leq c\varepsilon$.

Specielt ser vi, at hvis en aftagende følge (f_n) af funktioner $\in \dot{K}(T,\dot{R})$ konvergerer mod o punktvis, vil $f_n \to o$ ligeligt, og $\mu(f_n) \to o$.

Herefter kan Lebesgueteorien opbygges: for en vilkårlig funktion $f:T \to [-\infty,\infty]$ sætter vi $\overline{\mu}(f) = \inf \sup \mu(\overline{f}_n)$, hvor inf tages over mængden af voksende følger $(\overline{f}_n)$ af elementer fra

$\dot{K}(T,\dot{R})$, for hvilke $\overline{f}_n \uparrow \geq f$, og tilsvarende $\underline{\mu}(f) = \sup_n \inf \mu(\underline{f}_n)$, $\underline{f}_n \downarrow \leq f$, og $L_{\overline{\mu}} = \{f:T \to [-\infty,\infty] \mid -\infty < \underline{\mu}(f) = \overline{\mu}(f) < \infty\}$; idet vi identificeres funktioner f og $g \in L_\mu$, for hvilke $\overline{\mu}(|f-g|) = 0$, udgør $L_{\overline{\mu}}$ et Banachrum, som indeholder $\dot{K}(T,\dot{R})$, som et tæt underrum, og derfor er isomorft med fuldstændiggørelsen af det topologiske vektorrum af klasser af μ-ækvivalente funktioner i $\dot{K}(T,\dot{R})$ forsynet med normen $f \to \mu(|f|)$. Vi bemærker endnu, at enhver funktion $f \in L_{\overline{\mu}}$ er grænseværdi i norm for en fundamentalfølge (f_n) af funktioner i $\dot{K}(T,\dot{R})$, og at en sådan fumdamentalfølge har en delfølge, for hvilken der eksisterer en mængde $A \subsetneq T$ med $\overline{\mu}(1_A) = 0$, så at $f_{n_\nu}(t) \to f(t)$ for $t \notin A$ (jfr. beviset for Riesz-Fischers sætning).

Vi kan og vil imidlertid udnytte Dinis sætning effektivere. Hertil sætter vi $\mu^*(f) = \inf \sup\{\mu(g^*) \mid g^* \in N^*\}$, hvor inf tages over mængden af opad filtrerende mængder N^* af funktioner $\in \dot{K}(T,\dot{R})$, for hvilke funktionen $t \to \sup\{g^*(t) \mid g^* \in N^*\} \geq f$, og tilsvarende $\mu^*(f) = \sup \inf\{\mu(g_*) \mid g_* \in N_*\}$, og $L_{\mu^*} = \{f:T \to [-\infty,\infty] \mid -\infty < \mu_*(f) = \mu^*(f) < \infty\}$.

Det er ikke helt oplagt, at dette giver en god teori. Vi udfører derfor de første par beviser.

Lemma: For enhver funktion $f:T \to [-\infty,\infty]$ er $\mu_*(f) \leq \mu^*(f)$.

Bevis: Det er nok at bevise, at for delmængder N_* og $N^* \subsetneq \dot{K}(T,\dot{R})$, hvor N_* er nedad filtrerende med $\inf_{N_*} g_* \leq f$ og N^* er opad filtrerende med $\sup_{N^*} g^* \geq f$, er $\inf_{N_*} \mu(g_*) \leq \sup_{N^*}\mu(g^*)$.

$\{(g_*-g^*) \vee 0 \mid g_* \in N_*,\ g^* \in N^*\}$ er en nedad filtrerende delmængde af $\dot{K}(T,\dot{R})$ med nedre grænse 0; derfor er

$\inf\{\mu(g_*-g^*) \vee 0) \mid g_* \in N_*,\ g^* \in N^*\} = 0$; da $g_* \leqq (g_*-g^*) \vee 0 + g_*$, er $\mu(g_*) \leqq \mu((g_*-g^*) \vee 0) + \mu(g^*)$; derfor er $\inf_{N_*} \mu(h_*) \leqq \mu((g_*-g^*) \vee 0) + \sup_{N^*} \mu(h^*)$ for $g_* \in N_*$ og $g^* \in N^*$, og $\inf_{N_*} \mu(h^*) \leqq \sup_{N^*} \mu(h^*)$.

Vi ser nu, at det for enhver funktion $f:T \to [-\infty,\infty]$ gælder, at $\underline{\mu}(f) \leqq \mu_*(f) \leqq \mu^*(f) \leqq \overline{\mu}(f)$, så at $f \in L_{\overline{\mu}} \Rightarrow f \in L_{\mu^*}$ og $\mu^*(f) = \overline{\mu}(f)$.

Lemma: Lad (f_n) være en voksende følge af funktioner: $T \to [-\infty,\infty]$, med grænseværdi f, og antag, at $\mu^*(f_1) > -\infty$. $\mu^*(f) = \lim \mu^*(f_n)$.

Bevis: Det er klart, at $f_n \leqq f \Rightarrow \mu^*(f_n) \leqq \mu^*(f)$ og derfor $-\infty < \mu^*(f_1) \leqq \lim \mu^*(f_n) \leqq \mu^*(f)$. Hvis $\lim \mu^*(f_n) = +\infty$, er også $\mu^*(f) \leqq \lim \mu^*(f_n)$; vi antager derfor, at $\lim \mu^*(f_n) < +\infty$.

Til $\varepsilon > 0$ vælger vi en talfølge (ε_n) med $0 < \varepsilon_n$ og $\Sigma\, \varepsilon_n \leqq \varepsilon$, og opad filtrerende mængder $N_n^* \subseteq \dot{K}(T,\dot{R})$ med $\sup_{N_n^*} g_n^* \geqq f_n$ og

$\sup_{N_n^*} \mu(g_n^*) \leqq \mu^*(f_n) + \varepsilon_n$.

Antag nu, at vi har vist, at det om den opad filtrerende mængde $\{g_1^* \vee \dots \vee g_n^* \mid g_\nu^* \in N_\nu^*, \nu = 1,\dots,n\}$ med øvre grænse $\geqq f_1 \vee \dots \vee f_n = f_n$ gælder, at $\sup \mu(g_1^* \vee \dots \vee g_n^*) \leqq \mu^*(f_n) + \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_n$. $\{g_1^* \vee \dots \vee g_n^* \vee g_{n+1}^* \mid g_\nu^* \in N_\nu^*, \nu = 1, \dots, n+1\}$ er opad filtrerende med øvre grænse $\geqq f_n \vee f_{n+1}$, og $\{g_1^* \vee \dots \vee g_n^* \wedge g_{n+1}^* \mid g_\nu^* \in N_\nu^*, \nu = 1,\dots,n+1\}$ er opad filtrerende med øvre grænse $\geqq f_n \wedge f_{n+1} = f_n$, så at $\mu^*(f_n) \leqq \sup \mu(g_1^* \vee \dots \vee g_n^* \wedge g_{n+1}^*)$. Af $\mu(g_1^* \vee \dots \vee g_n^* \wedge g_{n+1}^*) + \mu(g_1^* \vee \dots \vee g_n^* \vee g_{n+1}^*) = \mu(g_1^* \vee \dots \vee g_n^*) + \mu(g_{n+1}^*)$ fås ved grænseovergang $\mu^*(f_n) + \sup \mu(g_1^* \vee \dots \vee g_n^* \vee g_{n+1}^*) \leqq \sup \mu(g_1^* \vee \dots \vee g_n^*) + \sup \mu(g_{n+1}^*) \leqq \mu^*(f_n) +$

$\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_n + \mu^*(f_{n+1}) + \varepsilon_{n+1}$. Vi har hermed ved induktion vist, at for ethvert $n \in \dot{N}$ er $\sup \mu(g_1^* \vee \ldots \vee g_n^*) \leq \mu^*(f_n) + \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_n \leq \lim \mu^*(f_n) + \varepsilon$.

$\{g_1^* \vee \ldots \vee g_n^* \mid n \in \dot{N},\ g_1^* \in N_1^*, \ldots, g_n^* \in N_n^*\}$ er opad filtrerende med en øvre grænse, der er $\geq f_n$ for ethvert $n \in \dot{N}$, og derfor $\geq \lim f_n = f$; da vi for $n \in \dot{N}$ og $g_1^* \in N_1^*, \ldots, g_n^* \in N_n^*$ har $\mu(g_1^* \vee \ldots \vee g_n^*) \leq \lim \mu^*(f_n) + \varepsilon$, er også supremum af disse tal $\leq \lim \mu^*(f_n) + \varepsilon$; derfor er $\mu^*(f) \leq \lim \mu^*(f_n) + \varepsilon$. Da dette gælder for ethvert $\varepsilon > 0$, er $\mu^*(f) = \lim \mu^*(f_n)$.

Vi understreger, at sætningen ikke kan forbedres til en rigtig sætning om μ^* af øvre grænse for en vilkårlig opad filtrerende mængde af funktioner. Dog gælder

Lemma: For en vilkårlig opad filtrerende delmængde N^* af $\dot{K}(T,\dot{R})$ med øvre grænse f er $\mu_*(f) = \mu^*(f) = \sup_{N^*} \mu(g^*)$; derfor er $f \in L_\mu^*$, hvis og kun hvis der findes $c \in \dot{R}$, så at $\mu(g^*) \leq c$ for alle $g^* \in N^*$.

Bevis: For $g^* \in N^*$ er $g^* \leq f$ og derfor $\mu(g^*) \leq \mu_*(f)$, så at $\sup_{N^*} \mu(g^*) \leq \mu_*(f)$. På den anden side er $\mu^*(f) \leq \sup_{N^*} \mu(g^*)$ ifølge definitionen af μ^*.

Resten af Lebesgue teorien følger uden besvær af disse sætninger og de tilsvarende om aftagende følger. Specielt ser vi, at L_μ^*, efter identifikation af funktioner f og g med $\mu^*(|f-g|) = 0$, udgør et Banachrum, der indeholder $\dot{K}(T,\dot{R})$ som et tæt underrum, og derfor er isomorft med fuldstændiggørelsen af det topologiske vektorrum af klasser af μ-ækvivalente funktioner i $\dot{K}(T,\dot{R})$ forsynet med normen $f \to \mu(|f|)$. L_μ^* er således som Banachrum isomorft med $L_{\bar{\mu}}$. En funktion i L_μ^* er grænseværdi i norm for en fundamentalfølge (g_m) af funktioner i $\dot{K}(T,\dot{R})$; denne følge har en delfølge $(f_n) = (g_{m_n})$, for hvilken der findes en mængde $B \subseteq T$ med $\mu^*(1_B) = 0$, så at $f_n(t) \to f(t)$ for $t \notin B$; da (f_n) er en fundamentalfølge i L_μ, findes der en funktion $g \in L_{\overline{\mu}}$, så at $f_n \to g$ i norm, og en delfølge (f_{n_ν}) og en mængde $A \subseteq T$ med $\overline{\mu}(1_A) = 0 = \mu^*(1_A)$, så at $f_{n_\nu}(t) \to g(t)$ for $t \notin A$, og derfor $g(t) = f(t)$ for $t \notin A \cup B$. Vi har vist

Lemma: Til $f \in L_\mu{}^*$ findes $g \in L_{\overline{\mu}}$, så at $\mu^*(|f-g|) = 0$.

Vi viser nu, at hvis T opfylder det andet numerabilitets aksiom, d.v.s. hvis der findes en numerabel mængde $\dot{B}$ af åbne delmængder af T, så at enhver åben delmængde af T er foreningsmængde af mængder, der tilhører $\dot{B}$ (i dette tilfælde kaldes $\dot{B}$ en basis for topologien), så er $L_{\overline{\mu}} = L_\mu{}^*$.

En funktion $f:T \to [-\infty,\infty]$ kaldes nedad halvkontinuert, hvis $\{t \in T \mid f(t) > a\}$ er åben for ethvert $a \in \dot{R}$. Hvis en funktion f er øvre grænse for en mængde N af kontinuerte funktioner, er f nedad halvkontinuert; thi $\{t \in T \mid f(t) > a\} = \bigcup\{\{t \in T \mid g(t) > a\} \mid g \in N\}$. Omvendt er en nedad halvkontinuert funktion $f:T \to [0,\infty]$ øvre grænse for den opad filtrerende mængde af mindre funktioner i $\dot{K}(T,[0,\infty[)$; vi kan nemlig til $t \in T$ og $\varepsilon > 0$ finde $g \in \dot{K}(T,\dot{R})$, så at $0 \leqq g \leqq f$ og $f(t) - \varepsilon \leqq g(t)$: hvis $f(t) \leqq \varepsilon$, vælger vi $g = 0$; hvis $f(t) = a > \varepsilon$, kan vi vælge en kompakt omegn U af t, så at $f(s) > a-\varepsilon$ for $s \in U$; da U er et normalt rum, indeholder $\overset{\circ}{U}$ en afsluttet omegn V af t, og vi kan vælge $g \in \dot{K}(T,[0,a-\varepsilon])$, så at g er $a-\varepsilon$ på V og 0 på $T \setminus U$ (anvend Urysohns lemma på T_∞), og derfor opfylder de stillede betingelser.

Heraf følger, at en nedad halvkontinuert funktion f er øvre grænse for en opad filtrerende delmængde af $\dot{K}(T,\dot{R})$, hvis og kun hvis f har en minorant i $\dot{K}(T,\dot{R})$, og at f i dette tilfælde $\in L_\mu{}^*$, hvis og kun hvis $\mu^*(f) < +\infty$.

Tilsvarende defineres og behandles opad halvkontinuerte funktioner.

Lemma: Hvis det lokal kompakte rum T opfylder det andet numerabilitetsaksiom, er enhver nedad halvkontinuert funktion $f: T \to [-\infty, \infty]$, der har en minorant i $\dot{K}(T,\dot{R})$, grænseværdi for en voksende følge af funktioner i $\dot{K}(T,\dot{R})$.

Bevis: Vi vælger en numerabel basis $\dot{B}$ for topologien. For ethvert sæt (U,V,r), hvor U og $V \in \dot{B}$, $\overline{V} \subseteq U$, og $\overline{U}$ er kompakt, og r er rational $\geqq 0$, vælger vi en funktion $\in \dot{K}(T,[0,r])$, der er r på V og 0 på $T \setminus U$. Den herved fremkomne numerable mængde af funktioner betegner vi G.

For enhver nedad halvkontinuert funktion h med minorant $k \in \dot{K}(T,\dot{R})$ er $f = h - k$ øvre grænse for $\{g \in G \mid g \leqq f\}$.

Vi kan nemlig til $t \in T$ og $\varepsilon > 0$ finde $g \in G$, så at $g \leqq f$ og $f(t) - \varepsilon \leqq g(t)$: hvis $f(t) \leqq \varepsilon$, sætter vi $g = o$; hvis $f(t) = a > \varepsilon$, vælger vi et rationalt tal $r \in [a-\varepsilon, a[$; da $f(t) > r$, kan vi vælge en mængde $U \in \dot{B}$, så $t \in U$, $\overline{U}$ er kompakt, og $f(s) > r$ for $s \in U$; da $\overline{U}$ er et normalt rum, kan vi vælge $V \in \dot{B}$, så at $t \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$; den til (U,V,r) svarende funktion i G opfylder da vore krav.

Vi opstiller elementerne i $\{g \in G \mid g \leqq f\}$ i en følge (g_n); $k+g_1$, $k+g_1 \vee g_2, \ldots$ er da en voksende følge af funktioner i $\dot{K}(T,\dot{R})$ med øvre grænse $= k + \sup g_n = k + f = h$.

Lad nu $f \in L_{\mu^*}$; til $\varepsilon > o$ findes da en opad filtrerende delmængde $N^* \subseteq \dot{K}(T,\dot{R})$ med øvre grænse $h \geqq f$, så at $\mu^*(h) = \sup_{N^*} \mu(g^*) \leqq \mu^*(f) + \varepsilon$; der findes da også, idet vi antager, at T opfylder det andet numerabilitets aksiom, en voksende følge $(\overline{g}_n)$ af funktioner i $\dot{K}(T,\dot{R})$ med øvre grænse h; da $\overline{g}_n \leqq h$, er

$\mu(\bar{g}_n) \leqq \mu^*(h) \leqq \mu^*(f) + \varepsilon$; derfor er $\bar{\mu}(f) \leqq \sup_n \mu(\bar{g}_n) \leqq \mu^*(f) + \varepsilon$. Da dette gælder for ethvert $\varepsilon > 0$, er $\bar{\mu}(f) = \mu^*(f)$; tilsvarende er $\underline{\mu}(f) = \mu_*(f)$, så at $f \in L_{\bar{\mu}}$.

Specielt ser vi, at for $T = \grave{R}^n$ giver de to teorier samme mængder af integrable funktioner. Vi vil herefter sætte $L_{\mu^*} = L_\mu$, og $\mu^*(f) = \mu(f)$ for $f \in L_\mu$.

Vi siger, at en mængde $S \subseteqq T$ er målelig med hensyn til μ, eller μ-målelig, hvis $1_S \in L_\mu$, og i dette tilfælde sætter vi $\mu(1_S) = \mu(S)$. Vi vil ikke gå nærmere ind på dette bregreb, men nøjes med at vise

<u>Sætning</u>: Enhver kompakt mængde $S \subseteqq T$ er μ-målelig.

En åben mængde $R \subseteqq T$ er μ-målelig, hvis og kun hvis $\mu^*(R) < \infty$.

Bevis: Hvis R er åben, er 1_R nedad halvkontinuert; da $1_R \geqq 0 \in \grave{K}(T,\grave{R})$, er R μ-målelig, hvis og kun hvis $\mu^*(R) < +\infty$. Hvis S er kompakt, er $\mu^*(S) > -\infty$, /[1)] 1_S er opad halvkontinuert, og efter en anvendelse af Urysohns lemma på S og en kompakt omegn i T_∞ af $\{\infty\}$ indser man, at 1_S har en majorant $\in \grave{K}(T,\grave{R})$; derfor er S μ-målelig.

Bemærkning: Beviset for, at en Lebesgue-målelig funktion f på $\grave{R}^p$, der har en integrabel numerisk majorant h, er integrabel, udnytter mængderne W_n; her kan i stedet anvendes $A_n = \{t \in T \mid h(t) > n^{-1}\}$, der er μ-målelige, da $o \leqq [p(h-n^{-1}) \vee o] \wedge 1 \to 1_{A_n} \leqq n\, h \in L_\mu$ for $p \to \infty$.

1) da $1_S \geqq 0$, og

Lad nu λ, μ og ν være tre positive mål på T, for hvilke $\lambda + \mu = \nu$. For en vilkårlig opad filtrerende mængde $N \subseteq \check{K}(T,\dot{R})$ er $\sup_N (\lambda+\mu)(g) \leq \sup_N \lambda(g) + \sup_N \mu(h)$; på den anden side findes der til $\varepsilon > 0$ g_ε og $h_\varepsilon \in N$, så at $\lambda(g_\varepsilon) \geq \sup_N \lambda(g) - \varepsilon$ og $\mu(h_\varepsilon) \geq \sup_N \mu(h) - \varepsilon$, og for $k \in N \geq g_\varepsilon$ og $\geq h_\varepsilon$ er $\lambda(k) + \mu(k) \geq \sup_N \lambda(g) + \sup_N \mu(h) - 2\varepsilon$; derfor er $\sup_N \nu(g) = \sup_N \lambda(g) + \sup_N \mu(g)$. (Hvis et af tallene er $+\infty$, må beviset ændres en smule). For en vilkårlig funktion $f: T \to [-\infty, \infty]$ og N med øvre grænse $\geq f$ er da $\sup_N \nu(g) \geq \lambda^*(f) + \mu^*(f)$; derfor er $\nu^*(f) \geq \lambda^*(f) + \mu^*(f)$. (Hvis f.eks. $\lambda^*(f) = +\infty$ og $\mu^*(f) = -\infty$, er $\sup_N \nu(g) = +\infty$ for alle i betragtning kommende N, og $\nu^*(f) = +\infty$). Vi antager nu, at $\lambda^*(f) > -\infty$ og $\mu^*(f) > -\infty$, og vælger til $\varepsilon > 0$ opad filtrerende mængder N og $M \subseteq K(T,\dot{R})$ med øvre grænser $\geq f$, så at $\sup_N \lambda(g) \leq \lambda^*(f) + \varepsilon$ og $\sup_M \mu(h) \leq \mu^*(f) + \varepsilon$; $\{g \wedge h \mid g \in N, h \in M\}$ er da en opad filtrerende delmængde af $\check{K}(T,\dot{R})$ med øvre grænse $\geq f$, og $\sup\{\nu(g \wedge h) \mid g \in N, h \in M\} \leq \sup\{\lambda(g) + \mu(h) \mid g \in N, h \in M\} \leq \sup\{\lambda(g) + \mu(h) \mid g \in N, h \in M\} \leq \lambda^*(f) + \mu^*(f) + 2\varepsilon$; derfor er $\nu^*(f) \leq \lambda^*(f) + \mu^*(f)$. (Hvis f.eks. $\lambda^*(f) < +\infty$ og $\mu^*(f) = -\infty$, finder man $\nu^*(f) = -\infty$). Ialt har vi, at $\nu^*(f) = \lambda^*(f) + \mu^*(f)$, hvis ikke $\lambda^*(f)$ og $\mu^*(f)$ er uendelige med modsat fortegn, i hvilket tilfælde $\nu^*(f) = +\infty$; specielt er $\nu^*(f)$ endelig, hvis og kun hvis $\lambda^*(f)$ og $\mu^*(f)$ er endelige.

Tilsvarende er $\nu_*(f)$ endelig, hvis og kun hvis $\lambda_*(f)$ og $\mu_*(f)$ er endelige, og i dette tilfælde er $\nu_*(f) = \lambda_*(f) + \mu_*(f) \leq \mu^*(f)+\lambda^*(f) = \nu^*(f)$. Heraf følger, at $f \in L_\nu$, hvis og kun hvis $f \in L_\lambda$

og $f \in L_\mu$, $L_\nu = L_\lambda \cap L_\mu$, og i dette tilfælde er $\nu(f) = \lambda(f) + \mu(f)$.

Specielt ser vi, at $0 \leqq \mu \leqq \nu \Rightarrow L_\nu \subseteq L_\mu$ og $\mu(f) \leqq \nu(f)$ for enhver funktion $f \geqq 0$ i L_ν.

Et vilkårligt mål ν på T kan jo skrives $\nu = \lambda - \mu$, hvor λ og μ er positive mål, og for en vilkårlig sådan opspaltning er $\lambda - \nu^+ = \mu - \nu^- \geqq 0$, så at $|\nu| = \nu^+ + \nu^- \leqq \lambda + \mu$. Vi sætter $L_\nu = L_{\nu^+} \cap L_{\nu^-} = L_{|\nu|}$, og $\nu(f) = \nu^+(f) - \nu^-(f)$ for $f \in L_\nu$. For $f \in L_\lambda \cap L_\mu$ er da $f \in L_\nu$ og $f \in L_{\lambda - \mu^+}$ og $\nu(f) = \nu^+(f) - \nu^-(f) = \nu^+(f) + (\lambda - \nu^+)(f) - \nu^-(f) - (\mu - \nu^-)(f) = \lambda(f) - \mu(f)$.

<u>Sætning</u>: Et mål μ på T er begrænset, hvis og kun hvis $|\mu|^*(1) < \infty$, og hvis og kun hvis enhver begrænset kontinuert funktion $\in L_\mu$. I dette tilfælde er $\|\mu\| = |\mu|(1)$.

Bevis: Enhver kontinuert funktion $f \geqq 0$ på T er øvre grænse for de mindre funktioner i $\dot{K}(T,\dot{R})$, og $f \in L_\mu = L_{|\mu|} \Longleftrightarrow |\mu|^*(f) = \sup\{|\mu|(g) \mid g \in K(T,\dot{R}),\ 0 \leqq g \leqq f\} < \infty$. Hvis μ er begrænset med norm $\|\mu\| = \||\mu|\|$, finder vi for en vilkårlig begrænset funktion f $|\mu|^*(f^+) \leqq \sup\{|\mu|(g) \mid g \in \dot{K}(T,\dot{R}),\ 0 \leqq g \leqq \sup\{f^+(t) \mid t \in T\}\} \leqq \|\mu\| \sup\{f^+(t) \mid t \in T\}$ og tilsvarende for f^-, så at $f \in L_\mu$ og $|\mu(f)| \leqq |\mu|(f^+) + |\mu|(f^-) \leqq \|\mu\| \sup\{|f(t)| \mid t \in T\}$. Specielt er $1 \in L_\mu$ og $|\mu|(1) \leqq \|\mu\|$.

Hvis $1 \in L_\mu$, finder vi for $f \in \dot{K}(T,\dot{R})$, at $|f| \leqq \sup\{|f(t)| \mid t \in T\}1$, så at $|\mu(f)| \leqq |\mu|(|f|) \leqq \sup\{|f(t)| \mid t \in T\}|\mu|(1)$. Dette viser, at μ er begrænset med $\|\mu\| \leqq |\mu|(1)$.

12.5. Vi betragter igen specielt $\dot{R}^p$.

For et vilkårligt positivt mål μ på $\dot{R}^p$ er jo L_μ et lineært rum, der indeholder karakteristiske funktioner for kompakte delmængder, og derfor også indeholder rummet $Tr(\dot{R}^p, \dot{R})$ af reelle trappefunktioner på $\dot{R}^p$. For en aftagende følge (f_n) af trappefunktioner, der konvergerer mod nul punktvis, $f_n \downarrow o$, vil $\mu(f_n) \to 0$ (jfr. s.). Der findes derfor et lineært rum og funktionsgitter, vi kan jo kalde det $L_{\mu|Tr}$, og en udvidelse af μ's sammentrækning til $Tr(\dot{R}^p, \dot{R})$ til en positiv lineær funktional, $\mu|Tr$, på $L_{\mu|Tr}$. Da $Tr(\dot{R}^p, \dot{R}) \subsetneqq L_\mu$, finder vi let, at $L_{\mu|Tr} \subsetneqq L_\mu$, og at for $f \in L_{\mu|Tr}$ er $(\mu|Tr)(f) = \mu(f)$.

På den anden side ved vi, at for en vilkårlig positiv lineær funktional ν på $Tr(\dot{R}^p, \dot{R})$ med den egenskab, af $f_n \downarrow 0 \Rightarrow \nu(f_n) \to 0$, kan vi udføre integrationsteorien og herved skaffe os et rum $L_{\nu|Tr}$ og en udvidelse, som vi igen kalder ν, af ν til $L_{\nu|Tr}$. Da enhver funktion $f \in \dot{K}(\dot{R}^p, [0,\infty[)$ dels er mindre end en passende trappefunktion, og dels er grænseværdi for en voksende følge af trappefunktioner, er $\dot{K}(\dot{R}^p, \dot{R}) \subsetneqq L_{\nu|Tr}$. Sammentrækningen $\nu|\dot{K}$ til $\dot{K}(\dot{R}^p, \dot{R})$ af udvidelsen af ν til $L_{\nu|Tr}$ er et mål, da det er en positiv lineær funktional; vi ser igen let, at $L_{\nu|\dot{K}} \subsetneqq L_{\nu|Tr}$, og at for $f \in L_{\nu|\dot{K}}$ er $(\nu|\dot{K})(f) = \nu(f)$.

Vi får altså ganske den samme integrationsteori, hvad enten vi starter med integralerne af kontinuerte funktioner med kompakte støtter, eller vi starter med integralerne af trappefunktioner.

12.6. For et mål ν på $\dot{R}$ sætter vi $\psi\, \nu(t) = \nu(]o,t])$ for $t \geqq o$, og $\psi\, \nu(t) = -\nu(]t,o])$ for $t \leqq o$. Afbildningen $\nu \to \psi\nu$ er lineær. For et positivt mål μ er $\psi\mu$ voksende, idet $\psi\mu(s) - \psi\mu(t) = \mu(]t,s]) \geqq 0$ for $s \geqq t$; hvis $s \to t^+$, vil $1_{]t,s]} \downarrow o$ og $\mu(]t,s]) \to o$; derfor er $\psi\mu$ kontinuert fra højre; desuden er

$\psi\mu(o) = o$. For et vilkårligt mål ν er derfor $\psi\nu = \psi\nu^+ - \psi\nu^-$ af lokalt begrænset variation, kontinuert fra højre og o i o.

Vi minder om, at vi til en vilkårlig funktion F af lokalt begrænset variation kan lade svare et mål $\emptyset F$, $\emptyset F(f) = \int f dF$ for $f \in \mathring{K}(\mathring{R},\mathring{R})$. Herved er $\emptyset\psi\nu = \nu$ for et vilkårligt mål ν; thi for $f \in \mathring{K}(\mathring{R},[o,\infty[)$ og et interval $[a,b] \supseteq st(f)$ og for en inddeling $a = x_o < x_1 <\ldots< x_n = b$ får vi, for passende $\xi_i \in [x_{i-1},x_i], i=1,\ldots,n$, en undersum $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)[\psi\nu(x_i)-\psi\nu(x_{i-1})] = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\ \nu\ (]x_{i-1},x_i])$ $= \nu(\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\ 1_{]x_{i-1},x_i]})$; for en følge af finere og finere inddelinger, for hvilke $\max\{|x_i-x_{i-1}| \mid i = 1,\ldots,n\} \to o$, vil $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)1_{]x_{i-1},x_i]} \to f$ monotont og majoriseret af f, og de tilsvarende undersummer vil derfor dels konvergere mod $\int f d\psi\nu$, dels mod $\nu(f)$.

Vi har tidligere vist, at hvis $\emptyset F = o$, idet F er en funktion af lokalt begrænset variation, så antager F samme værdi i alle sine kontinuitetspunkter. For en vilkårlig funktion F af lokalt begrænset variation er $\psi\emptyset F$ af lokalt begrænset variation, kontinuert fra højre og o i o; da $\emptyset\psi(\emptyset F) = \emptyset F$, altså $\emptyset(\psi\emptyset F-F) = o$, er $\psi\emptyset F-F$ konstant i alle sine kontinuitetspunkter, åbenbart med værdien $-F(o^+)$, så at $\psi\emptyset F(t) = F(t^+) - F(o^+)$, idet mængden af kontinuitetspunkter er tæt i $\mathring{R}$, og idet grænseværdi fra højre (og fra venstre) eksisterer i ethvert punkt. Hvis F er konstant i en tæt mængde, er således $\psi\emptyset F = o$ og $\emptyset F = \emptyset\psi\emptyset F = o$, så at F tilhører kærnen af $\emptyset$.

For en funktion F af lokalt begrænset variation, kontinuert fra højre og o i o, er åbenbart $\psi\emptyset F = F$; $\emptyset$ er således injectiv på rummet af disse funktioner.

<u>Sætning</u>: Afbildningen $\nu \to \psi\nu$, hvor $\psi\nu(t) = \nu(]o,t])$ for $t \geq o$, og $\psi\nu(t) = -\nu(],t,o])$ for $t < o$, er en isomorfi af vektorrummet af mål på $\mathring{R}$ med rummet af reelle funktioner af lokalt begrænset variation på $\mathring{R}$, der er kontinuerte fra højre og o i o. Sammentrækningen af ψ til Banachrummet af begrænsede mål på $\mathring{R}$ er en isomorfi og isometri med rummet af funktioner af begrænset variation på $\mathring{R}$, kontinuerte fra højre og o i o, forsynet med normen $F \to VF(-\infty,\infty)$.

Bevis. Vi mangler kun at vise, at for et begrænset mål ν er $\psi\nu$ af begrænset variation på $\mathring{R}$ med $V\psi\nu(-\infty,\infty) \leq \|\nu\|$. For et begrænset mål $\mu \geq o$ på $\mathring{R}$ er $V\psi\mu(-\infty,\infty) = \sup\{\psi\mu(b) - \psi\mu(a) \mid -\infty < a \leq b < \infty\} = \lim_n \mu(]-n,n]) = \mu(1) = \|\mu\|$, og for et vilkårligt begrænset mål ν er $V\psi\nu(-\infty,\infty) = V(\psi\nu^+ - \psi\nu^-)(-\infty,\infty) \leq V\psi\nu^+(-\infty,\infty) + V\psi\nu^-(-\infty,\infty) = \|\nu^+\| + \|\nu^-\| = \|\nu\|$.

12.7. Vi ser nu endelig på et kompakt delinterval $[a,b]$ af $\mathring{R}$.

For et mål ν på $[a,b]$ sætter vi $\psi\nu(a) = o$ og $\psi\nu(t) = \nu([a,t])$ for $t \in]a,b]$. Afbildningen ψ er lineær. For et mål $\mu \geq o$ er $\psi\mu$ voksende, og kontinuert fra højre i $]a,b]$, men ikke nødvendigvis i a, $\psi\mu(a^+) = \lim \mu([a,t]) = \mu(\{a\})$ og $\psi\mu(a) = o$. For et vilkårligt mål ν er derfor $\psi\nu$ af begrænset variation på $[a,b]$, o i a, og kontinuert fra højre i $]a,b]$.

For et mål ν på $[a,b]$ og $f \in C([a,b],[o,\infty[)$ og en vilkårlig inddeling $a = x_o < x_1 < \ldots < x_n = b$ med indskudte punkter $\xi_i \in [x_{i-1},x_i]$, $i = 1,\ldots,n$, er $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,[\psi\nu(x_i) - \psi\nu(x_{i-1})] =$

$f(\xi_1)\nu([a,x_1]) + \sum_{i=2}^{n} f(\xi_i)\nu(]x_{i-1},x_i]) = \nu(f(\xi_1)1_{[a,x_1]} + \sum_{i=2}^{n} f(\xi_i)1_{]x_{i-1},x_i]})$; ved en passende grænseovergang fås $\int_{[a,b]} f d\psi\nu = \nu(f)$.

Vi har tidligere vist, at hvis F er af begrænset variation på $[a,b]$, og ϕF er målet $f \to \int_{[a,b]} f\ dF$, så antager F samme værdi i alle sine kontinuitetspunkter og i a og i b. For en vilkårlig funktion F af begrænset variation finder vi da $\psi\phi F(a) = o$,

$\psi\phi F(t) = F(t^+) - F(a)$ for $t \in]a,b]$. Hvis F er konstant i en tæt mængde, der indeholder a og b, er således $\psi\phi F = o$ og $\phi F = o$.

Herefter udleder man uden vanskelighed

<u>Sætning</u> (Riesz 1909): Afbildningen $\nu \to \psi\nu$, hvor $\psi\nu(a) = o$ og $\psi\nu(t) = \nu([a,t])$ for $t \in]a,b]$, er en isomorfi og isometri af Banachrummet af mål på $[a,b]$ med rummet af reelle funktioner af begrænset variation på $[a,b]$, kontinuerte fra højre i $]a,b]$ og o i a, forsynet med normen $F \to VF(a,b)$.

1. En topologisk gruppe G er en gruppe forsynet med en topologi $\mathcal{O}$, så at afbildningen: $G \times G \to G$ givet ved $(a,b) \to ab^{-1}$ er kontinuert (eller ensbetydende hermed, så at $(a,b) \to ab$ og $a \to a^{-1}$ er kontinuerte). Vis at en basis $\mathcal{B}(e)$ for filtret af omegne af etelementet $e \in G$ opfylder:

(findes en basis)

1) $\forall U \in \mathcal{B}(e)\ (e \in U)$.

2) $\mathcal{B}(e)$ er en filterbasis.

3) $\forall U \in \mathcal{B}(e)\ \exists V \in \mathcal{B}(e)\ (VV^{-1} \subseteq U)$.

~~4) $\forall U \in \mathcal{B}(e)\ [a \in U \Rightarrow \exists V \in \mathcal{B}(e)\ (Va \subseteq U)]$.~~

5) $\forall U \in \mathcal{B}(e),\ \forall a \in G,\ \exists V \in \mathcal{B}(e)\ (a^{-1}Va \subseteq U)$.

Vis, at for $a \in G$ er hver af mængderne $\{Ua \mid U \in \mathcal{B}(e)\}$ og $\{aU \mid U \in \mathcal{B}(e)\}$ en basis for filtret af omegne af a.

Hvis $\{e\}$ er afsluttet gælder også:

6) $\{e\} = \bigcap \{U \mid U \in \mathcal{B}(e)\}$.

Hvis der omvendt er givet en mængde $\mathcal{B}(e)$ af delmængder af en gruppe G, således at 1), 2) 3) ...,5) er opfyldt, findes der én topologi $\mathcal{O}$ på G, så at G forsynet med $\mathcal{O}$ er en topologisk gruppe, og så at $\mathcal{B}(e)$ er en basis for filtret af omegne af e. Hvis $\mathcal{B}(e)$ også opfylder 6), er $\{e\}$ afsluttet.

(Se f.eks. bøger af N. Bourbaki (Top.gen. Chap 3), Loomis, D. Montgommery og L. Zippin, Pontrjagin).

2. Vis, at en topologisk gruppe G er et regulært rum, hvis blot G opfylder aksiomet

T_0: $\forall a, b \in G\ [a \neq b \Rightarrow (\exists U \in U(a)\ (b \notin U)\ \dot{\vee}\ \exists\ U \in \mathcal{U}(b)\ (a \notin U))]$

d.v.s. hvis et af punkterne har en omegn, der ikke indeholder det andet.

3. Lad E være et n-dimensionalt topologisk vektorrum over K ($K = \mathbb{R}$ eller $K = \mathbb{C}$); lad $\{e_1, \ldots, e_n\}$ være en basis for E; vis, at

afbildningen φ: $K^n \to E$ defineret ved, at $\varphi((\lambda_1,\ldots,\lambda_n)) = \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n$, er en homeomorfi af K^n, forsynet med den sædvanlige topologi, på E. (Forsyn K^n med den sædvanlige euklidiske norm, og lad S betegne enhedssfæren i K^n; vis først, at det er nok at vise, at for en vilkårlig mængde $\grave{B}(o)$ af delmængde af K^n, der opfylder V1,...,V6, gælder: $\forall B \in \grave{B}(o)\ \exists\lambda > 0\ (\lambda S \subseteq B)$, og: $\exists B \in \grave{B}(o)\ (B \cap S = \emptyset)$; udnyt også, at S er kompakt).

4. a) Lad en delmængde A af et t.v.r. E opfylde: A er stjerneformet m.h.t. o, og: $\forall x \in A\ \exists\mu > 1\ (\mu x \in A)$, og: $\forall x,y \in A\ (\frac{1}{2}(x + y) \in A)$; vis, at A er konveks.

b) Find en mængde A, der er stjerneformet m.h.t. o, og opfylder: $A + A = 2A$, men ikke er konveks.

5. Lad A og B være disjunkte konvekse delmængder af et vektorrum E; vis, at der findes disjunkte konvekse delmængder C og D af E, så at $A \subseteq C$, $B \subseteq D$ og $C \cup D = E$. (Brug Zorns lemma på mængden af par af disjunkte konvekse mængder M og N, så at $A \subseteq M$ og $B \subseteq N$).

6. Lad E være vektorrummet over $\mathring{R}$ af kontinuerte reelle funktioner på intervallet $I = [0,1]$. Lad for ethvert talpar (δ,ε), hvor $\delta > 0$ og $0 < \varepsilon < 1$, $V(\delta,\varepsilon)$ betegne $\{x \in E \mid \exists$ en åben mængde $A \subseteqq [0,1]$ med Lebesgue-mål $< \varepsilon$, så at $|x(t)| < \delta$ for $t \notin A\}$.

a) Vis, at $\{V(\delta,\varepsilon) \mid \delta > 0,\ 0 < \varepsilon < 1\}$ opfylder betingelserne V1,...,V6, og derfor definerer en topologi $\mathring{O}$ på E.

b) Vis, at for $\delta > 0$ og $0 < \varepsilon < 1$ findes der $n \in \mathring{N}$, så at $E = \sum_{i=1}^{n} A_i$, med $A_i = V(\delta,\varepsilon)$ for $1 \leqq i \leqq n$. (Vis først, at funktionen 1 kan skrives som sum af stykkevis lineære funktioner $\in E$ med støtte med Lebesgue-mål $< \varepsilon$).

c) Vis, at E ikke er lokalkonvekst, og at enhver kontinuert lineær funktional på E er identisk nul.

7. Vis, at afslutningen af en cirkelmængde er en cirkelmængde.

8. a) Lad der være givet en topologisk gruppe G og en følge (V_n) af omegne af e. Vælg en ny følge (U_n) af omegne af e, der opfylder: $U_1 \subseteqq V_1$, $U_n^{-1} = U_n$, $U_{n+1}\, U_{n+1}\, U_{n+1} \subseteqq U_n \cap V_n$. Definer en funktion $g: G \to \mathring{R}$ ved

$$g(x) = \begin{cases} 0 & , x \in \bigcap U_n \\ 2^{-k} & , x \in U_k \setminus U_{k+1} \\ 1 & , x \in G \setminus U_1 \end{cases} .$$

g opfylder: $g(x) = g(x^{-1})$, $g(G) \subseteqq [0,1]$, $g(x) < 2^{-k+1} \iff g(x) \leqq 2^{-k} \iff x \in U_k$, og $g(u_1 \cdot \ldots \cdot u_n) \leqq 2(g(u_1)+\ldots+g(u_n))$. (Brug induktion efter n, og lad, for $2(g(u_1)+\ldots+g(u_n)) = 2a < 1$, h være det største hele tal, for hvilket $g(u_1)+\ldots+g(u_h) \leqq \frac{1}{2}a$, og bestem k ($\geqq 2$), så at $2a \geqq 2^{-k+1} > a$; så vil $u_1 \cdot \ldots \cdot u_{h+2}$ og u_{h+1} $u_{h+2} \cdot \ldots \cdot u_n \in U_k$, og $g(u_1 \cdot \ldots \cdot u_n) \leqq 2^{-k+1} \leqq 2a$).

Definer $f: G \to \mathring{R}$, ved: $f(x) = \inf\{g(u_1)+\ldots+g(u_n) \mid n \in \mathring{N},$

$u_1,\dots,u_n \in G,\ u_1\cdot\ldots\cdot u_n = x\}$. f opfylder: $\frac{1}{2}g(x) \leqq f(x) \leqq g(x)$; $f(x) \geqq 0$; $f(e) = 0$; $f(xy) \leqq f(x) + f(y)$; $f(x^{-1}) = f(x)$; f er kontinuert i e; f er kontinuert overalt (brug $f(xy) \leqq f(x) + f(y)$ og $f(e) = 0$); $f(x) = 0 \iff x \in \bigcap U_n \Rightarrow x \in \bigcap V_n$; $x \in G \setminus V_1 \Rightarrow f(x) \geqq \frac{1}{2}$; $\forall\, n \in \mathbb{N}\ \exists\, \delta > 0 (f(x) < \delta \Rightarrow x \in V_n)$ d.v.s. (løst) f bestemmer topologien ligeså godt som følgen (V_n).

b) Bevis sætningen: Til afsluttet mængde $A \subseteq G$ og punkt $x \notin A$ findes der en kontinuert funktion $h: G \to [0,1]$, så at $h(x) = 0$ og $h(A) \subseteq \{1\}$. Hvis $\{e\}$ er afsluttet, er G fuldstændig regulær.

(For $x = e$ kan bruges $h = (2f) \wedge 1$, hvor f er konstrueret som ovenfor til følgen (V_n), $V_n = G \setminus A$).

c) Bevis sætningen: Hvis $\{e\}$ er afsluttet og G opfylder det første tællelighedsaksiom, er G metriserbar, d.v.s. topologien kan defineres ved hjælp af en afstandsfunktion dist, der er venstre invariant: $\mathrm{dist}(ax,ay) = \mathrm{dist}(x,y)$, eller højreinvariant: $\mathrm{dist}(xa,ya) = \mathrm{dist}(x,y)$.

(Vælg en tællelig basis (V_n) for $\mathfrak{B}(e)$, bestem f som før, og sæt $\mathrm{dist}_v(x,y) = f(x^{-1}y)$, $\mathrm{dist}_h(x,y) = f(xy^{-1})$).

9. Lad $\{E_i \mid i \in I\}$ være en mængde af topologiske vektorrum over samme legeme K. Vis, at produktrummet, forsynet med "koordinatvise regneoperationer" og produkttopologien, er et topologisk vektorrum. Vis, at et filter $\mathfrak{G}$ på produktrummet er fundamentalt, hvis og kun hvis alle dets projektioner er fundamentale, og at produktrummet er fuldstændigt, hvis og kun hvis alle rummene E_i er fuldstændige.

(Udnyt, at hvis $\mathfrak{F}_i$, $i \in I$, er et fundamentalfilter på E_i, så er det groveste filter på produktmængden, der indeholder alle mængder $\mathrm{pr}_i^{o-1}(F_i)$, $F_i \in \mathfrak{F}_i$, et fundamentalfilter, hvis projektioner falder sammen med de givne filtre).

10. Vis, at det i øvelse 6 indførte vektorrum E, der åbenbart opfylder det første tællelighedsaksiom, ikke er fuldstændigt.

11. Et filter $\dot{F}$ på en mængde E kaldes elementært, hvis der findes en følge (a_n) af elementer i E, så at $\dot{F}$ er filtret frembragt af filterbasen $\{\{a_{n+\nu} \mid \nu \in \dot{N}\} \mid n \in \dot{N}\}$. Lad der nu være givet et filter $\dot{F}$ med tællelig basis $\{F_n \mid n \in \dot{N}\}$. Vis, at $\dot{F}$ er det fineste filter på E, der er grovere end ethvert elementært filter finere end $\dot{F}$.

12. Vis, at et minimalt fundamentalfilter på et t.v.r., der opfylder det første tællelighedsaksiom, har tællelig basis.

13. Vis, at man kan udføre teorien for fuldstændiggørelse af et t.v.r. (eller en abelsk topologisk gruppe), der opfylder det første tællelighedsaksiom, idet man i stedet for minimale fundamentalfiltre udnytter det - passende definerede - begreb: ækvivalensklasser af fundamentalfølger.

14. Vis, at en konveks delmængde af $\dot{R}^n$ er afsluttet, hvis dens fællesmængde med enhver ret linie er afsluttet.

15. En ligelig struktur på en mængde X er en mængde $\hat{U} \subseteq \dot{D}(X \times X)$, så at

L1) $\hat{U}$ er et filter på $X \times X$

L2) $\forall\, U \in \hat{U}(\Delta \subseteq U)$

L3) $\forall\, U \in \hat{U}(U^{-1} \in \hat{U})$

L4) $\forall\, U \in \hat{U}\ \exists\, W \in \hat{U}(W \circ W \subseteq U)$

hvor $\Delta = \{(x,x) \mid x \in X\}$; $U^{-1} = \{(x,y) \mid (y,x) \in U\}$ og $U \circ V = \{(x,y) \mid \exists\, z \in X((x,z) \in V \wedge (z,y) \in U)\}$.

Lad X være en mængde forsynet med en ligelig struktur $\hat{U}$.

a) Sæt, for ethvert $x \in X$, $\dot{U}(x) = \{V(x) \mid V \in \hat{U}\}$, hvor $V(x) = \{y \in X \mid (x,y) \in V\}$;

vis, at der findes præcis en topologi på X, så at $\dot{U}(x)$ er filtret af omegne af x i denne.

(Den herved bestemte topologi på X kaldes den af $\hat{U}$ inducerede).

b) Idet X forsynes med den inducerede topologi $\mathring{U}(x)$, gælder for enhver delmængde M af $X \times X$, at $V \in \hat{U}$ og $V = V^{-1} \Rightarrow V \circ M \circ V$ er omegn af M i $X \times X$ og $\overline{M} = \bigcap\{V \circ M \circ V \mid V \in \hat{U} \wedge V = V^{-1}\} = \bigcap\{V \circ M \circ V \mid V \in \hat{U}\}$.

c) For $A \subseteq X$ sættes $V(A) = \bigcup\{V(x) \mid x \in A\}$. Vis, at $\overline{A} = \bigcap\{V(A) \mid V \in \hat{U}\}$.

d) En basis for en ligelig struktur $\hat{U}$ på X er en delmængde $\hat{B}$ af $\hat{U}$, således at: $\forall U \in \hat{U} \exists B \in \hat{B}(B \subseteq U)$; vis, at $\{\overline{U} \mid U \in \hat{U}\}$, $\{U \mid U \in \hat{U} \wedge U = U^{-1}\}$, og $\{\mathring{U} \mid U \in \hat{U}\}$ er baser for $\hat{U}$. ($\overline{U}$ er afslutningen af U i $X \times X$).

e) vis, at T3 er opfyldt i X (jfr. T.2.16).

f) vis, at X er et Hausdorffrum, hvis og kun hvis $\Delta = \bigcap\{U \mid U \in \hat{U}\}$ (jfr. KI, 1,1.).

16. a) Lad X have den ligelige struktur $\hat{U}$, og $S \subseteq X$. Vis, at $\hat{U} \cap (S \times S) = \{U \cap (S \times S) \mid U \in \hat{U}\}$ er en ligelig struktur på S. Hvilken topologi induceres herved på S?

b) Et filter $\mathring{F}$ på X med den ligelige struktur $\hat{U}$ kaldes et fundamentalfilter, hvis der gælder

$$\forall U \in \hat{U} \exists x \in X \exists F \in \mathring{F}[F \subseteq U(x)]$$

d.v.s. (løst) hvis filtret indeholder mængder af vilkårlig lille størrelse.

Vis, at et konvergent filter er et fundamentalfilter. Hvis omvendt ethvert fundamentalfilter er konvergent, kaldes rummet X fuldstændigt.

c) Lad X og X' have de ligelige strukturer $\hat{U}$ og $\hat{U}'$. $f: X \to X'$ kaldes ligelig kontinuert, hvis

$$\forall U' \in \hat{U}'[(f \times f)^{o-1}(U') \in \hat{U}].$$

Vis, at f er ligelig kontinuert, hvis og kun hvis $\forall\, U' \in \hat{U}'\ \exists\ U \in \hat{U}\ \forall\, x \in X\ [f(U(x)) \subseteq U'(f(x))]$. Vis: f ligelig kontinuert $\Rightarrow$ f kontinuert.

d) Vis: f ligelig kontinuert og $\dot{F}$ fundamentalfilter $\Rightarrow f(\dot{F})$ basis for et fundamentalfilter.

Vis herved, at en ligelig kontinuert afbildning fra en tæt delmængde til et fuldstændigt Hausdorffrum har én udvidelse til en (ligelig) kontinuert afbildning (sammenlign KI, 2,5).

17. Lad x være et kompakt rum.

a) Vis, at $\hat{U} = \{U \subseteq X \times X \mid U \text{ er omegn af } \Delta\}$ er en ligelig struktur på X.

(Hjælp: L4 bevises indirekte: Antag $\exists\, V \in \hat{U}\ \forall\, W \in \hat{U}(W^2 \cap CV \neq \emptyset)$, og betragt filter $\dot{G}$ frembragt af $\{W^2 \cap CV \mid W \in \hat{U}\}$. Vælg $(a,b) \in \bigcap\{\ddot{G} \mid G \in \dot{G}\}$. Vælg $U_1 \in \dot{U}(a)$, $U_2 \in \dot{U}(b)$ med $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, og vælg $\ddot{V}_1 = \overline{V}_1 \subseteq \mathring{U}_1$, $V_2 = \overline{V}_2 \subseteq \mathring{U}_2$, $V_1 \in \dot{U}(a)$ $V_2 \in \dot{U}(b)$ og betragt $W = (U_1 \times U_1) \cup (U_2 \times U_2) \cup C((V_1 \cup V_2) \times (V_1 \cup V_2)))$.

b) Eftervis, at $\hat{U}$ inducerer den oprindelige topologi på X. (Vis og benyt, at en bijektiv afbildning af et kompaktrum X på et Hausdorffrum Y er en homeomorfi.).

c) Vis, at hvis $\hat{U}$ er en ligelig struktur, der inducerer den givne topologi på X, da er $\hat{U}$ entydigt bestemt som systemet af alle omegne af Δ (i produkttopologien). (Benyt opgave 15 c til den ene implikation. Beviset for, at enhver omegn af Δ tilhører $\hat{U}$, føres nemmest indirekte: Antag, at en åben omegn O ikke tilhører $\hat{U}$ og betragt filtret $\{U \cap ((X \times X) \setminus O)\}$ på $(X \times X) \setminus O)$.

d) Vis, at en kontinuert afbildning af et kompakt rum ind i et ligeligt rum er ligelig kontinuert.

18. Bestemt samtlige normer i de endimensionale talrum $\dot{R}$ og $\dot{C}$.

19. Med $C^1[a,b]$ betegnes vektorrummet bestående af de i intervallet $[a,b]$ differentiable reelle funktioner med kontinuerte afledede. Vis, at der ved

$$\|\varphi\|_\infty^{(1)} = \sup_{t\in[a,b]} |\varphi(t)| + \sup_{t\in[a,b]} |\varphi'(t)|$$

for $\varphi \in C^1[a,b]$ defineres en norm i dette vektorrum.
For givne, i $[a,b]$ kontinuerte og i $]a,b[$ positive funktioner p og q er også

$$\|\varphi\| = \left(\int_a^b [p(t)\varphi'(t)^2 + q(t)\varphi(t)^2]dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

en norm i det betragtede vektorrum. Bevis dette.

20. Lad K være en konveks delmængde i et vektorrum V over de reelle tals legeme. Det forudsættes, at der til hver vektor $\underline{x} \in V$ findes mindst eet tal $t > 0$, således at $t\underline{x} \in K$ (d.v.s. på hver halvlinie ud fra $\underline{0}$ ligger mindst eet fra $\underline{0}$ forskelligt punkt tilhørende K). Vis, at funktionen

$$F(\underline{x}) = \inf_{t\underline{x}\in K,\ t>0} \frac{1}{t}, \qquad \underline{x} \in V,$$

opfylder $\|\underline{x} + \underline{y}\| \leq \|\underline{x}\| + \|\underline{y}\|$ og $\|\lambda\underline{x}\| = \lambda\|\underline{x}\|$ for $\lambda \geq 0$.
Vis, at F er en norm, hvis K er symmetrisk med hensyn til $\underline{0}$ (d.v.s. hvis $\underline{x} \in K$ medfører, at $-\underline{x} \in K$) og der til hver vektor $\underline{x} \neq \underline{0}$ findes et tal $t > 0$, således at $t\underline{x} \notin K$ (altså K ikke indeholder nogen halvlinie ud fra $\underline{0}$).

21. De i et interval $[a,b]$ definerede reelle funktioner af begrænset variation danner et vektorrum $BV[a,b]$ over de reelle tals legeme. Vis, at man ved til hver funktion $\alpha \in BV[a,b]$ at lade svare dens totale variation $V_\alpha(a,b)$ får en norm i dette vektorrum. $+ |\alpha(a)|$

22. $l_p(n,K)$ betegner K^n forsynet med normen $\| \ \|_p$
Bestem de norm-duale til de endelig-dimensionale normerede

vektorrum $l_\infty(n,\dot{R})$ og $l_\infty(n,\dot{C})$.

23. Bestem de norm-duale til rummene $l_p(n,\dot{R})$ og $l_p(n,\dot{C})$ for $1 < p < \infty$ ved hjælp af <u>Hölder's ulighed</u>

$$|\Sigma x_i y_i| \leqq (\Sigma|x_i|^p)^{1/p}(\Sigma|y_i|^q)^{1/q},$$

som er gyldig for $1 < p < \infty$, $1/q = 1 - 1/p$ og alle par af komplekse talsæt $(x_1,\ldots,x_n)$, $(y_1,\ldots,y_n)$.

24. Vis, at hver kontinuert linearform Λ i talfølgerummet $l_p(\dot{R})$, hvor $1 \leqq p < \infty$, har en fremstilling af formen

$$\Lambda(x_1,x_2,\ldots) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i x_i,$$

hvor $(\lambda_1,\lambda_2,\ldots)$ er en reel talfølge, således at den uendelige række på højre side konvergerer absolut for hver talfølge $(x_1,x_2,\ldots) \in l_p(\dot{R})$.

Bestem det norm-duale til rummet $l_p(\dot{R})$.

25. Lad V være et top. vektorrum.

Med Λ betegnes en fra nulformen forskellig linearform i dette rum. Vis, at hyperplanen $\Lambda(\underline{x}) = 0$ er en afsluttet delmængde af V, hvis og kun hvis Λ er kontinuert.

Vis, at en hyperplan, som ikke er afsluttet, er overalt tæt i V.

26. Lad T være et topologisk rum og $C_\infty(T)$ vektorrummet af alle i T definerede, begrænsede og kontinuerte reelle funktioner med ∞-normen. Vis, at $C_\infty(T)$ er et Banach-rum.

Rummene $C_p[a,b]$, hvor $[a,b]$ er et interval og $1 \leqq p < \infty$, er derimod ikke fuldstændige. Bevis dette for $p = 1$.

27. Lad V være et vilkårligt normeret vektorrum og V' dets norm-duale. For en fast vektor $\underline{v} \in V$ defineres en funktion i V' ved til hver begrænset linearform Λ på V at lade svare den værdi $\Lambda(\underline{v})$, som den antager for $\underline{v}$. Vis, at denne funktion

$\varphi_{\underline{v}}: V'$ ind i K er en begrænset linearform, altså et element af det til V' norm-duale rum V'', hvis norm

$$\|\varphi_{\underline{v}}\|'' = \sup_{\|\Lambda\|' \leq 1} |\Lambda(\underline{v})|$$

tilfredsstiller uligheden $\|\varphi_{\underline{v}}\|'' \leq \|\underline{v}\|$.
Ved til vektor at lade svare linearformen $\varphi_{\underline{v}}$ fås en naturlig afbildning f:V ind i V''. Vis, at f er lineær.
Det er en konsekvens af en fundamental sætning, Hahn-Banach's sætning (som her benyttes uden bevis), at der for hver vektor $\underline{v} \in V$ findes en begrænset linearform $\Lambda \in V'$, for hvilken $\|\Lambda\|' = 1$ og $|\Lambda(\underline{v})| = \|\underline{v}\|$. Slut heraf, at $\|\varphi_{\underline{v}}\|'' = \|\underline{v}\|$, og dermed at f er en isomorf afbildning af V på et underrum i V''.
Hvis dette underrum er hele rummet V'', altså f en isomorf afbildning af V på V'', siges det normerede vektorrum V at være (norm-)refleksivt. Et sådant er nødvendigvis et Banach-rum.
Alle endelig-dimensionale normerede vektorrum samt følgerummene $l_p(L)$, $1 < p < \infty$, er refleksive. Underrummet i $l_\infty(\dot{R})$ bestående af alle reelle talfølger, som konvergerer mod 0, er et eksempel på et Banach-rum, som ikke er refleksivt. Bevis disse påstande.
(Benyt bl.a. opg. 10 og 11.)

28. Vis, at $]-1,1[\ \cup \{3\}$ ikke kan skrives på formen U + V, hvor U og V tilhører filtret af omegne af 0 i $\dot{R}$. For hvilke $a \in \dot{R}$ kan $]-1,1[\ \cup \{a\}$ skrives på denne form?

29. Lad $\dot{F} = \{F_n \mid n \in \dot{N}\}$ og $\dot{G} = \{G_n \mid n \in \dot{N}\}$ være filterbaser på et vektorrum E; vis, at hvis $F_1 \supseteqq F_2 \supseteqq \dots$ og $G_1 \supseteqq G_2 \supseteqq \dots$ så er $\{F_n+G_n \mid n \in \dot{N}\}$ en basis for $\{F_n+G_m \mid n,m \in \dot{N}\}^*$. Hvis E er et t.v.r. kan betingelsen $:G_1 \supseteqq G_2 \supseteqq \dots$ erstattes med f.eks.: $\dot{G}^*$ er et minimalt fundamentalfilter. Søg at belyse opgaven med modeksempler, f.eks. for $E = \dot{R}$.

30. Lad H være et præ Hilbertrum; sæt $H(a,f) = \{g \in H \mid \|g-f\| \leqq a\}$ for $a \geqq 0$ og $f \in H$. Vis, at en konveks delmængde $A \subseteqq H(o,d+\delta) \setminus H(o,d)$, hvor $0 \leqq \delta < d$, har en diameter $\leqq \sqrt{(12\delta d)}$.

31. a) Vis følgende sætninger om komplekse tal z og w, idet $1 < p < \infty$:

a_1) $\forall\, \varepsilon \in\ ]0,2]\ \exists\, \delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0\quad \forall\, z, w \in \dot{C}$
$[|z| \leqq |w| = 1 \wedge |z-w| \geqq \varepsilon \Rightarrow (\frac{1}{2}(1+|z|^p) - (\frac{1}{2}|w+z|)^p)$
$(\frac{1}{2}(1+|z|^p)^{-1} \geqq \delta_1]$.

a_2) $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta_2 = \delta_2(\varepsilon) > 0\quad \forall\, z,w \in \dot{C}$
$[|w-z| \geqq \varepsilon\ (|z| \vee |w|) \Rightarrow \frac{1}{2}(|w|^p+|z|^p) - (\frac{1}{2}|w+z|)^p$
$\geqq \frac{1}{2}(|w|^p + |z|^p)\delta_2]$.

b) Lad f og g være funktioner $\in L^p(\dot{R})$, for hvilke $\|f\|_p \leqq 1, \|g\|_p \leqq 1$ og $\|f-g\|_p \geqq \varepsilon$. Idet $A = \{t \in \dot{R} \mid |f-g|^p \geqq \frac{1}{4}\varepsilon^p(|f|^p+|g|^p)\}$, skal det vises, at $\int_A |f-g|^p dt \geqq (\frac{1}{2}\varepsilon)^p$, at $\int_A (|f|^p+|g|^p)dt \geqq \sup\{\int_A |f|^p dt, \int_A |g|^p dt\} \geqq (\frac{1}{4}\varepsilon)^p$, og at $\frac{1}{2}\int_A(|f|^p+|g|^p)dt - \int_A |\frac{1}{2}(f+g)|^p dt \geqq \delta_2(\frac{1}{4}\varepsilon)\cdot\frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{4}\varepsilon)^p$.

c) Vis, at $L^p(\mathbf{R})$ er et ligelig konvekst rum.

32. Vis, at mængden af talfølger i l^2 med lutter ikke-negative reelle led er en afsluttet konveks mængde uden indre punkter.

33. Lad H være et Hilbertrum med et nummererbart ortonormalsystem $(e_n)_{n \in \mathbf{N}}$. Lad A være den (konvekse) afslutning af den mindste konvekse mængde i H, der indeholder alle punkterne $(1-n^{-1})e_n$, $n = 1,2,\ldots$. Find diameteren $d(A) = \sup\{\|x-y\| \mid x,y \in A\}$, og vis, at $\|x-y\| < d(A)$ for alle $x,y \in A$.

34. Lad F være det mindste afsluttede underrum $\subseteq l^2$, der indeholder e_1 og e_{2n}, $\forall n \in N$; lad G være det mindste afsluttede underrum $\subseteq l^2$, der indeholder $e_{2n} + \lambda_n e_{2n+1}$, $\forall n \in N$, hvor $(\lambda_n) \in l^2$, og $\lambda_n > 0$, $\forall n \in N$. Vis, at det mindste afsluttede underrum $\subseteq l^2$, der indeholder F og G, er l^2, men at ikke $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_{2n+1} \in l^2$ kan skrives f+g, med $f \in F$, $g \in G$. (Vis, at $\lambda_n^{-1} (f+g \mid e_{2n+1}) \to 0$).

35. Lad F være et Hilbertrum og $\{e_n \mid n \in \mathbf{Z}\}$ et ortonormalsystem i F. Sæt $H_1 = \{f \in F \mid \exists n \in \mathbf{N}(\nu < -n \vee \nu \geq 0 \Rightarrow (f|e_\nu) = 0)\}$, $H_2 = \{f \in F \mid \exists n \in \mathbf{N}(\nu \leq 0 \vee \nu > n \Rightarrow (f|e_\nu) = 0)\}$, $g = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} |\nu|^{-2} e_\nu$, og H = det mindste underrum af F, der indeholder H_1, H_2 og g. Idet vi lader $\perp$ betegne ortogonalt komplement med hensyn til H, skal det vises, at $H_1^{\perp\perp} = H_1$, og at $H_1 + H_1^{\perp} \neq H$.

36. Idet vi benytter betegnelserne p. K III,3,2(1962-63), og antager, at I er uendelig, skal det vises, at filtret med basis $\{\{\sum_{i \in K} h_i \mid K$ er en endelig delmængde af I, $K \supseteq J\} \mid J$ er en endelig delmængde af $I\}$ er konvergent med grænseværdien $\sum_{i \in I} h_i$.

37. Lad H være et Hilbertrum, og lad (H_n) være en følge af afsluttede underrum, med tilsvarende projektioner P_n; antag, at (P_n) er en fundamentalfølge i $L(H,H)$. Vis, at der findes $n \in \mathbb{N}$, så at H_m har samme dimension som H_n for $m \geqq n$.

38. Vis, at udvalgsaksiomet er ækvivalent med sætningen: For enhver surjektiv afbildning φ af en mængde A på en mængde B findes der en afbildning Ψ af B ind i A, så at $\varphi \circ \psi$ er den identiske afbildning af B.

39. Lad E være et vektorrum, $\{f_i \in E \mid i \in I\}$ en lineært uafhængig mængde og $\{g_j \in E \mid j \in J\}$ en mængde, der udspænder E; vis, at $\mathrm{card}(I) \leqq \mathrm{card}(J)$. (Udnyt f.eks., at $\{f_i \mid i \in I\}$ kan udvides til en basis for E). Overvej, at man kan definere den algebraiske dimension af E som kardinaltallet for en maksimal, lineært uafhængig delmængde.

40. Lad A være en velordnet mængde. Ethvert element $a \in A$, på nær højst ét, har en umiddelbar efterfølger $a+1$; hvis $a+1$ har en umiddelbar efterfølger, betegner vi den $a+2$, o.s.v. Vi definerer $a \sim b$, hvis der findes $c \in A$ og $n \in \mathbb{N}$, så at $\{a,b\} \subseteqq \{c,c+1,\ldots,c+n\} \subseteqq A$. Vis, at $\sim$ er en ækvivalensrelation, og at alle ækvivalensklasser, på nær højst én, er nummererbare. Udled heraf et bevis for, at enhver uendelig mængde er foreningsmængde af parvis disjunkte nummererbare delmængder.

41. a) Vis, at for $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| < 1$, vil talfølgen $f_\lambda = (\lambda^n) \in l^2$, og at $\{f_\lambda \mid \lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| < 1\}$ er lineært uafhængig; den algebraiske dimension af l^2 er således $\geqq \mathrm{card}(\mathbb{R})$. (Brug teorien for van der Monde determinanter.

b) Lad H være et Hilbertrum; lad H_1 være et afsluttet underrum med dimensionen $\mathrm{card}(\mathbb{N})$; lad $\{f_\lambda \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ være en lineært uafhængig delmængde af H_1; vi antager, at $H_2 = H_1^{\perp}$ har dimensionen card $(\dot{R})$; lad $\{e_\lambda | \lambda \in \dot{R}\}$ være en ortonormal tilnærmelsesbasis for H_2; lad F være det mindste underrum af H, der indeholder $\{f_\lambda + e_\lambda \mid \lambda \in \dot{R}\}$.

Vis, at projektionen på H_2 af en tæt mængde i F er tæt i H_2, og derfor har kardinaltal $\geqq$ card$(\dot{R})$; vis, at $F \cap H_2 = \{0\}$; vis, at ethvert ortonormalsystem $S \subseteqq F$ er højst nummererbart (udnyt, at ethvert element i H_1 er vinkelret på alle elementer i S på nær højst nummererbart mange).

c) Vis, at dimensionen af $\overline{F}$ er card$(\dot{R})$; vis, at F ikke har nogen ortonormal tilnærmelsesbasis.

42. Undersøg om bilinearformerne

$B_1(\underline{x},\underline{y}) = 2x_1y_1+2x_2y_2+2x_3y_3-x_2y_3-x_3y_2+x_3y_1+x_1y_3-x_1y_2-x_2y_1,$

$B_2(\underline{x},\underline{y}) = 2x_1y_1+2x_2y_2+2x_3y_3-x_2y_3-x_3y_2-x_3y_1-x_1y_3-x_1y_2-x_2y_1,$

hvor $\underline{x} = (x_1,x_2,x_3)$ og $\underline{y} = (y_1,y_2,y_3)$, er indre produkter i talrummet $\grave{R}^3$.

43. Om et normeret vektorrum V over $\grave{R}$ forudsættes, at

$$\|\underline{x} + \underline{y}\|^2 + \|\underline{x} - \underline{y}\|^2 = 2(\|\underline{x}\|^2 + \|\underline{y}\|^2)$$

for alle $\underline{x},\underline{y} \in V$. Vis, at V er et vektorrum med indre produkt [nemlig $\frac{1}{2}(\|\underline{x} + \underline{y}\|^2 - \|\underline{x}\|^2 - \|\underline{y}\|^2)$].

44. Vis, at når $\underline{a}$ og $\underline{b}$ er to forskellige vektorer i et vektorrum med indre produkt, vil mængden af de vektorer $\underline{x}$ i rummet, for hvilke $\|\underline{x} - \underline{a}\| = \|\underline{x} - \underline{b}\|$, være en afsluttet hyperplan.

45. Med $C_2[-1,1]$ betegnes vektorrummet af alle i intervallet $[-1,1]$ definerede reelle og kontinuerte funktioner med det indre produkt

$$\varphi\cdot\psi = \int_{-1}^{1}\varphi(t)\psi(t)\,dt.$$

Vis, at rummet ikke er fuldstændigt.

De ulige funktioner i $C_2[-1,1]$, som altså opfylder $\varphi(-t) = -\varphi(t)$ for $-1 \leq t \leq 1$, udgør et underrum U. Bestem underrummet $U^{\perp}$.

Vis, at underrummet bestående af funktionerne φ, for hvilke $\varphi(0) = 0$, er overalt tæt i $C_2[-1,1]$.

46. Lad U være et afsluttet underrum i et Hilbert-rum V. Vis, at der til hver vektor $\underline{x} \in V$ findes en og kun een vektor $\underline{x}^* \in V$, således at $\underline{x}^* - \underline{x} \perp U$ og $\frac{1}{2}(\underline{x} + \underline{x}^*) \in U$.

Vis, at der ved $\underline{x} \to \underline{x}^*$ defineres en isometrisk afbildning af

V på sig selv (<u>spejling i underrummet</u> U).

47. Find ortogonalprojektionen af vektoren (1,1,1,1,1) på det af vektorerne

$$(1,0,1,1,0), \quad (2,1,0,1,1), \quad (1,2,0,-1,1)$$

udspændte underrum i talrummet $l_2(5,\mathbb{R})$.

48. I et vektorrum med indre produkt er

$\underline{x} = \underline{a} + s\underline{u}, \quad s \in \mathbb{R}, \qquad \underline{y} = \underline{b} + t\underline{v}, \quad t \in \mathbb{R},$

hvor $\underline{a}$, $\underline{u}$, $\underline{b}$, $\underline{v}$ er givne vektorer, $\underline{u} \neq \underline{0}$ $\underline{v} \neq \underline{0}$, parameterfremstillinger for to linier. Find den mindste afstand mellem linierne udtrykt ved de givne vektorer.

49. Vis, at mængden af de funktioner $\varphi \in C_2[-1,1]$ (jfr. øv. 7), for hvilke

$$\int_0^1 \varphi(t)\, dt = 0,$$

er et afsluttet underrum $U \subset C_2[-1,1]$. Vis endvidere, at $U^{\perp} = \{0\}$.

50. Anvend Gram-Schmidt's ortogonaliseringsmetode på vektorerne

$$(9,12,0,-20), \quad (-1,-18,0,20), \quad (7,-24,3,20)$$

og bestem derved en ortonormal basis for det af disse vektorer udspændte underrum U i talrummet $l_2(4,\mathbb{R})$. Angiv også en ortonormal basis for $U^{\perp}$.

Opstil matrixligningerne [med hensyn til basen (1,0,0,0), (0,1,0,0),(0,0,1,0), (0,0,0,1)] for ortogonalprojektionerne p_U og $p_{U^{\perp}}$ af $l_2(4,\mathbb{R})$ på U og $U^{\perp}$. (Som kontrol kan $p_U \circ p_U = p_U$, $p_U \circ p_{U^{\perp}} = \underline{0}$ og $p_U + p_{U^{\perp}} = e$ verificeres ved matrixregning.)

51. Find ved ortogonalisering en ortonormal basis for det af funktionerne 1, t, t^2 udspændte underrum i $C_2[-1,1]$ (jfr. øv. 7), og bestem Fourierkoefficienterne for t^2 med hensyn til det fundne system.

Vis, at funktionerne

$$\varphi_n(t) = (n + \tfrac{1}{2})^{\frac{1}{2}} \ P_n(t), \qquad n = 0,1,2,\ldots,$$

hvor

$$P_n(t) = (2^n n!)^{-1} D^n (t^2 - 1)^n$$

er de såkaldte Legendre-polynomier, danner et ortonormalsystem i $C_2[-1,1]$. (Begynd med at vise, at $P_n(t)$ er ortogonal til alle polynomier af højst $(n-1)$-te grad.) Af Weierstrass' approksimationssætning sluttes, at ortonormalsystemet er en tilnærmelsesbasis.

52. Med $C_2[a,b;c,d]$ betegnes vektorrummet bestående af alle i rektanglet $[a,b] \times [c,d]$ definerede og kontinuerte funktioner $f(s,t)$ med

$$\|f\|_2 = \left(\int_a^b \int_c^d f(s,t)^2 ds\ dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

som norm. Vis, at hvis $\varphi_i(s)$, $i \in \mathbb{N}$, og $\psi_j(t)$, $j \in \mathbb{N}$, er a) ortonormalsystemer, b) tilnærmelsesbaser for henholdsvis $C_2[a,b]$ og $C_2[c,d]$, vil $\varphi_i(s)\psi_j(t)$, $i,j \in \mathbb{N}$, være a) et ortonormalsystem, b) en tilnærmelsesbasis for $C_2[a,b;c,d]$.

53. Vis, at enhedskuglen $\{\underline{x} \in V \mid \|\underline{x}\| \leqq 1\}$ i et uendelig-dimensionalt vektorrum V med indre produkt ikke er kompakt.

54. Lad $C_2]a,b[$ og $C_1]a,b[$, hvor $-\infty \leqq a < b \leqq \infty$, betegne de normerede vektorrum bestående af de i intervallet $]a,b[$ kontinuerte funktioner φ, for hvilke henholdsvis

$$\|\varphi\|_2{}^2 = \int_a^b \varphi(t)^2 dt \qquad \text{og} \qquad \|\varphi\|_1 = \int |\varphi(t)|\,dt$$

eksisterer. Undersøg i hvert af de tre tilfælde

$$-\infty < a < b < \infty, \qquad a = -\infty,\ b = \infty, \qquad a = 0,\ b = \infty,$$

om et af disse rum er et underrum i det andet.

55. Der er givet en reel funktion $w(t)$, som er defineret, kon-

tinuert og positiv i det åbne interval $]a,b[$, hvor $-\infty \leqq a < b \leqq \infty$, og for hvilken integralerne

$$\int_a^b w(t)|t|^n dt, \qquad n = 0,1,2,\ldots,$$

alle er konvergente. I vektorrummet $P]a,b[$ bestående af de reelle polynomiers restriktioner til intervallet $]a,b[$ defineres et indre produkt ved

$$p \cdot q = \int_a^b w(t)p(t)q(t)dt.$$

Vis, at dette vektorrum med indre produkt har en og kun een ortonormal basis $(\varphi_0, \varphi_1, \ldots)$, således at φ_n for hvert $n = 0,1,\ldots$ er et polynomium af n-te grad, hvori t^n har en positiv koefficient.

Vis, at polynomiet φ_n har n forskellige reelle rødder, som alle ligger i intervallet $]a,b[$. (Benyt, at der findes polynomier af (n-1)-te grad, som har n-1 foreskrevne rødder.)

De til visse specielle "vægtfunktioner" w hørende ortonormalsystemer af polynomier spiller en fremtrædende rolle i analysen og dens anvendelser.

For $a = -1$, $b = 1$, $w(t) = 1$ fås de ovenfor (øv. 13) omtalte polynomier, som fremgår ved normering af <u>Legendre-polynomierne</u> $P_n(t)$.

For $a = -1$, $b = 1$, $w(t) = (1-t^2)^{-\frac{1}{2}}$ fås

$$\varphi_0(t) = \pi^{-\frac{1}{2}}, \quad \varphi_n(t) = (\tfrac{1}{2}\pi)^{-\frac{1}{2}} T_n(t), \qquad n = 1,2,\ldots,$$

hvor

$$T_n(t) = \cos(n \operatorname{Arccos} t), \qquad n = 0,1,2,\ldots,$$

er de såkaldte <u>Čebyšev-polynomier</u>.

For $a = 0$, $b = \infty$, $w(t) = e^{-t}$ fås

$$\varphi_n(t) = n!^{-1} L_n(t),$$

hvor

$$L_n(t) = e^t D^n(t^n e^{-t}), \qquad n = 0,1,2,\ldots,$$

er de såkaldte Laguerre-polynomier.

For $a = -\infty$, $b = \infty$, $w(t) = e^{-t^2}$ fås

$$\varphi_n(t) = (2^n n!\sqrt{\pi})^{-\frac{1}{2}} H_n(t), \qquad n = 0,1,2,\ldots,$$

hvor

$$H_n(t) = (-1)^n e^{t^2} D^n e^{-t^2}$$

er de såkaldte Hermite-polynomier.

Eftervis, at disse polynomfølger er ortonormalsystemer hørende til de angivne vægtfunktioner.

(Se f.eks. bøger af Szegö Sansone, Tricomi, Courant, Hilbert).

56. Vis, at en nilpotent operator på et endelig dimensionalt vektorrum over $\mathring{C}$ i et passende koordinatsystem udtrykkes ved en matrix, der har lutter nuller undtagen lige over diagonalen.

57. Lad V være et s-dimensionalt reelt vektorrum.

1) Lad A være en operator på V, der opfylder $A^2 + E = o$; lad $v_1, \dots, v_n$ være vektorer i V, for hvilke $\{v_1, Av_1, \dots, Av_{n-1}, v_n\}$ er lineært uafhængig. Vis, at $\{v_1, Av_1, \dots, Av_{n-1}, v_n, Av_n\}$ er lineært uafhængig. Vis, at s er lige.

2) Lad $A \in L(V,V)$ og $n \in \mathring{N}$ opfylde $(A^2 + E)^n = o$. Vis, at A i et passende koordinatsystem udtrykkes ved en matrix, der har nuller overalt undtagen i blokke omkring diagonalen, hvor hver blok har form

$$\begin{pmatrix} o & -1 & o & o & \dots & o \\ 1 & o & o & o & \dots & o \\ o & 1 & o & -1 & \dots & o \\ o & o & 1 & o & \dots & o \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ o & o & o & o & \dots & o \end{pmatrix}$$ med højst 2n rækker og søjler.

3) Find tilsvarende en normalform for en vilkårlig operator A. (Skriv det reelle minimale polynomium for A som produkt af uopløselige 1. og 2. grads faktorer).

4) Find specielt normalformer for normale og selvadjungerede operatorer på et reelt, endelig dimensionalt Hilbertrum.

58. Vis, at determinanten af en unitær matrix har den numeriske værdi 1. Vis, at mængden af reelle ortogonale $s \times s$ matricer med determinanten 1 (de "egentlig ortogonale matricer") udgør en undergruppe $O^+(s,\mathring{R})$ med indeks to i $O(s,\mathring{R})$.

59. Vis, at en matrix $\underline{\underline{U}}$ er unitær, hvis og kun hvis den er normal og dens spektrum $\subseteq \{Z \in \mathring{C} \mid |Z| = 1\}$.

60. Bevis, f.eks. ved induktion, at der for enhver matrix $\underline{\underline{A}}$ findes en unitær matrix $\underline{\underline{U}}$ og en matrix $\underline{\underline{T}}$ med lutter nuller under diagonalen, så at $\underline{\underline{U}}^{*}\underline{\underline{A}}\underline{\underline{U}} = \underline{\underline{T}}$. Vis, at diagonal elementerne i $\underline{\underline{T}}$ er egenværdierne for $\underline{\underline{A}}$, og at søjlerne i $\underline{\underline{U}}$ er tilsvarende normerede egenvektorer. Vis, at $\underline{\underline{T}}$ er normal, hvis og kun hvis $\underline{\underline{T}}$ er en diagonalmatrix.

61. Vis, at en isometri U af et reelt præ Hilbertrum H ind i H er lineær, hvis blot $Uo = o$.

62. Bestem en reel ortogonal (3×3)-matrix, hvis første søjle består af tre lige store tal, og hvis determinant er lig 1.

63. Med $\underline{\underline{S}}$, $\underline{\underline{T}}$ og $\underline{\underline{U}}$ betegnes reelle matricer, som er henholdsvis af typen $m \times m$, $n \times n$ og $m \times n$. Vis, at den af disse og $(n \times m)$-nulmatricen sammensatte matrix $\begin{pmatrix} \underline{\underline{S}} & \underline{\underline{U}} \\ \underline{\underline{O}} & \underline{\underline{T}} \end{pmatrix}$ er ortogonal, hvis og kun hvis $\underline{\underline{U}} = \underline{\underline{O}}$ og $\underline{\underline{S}}$ og $\underline{\underline{T}}$ er ortogonale.

Vis, at en ortogonal trekantsmatrix er en diagonalmatrix, og angiv alle reelle ortogonale diagonalmatricer.

64. Lad $(\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n)$ være en ortonormal basis i et n-dimensionalt reelt Hilbertrum og π en permutation af $\{1, \ldots, n\}$. Beskriv den ortogonale koordinattransformationsmatrix $\underline{\underline{P}}_{\pi}$ svarende til overgangen til basen $(\underline{e}_{\pi(1)}, \ldots, \underline{e}_{\pi(n)})$ "Permutationsmatricerne" $\underline{\underline{P}}_{\pi}$, $\pi \in S_n$, danner med matrixmultiplikationen som kompositionsforskrift en gruppe, der er isomorf med S_n.

Bestem alle ortogonale $(n \times n)$-matricer, hvis elementer er hele tal, og vis, at de ligeledes danner en gruppe. Beskriv de koordinattransformationer, som de svarer til.

65. Vis, at en reel skævsymmetrisk matrix $\underline{\underline{S}}$, altså en matrix $\underline{\underline{S}}$, for hvilken $\underline{\underline{S}}' = -\underline{\underline{S}}$, ikke kan have fra 0 forskellige reelle karakteristiske rødder. Slut heraf, at $\underline{\underline{E}} - \underline{\underline{S}}$ er regulær.

Vis, at for hver reel skævsymmetrisk matrix $\underline{\underline{S}}$ er matricen $\underline{\underline{T}} = (\underline{\underline{E}} + \underline{\underline{S}})(\underline{\underline{E}} - \underline{\underline{S}})^{-1}$ ortogonal, dens determinant er 1, og $\underline{\underline{T}} + \underline{\underline{E}}$ er regulær.

Vis, at hver reel ortogonal matrix med disse egenskaber har en og kun een sådan fremstilling. (<u>Cayley's parameterfremstilling for de ortogonale matricer.</u>)

66. Lad $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ være en ortonormal basis for det tredimensionale reelle Hilbertrum, og lad f være en lineær afbildning af rummet ind i sig selv. Vis, at den til f hørende matrix $\underline{\underline{A}}$ er skævsymmetrisk, hvis og kun hvis hver vektor $\underline{v} \in V_3$ er ortogonal til sin billedvektor $f(\underline{v})$.

Lad f være en afbildning med positiv rang, som har denne egenskab. Vis, at der findes en og kun een vektor $\underline{a}$, således at $f(\underline{v})$ er ortogonal til $\underline{a}$ for hver vektor $\underline{v}$, og at

$$F(\underline{a},\underline{v},f(\underline{v})) = \|f(\underline{v})\|^2,$$

hvor F betegner det volumenmål i rummet, for hvilket

$$F(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3) = 1.$$

Angiv elementerne i $\underline{\underline{A}}$ udtrykt ved koordinaterne for $\underline{a}$. (<u>Vektorprodukt</u>: $f(\underline{v}) = \underline{a} \times \underline{v}$, når $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ er et højresystem.)

67. Der er givet reelle tal d_1, d_2, d_3 og α, således at

$$d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 = 1.$$

Med $\underline{\underline{D}}$ betegnes matricen

$$\underline{\underline{D}} = \begin{pmatrix} 0 & -d_3 & d_2 \\ d_3 & 0 & -d_1 \\ -d_2 & d_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vis, at (3×3)-matricen

$$\underline{\underline{P}} = \underline{\underline{E}} + \sin\alpha\,\underline{\underline{D}} + (1-\cos\alpha)\underline{\underline{D}}^2$$

er ortogonal.

I det tredimensionale reelle Hilbertrum vælges en ortonormal basis $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$. Matricen $\underline{\underline{P}}$ bestemmer da en isometri f af rummet. Vis, at denne (når alle vektorer tænkes afsat fra samme punkt) består i en drejning, hvis akse er bestemt ved vektoren $\underline{d}$ med koordinatsættet (d_1, d_2, d_3) og hvis drejningsvinkel er α.

Find billedvektoren $f(\underline{v})$ af vektoren $\underline{v}$ udtrykt ved $\underline{v}$, $\underline{d}$ og α. (Benyt vektorprodukter; jfr. øv. 5.)

68. I et n-dimensionalt reelt Hilbertrum vælges en ortonormal basis $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_n)$. Med F betegnes det volumenmål i rummet, for hvilket $F(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n) = 1$. Vis, at for vilkårlige vektorer $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ er

$$|F(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n)| \leqq \|\underline{v}_1\| \cdots \|\underline{v}_n\|,$$

hvor lighedstegnet gælder, når og kun når vektorerne er parvis ortogonale. (Betragt først parvis ortogonale vektorer, og benyt i det almindelige tilfælde ortogonalisering uden normering.)

Formuler udsagnet som en sætning om determinanter (<u>Hadamard's determinantsætning</u>).

69. I vektorrummet af alle komplekse $(n \times n)$-matricer $\underline{\underline{A}} = (a_{\lambda\mu})$ defineres en norm ved

$$\|\underline{\underline{A}}\|_\infty = \max_{\lambda,\mu = 1,\dots,n} |a_{\lambda\mu}|.$$

Bevis følgende påstande: $\|\underline{\underline{A}}\underline{\underline{B}}\|_\infty \leqq n\|\underline{\underline{A}}\|_\infty \cdot \|\underline{\underline{B}}\|_\infty$. For hvert $k \in \dot{N}$ er

$$\|\underline{\underline{A}}^k\|_\infty \leqq n^{k-1}\|\underline{\underline{A}}\|_\infty^{\,k}.$$

Følgen af matricer

$$\underline{\underline{S}}_p = \underline{\underline{E}} + \frac{1}{1!}\underline{\underline{A}} + \frac{1}{2!}\underline{\underline{A}}^2 + \dots + \frac{1}{p!}\underline{\underline{A}}^p, \qquad p \in \dot{N},$$

er konvergent. Idet den matrix, mod hvilken den konvergerer, betegnes med exp $\underline{\underline{A}}$, gælder for ombyttelige $(n \times n)$-matricer $\underline{\underline{A}}$ og $\underline{\underline{B}}$, at

$$\exp(\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}}) = \exp \underline{\underline{A}} \exp \underline{\underline{B}}.$$

Heraf følger, at exp $\underline{\underline{A}}$ er regulær, og at $\exp(-\underline{\underline{A}}) = (\exp \underline{\underline{A}})^{-1}$. Er $\underline{\underline{A}}$ reel og skævsymmetrisk, vil exp $\underline{\underline{A}}$ være ortogonal.

Vis, at $\det(\exp \underline{\underline{A}}) = \exp(\operatorname{tr} \underline{\underline{A}})$, hvor tr $\underline{\underline{A}}$ betegner matricens spor, altså summen af elementerne i dens hoveddiagonal.

Vis, at med de i øv. 6 indførte betegnelser er $\exp(\alpha\underline{\underline{D}}) = \underline{\underline{P}}$.

70. Bestem for

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

er unitær matrix $\underline{\underline{U}}$, således at $\underline{\underline{U}}^*\underline{\underline{A}}\underline{\underline{U}}$ bliver en diagonalmatrix.

71. Vis, at gruppen $U(n,\mathbb{C})$ af unitære $(n \times n)$-matricer er isomorf med en undergruppe i den ortogonale gruppe $O(2n,\mathbb{R})$.

72. I et præ Hilbertrum V er givet to vektorer $\underline{a} \neq \underline{0}$ og $\underline{b} \neq \underline{0}$. Ved $f(\underline{x}) = (\underline{x}|\underline{a})\underline{b}$ defineres en lineær operator $f: V \to V$. Vis, at den er begrænset. Bestem dens egenværdier og egenrum. Vis, at den har en adjungeret operator f^*, og angiv f^*.

73. Med $C_2[a,b]$ betegnes vektorrummet af alle i intervallet $[a,b]$ definerede kontinuerte reelle funktioner med det indre produkt

$$\varphi \cdot \psi = \int_a^b \varphi(t)\psi(t)\,dt.$$

Lad der være givet en reel funktion K, som er defineret og kontinuert i kvadratet $[a,b] \times [a,b]$, og som er "symmetrisk": $K(s,t) = K(t,s)$ for $s,t \in [a,b]$. Vis, at der ved $\varphi \to \psi$, hvor

$$\psi(s) = \int_a^b K(s,t)\varphi(t)dt,$$

defineres en lineær, begrænset og symmetrisk operator i hele rummet $C_2[a,b]$.

74. Lad $f\colon V_n \to V_n$ og $g\colon V_n \to V_n$ være to ombyttelige selvadjungerede operatorer i et n-dimensionalt Hilbertrum V_n. Vis, at der findes en ortonormal basis i V_n, hvis vektorer er egenvektorer for både f og g. (Vis først, at hvert egenrum for f er invariant ved g, d.v.s., at det afbildes ind i sig selv ved g. Benyt dernæst, at restriktionen af g til et sådant egenrum også er en symmetrisk operator.)

75. Lad f være en selvadjungeret operator i et n-dimensionalt Hilbertrum og $B(\underline{x},\underline{x}) = (f(\underline{x})|\underline{x})$ den tilhørende kvadratiske form. Lad endvidere

$$\lambda_1 \geqq \lambda_2 \geqq \cdots \geqq \lambda_n$$

være dens egenværdier, hver taget med så mange gange, som dens multiplicitet angiver. Da gælder

$$\lambda_1 = \max_{\|\underline{x}\| \leqq 1} B(\underline{x},\underline{x}), \qquad \lambda_n = \min_{\|\underline{x}\| \leqq 1} B(\underline{x},\underline{x}).$$

Vis, at

$$\lambda_i = \min_{V_{i-1} \subseteqq V_n} \max_{\underline{x} \perp V_{i-1}, \|x\| \leqq 1} B(\underline{x},\underline{x}) \qquad i = 2, \ldots, n-1,$$

$$= \max_{V_{n-i} \subseteqq V_n} \min_{\underline{x} \perp V_{n-i}, \|x\| \leqq 1} B(\underline{x},\underline{x}),$$

hvor V_{i-1} og V_{n-i} gennemløber alle underrum i V_n af dimensionen henholdsvis i-1 og n-i.

76. Lad $f: V_n \to V_n$ og $g: V_n \to V_n$ være to selvadjungerede operatorer i et n-dimensionalt Hilbertrum med indre produkt.

Deres egenværdier betegnes henholdsvis med

$\lambda_1 \geqq \lambda_2 \geqq \cdots \geqq \lambda_n$ og $\mu_1 \geqq \mu_2 \geqq \cdots \geqq \mu_n$.

Om de tilhørende kvadratiske former forudsættes, at

$(f(\underline{x})|\underline{x}) \leqq (g(\underline{x})|\underline{x})$ for alle $\underline{x} \in V_n$. Vis, at $\lambda_i \leqq \mu_i$ for $i = 1,\ldots,n$. (Benyt øv. 75).

Fortolk dette, når $n = 3$ og begge kvadratiske former er positiv definite, som en sætning om halvakserne i to ellipsoider med fælles centrum, hvoraf den ene omslutter den anden.

77. (Århus, sommer 1963). Antag, at operatoren A har egenskaben

$$\operatorname{Re}(Au \mid u) \leqq 0 \text{ for alle } u \in D(A).$$

Bevis, at for alle komplekse tal z med $\operatorname{Re}(z) > 0$ gælder $\|(A-zE)u\| \geqq \operatorname{Re}(z)\cdot\|u\|$ for alle $u \in D(A)$.

78. (København, sommer 1963). Et komplekst tal λ kaldes en næsten-egenværdi for operatoren A på Hilbertrummet H, hvis $\inf\{\|(A-\lambda E)f\| \mid f \in D(A),\ \|f\| = 1\} = 0$.

Vis, at for $A \in L(H,H)$ er mængden af næsten-egenværdier for A en kompakt delmængde af $\{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \leqq \|A\|\}$.
Vis, at for en (begrænset eller ubegrænset) selv-adjungeret operator A falder mængden af næsten-egenværdier for A sammen med spekret for A.

79. Lad T være et kompakt Hausdorffrum, og lad $\underline{i}$ være et afsluttet ideal i $C(T,\mathbb{C})$. Vis, at $f \in \underline{i}$ medfører $\bar{f} \in \underline{i}$.

80. Udfør det følgende bevis for, at hvis $f \in C(T,\mathbb{C})$ og $f^{o-1}(0)$ har **spektralmål** 0, så er $p(f)$ injectiv: til $x \in H$, så at $p(f)x = 0$ og $\varepsilon > 0$ vælges $g \in C(T,[0,1])$, så at $g = 1$ på $f^{o-1}(0)$ og $(p(g)x|x) < \varepsilon$; for stort $n \in \mathbb{N}$ er $\frac{1}{2}\|x\|^2 \leqq (p(n|f|^2+g)x|x) < \varepsilon$; altså er $x = 0$.

81. Lad h_1 og h_2 være definerede og kontinuerte: $T \setminus S \to \mathbb{C}$, hvor $S = \bar{S}$ er en delmængde af det kompakte Hausdorffrum T med spektralmålet 0; vis, at hvis $|h_1| \geqq |h_2|$ i en omegn af S, så er $D(q(h_1)) \subseteq D(q(h_2))$. Vis, at hvis der findes $\varepsilon > 0$, så at $|h_1| > \varepsilon$ i en omegn af S, så er $q(h_1h_2) = q(h_1)q(h_2)$.

82. Vis, eventuelt under benyttelse af at enhver normal operator har en spektralfremstilling, at en normal operator N kan skrives $N = A + iB$, hvor A og B er selvadjungerede.

83. Lad S_1 være en afsluttet mængde med spektralmålet 0. Vis, at en afsluttet mængde S har spektralmålet 0, hvis og kun hvis: $\forall\, \varepsilon > 0\ \forall x \in H\ \exists\, h \in C(T \setminus S_1, [0,1])\ [(q(h)x|x) < \varepsilon$ og $h \geqq 1$ på $S \setminus S_1]$.

(Vis, at hvis $g \in C(T,[0,1])$ er 1 på S, så kan $(h+g+\varepsilon) \wedge 1$ fortsættes til en kontinuert funktion).

84. Lad h være kontinuert: $T \setminus S_1 \to \check{C}$, hvor $S_1 = \overline{S}_1$ har spektralmålet 0, lad S være en afsluttet delmængde af afslutningen relativt til $\check{C}_\infty$ af $h(T \setminus S_1)$, og antag, at S har spektralmålet 0 med hensyn til *isomorfien p_h. Vis, at $h^{o-1}(S)$ har spektralmålet 0 med hensyn til p. Slut specielt, hvis h ikke er begrænset, at $\{\infty\}$ har spektralmålet 0 med hensyn til p_h.

Vis, at $q_h(f) = q(f \circ h)$ for enhver funktion f, for hvilken q_h er defineret.

85. En selvadjungeret operator A kaldes positiv, $A \geqq 0$, hvis $(Ax|x) \geqq 0,\ \forall\, x \in D(A)$. Vis, at $A \geqq 0 \iff \sigma(A) \setminus \{\infty\} \subseteqq \check{R}^+ \cup \{0\}$. Vis, at der eksisterer én positiv operator B, så at $B^2 = A$.

86. Lad T være en tæt defineret afsluttet operator. $T^{o\,-1}(0)$ er da et afsluttet underrum i H; projektionen P på det dertil ortogonale underrum kaldes T's støtte projektion. Projektionen Q på $\overline{TD(T)}$ kan vi kalde T's værdiprojektion.

Vis, at $T = QTP$, og at T^* har støtteprojektion Q og værdiprojektion P, T^*T tilsvarende P og P, og TT^* Q og Q.

Hvis $T \in \mathcal{L}$ og T afbilder PH isometrisk på QH, kaldes T en partiel isometri. Dette sker, hvis og kun hvis $T^*T = P$, eller $TT^* = Q$; T^* er da igen en partiel isometri.

Vis, at en vilkårlig tæt defineret, afsluttet operator T på én måde kan skrives $T = |T|$, hvor $|T| \geqq 0$ og U er en partiel isometri med samme støtte som T, og at $|T| = U^*T$, $|T^*| = U|T|U^*$.

Vis, at T kan skrives $T = U|T|$, med $|T| \geqq 0$ og U unitær, hvis og kun hvis $(PH)^\perp$ og $(QH)^\perp$ har samme dimension, og at dette specielt gælder, hvis T er normal.

87. Vis, at en vilkårlig ligeligt afsluttet algebra over $\grave{R}$ af selvadjungerede operatorer er et vektor lattice.

88. Giv, for $H = \grave{R}^2$, geometrisk fortolkning af ordningsrelationen mellem positive, selvadjungerede operatorer. Vis, at de selvadjungerede operatorer i $L(H,H)$ ikke udgør et gitter med hensyn til denne ordning (d.v.s. der findes A og $B \geqq 0$, for hvilke der ikke eksisterer noget mindste C, $\geqq A$ og $\geqq B$).

89. Lad $T \in \mathcal{L}$. Vis, at T har en invers i $\mathcal{L}$, hvis og kun hvis $\sigma(T^*T) \cup \sigma(TT^*) \subset \grave{R}^+$.

90. Vis, at en selvadjungeret operator A er en projektion, hvis og kun hvis der findes $n \in \grave{N}$, så at $A^{2n} = A$.

91. Lad A være en selvadjungeret begrænset operator. Vis, at $\|A\| = \inf\{\|A+iB\| \mid B = B^* \in L(H,H)\}$.

92. Lad A være en Banachalgebra over $\mathbb{C}$ uden ét-element. Vis, at mængden $\{(a,\alpha) \mid a \in A, \alpha \in \mathbb{C}\}$ ved regnereglerne: $(a,\alpha)+\lambda(b,\beta) = (a+\lambda b,\alpha+\lambda b)$, $(a,\alpha)(b,\beta) = (ab+\beta a+\alpha b,\alpha\beta)$ organiseres til en algebra A_1 med ét-element, der er en Banachalgebra med hensyn til normen $(a,\alpha) \to \| a \|+|\alpha|$, og at $a \to (a,0)$ er en isomorfi og isometri af A med et maksimalt ideal i A_1.

Spektret for et element $a \in A$ defineres som: $sp(a) = \{0\} \cup \{\alpha \in \mathbb{C} \mid \exists\, b \in A[\alpha^{-1}a+b-\alpha^{-1}ab = b+\alpha^{-1}a-\alpha^{-1}ba = 0]\}$. Vis, at sp(a) falder sammen med spektret for (a,0) i A_1 ($(b,-1)(a,-\alpha) = (0,\alpha)$, eller, hvis vi skriver $(a,\alpha) = a+\alpha e$, $e-b = (e-\alpha^{-1}a)^{-1}$).

Vis, at der findes en naturlig homomorfi $R \to R(a)$ af mængden af rationale funktioner $R = PQ^{-1}$, hvor $P(0) = 0$ og $Q(t) \neq 0$ for $t \in sp(a)$, ind i A (konstruer f.eks. først en homomorfi ind i A_1, og udnyt, at A er et ideal i A_1).

Vis, at hvis A er indeholdt i en Banach-algebra B, med eller uden ét-element, så er spekret for a som element af B indeholdt i spektret for a som element af A.

93. Lad T_1 og T_2 være kompakte Hausdorffrum, og antag, at der findes en *isomorfi p af $C(T_1,\mathbb{C})$ på $C(T_2,\mathbb{C})$. Vis, at der findes en homeomorfi Π af T_2 på T_1, så at $p(f) = f\circ\Pi$. (Udnyt K II,3, 1962-63, øv. 1).

94. Lad H_1 og H_2 være Hilbertrum med Hilbertsummen $H = H_1 \oplus H_2$; for operatorer $A_1 \in L(H_1,H_1)$ og $A_2 \in L(H_2,H_2)$ lader vi $A_1 \oplus A_2$ være operatoren i L(H,H) givet ved: $A_1 \oplus A_2(x_1,x_2)) = (A_1x_1,A_2x_2)$. Vis, at $sp(A_1 \oplus A_2) = sp(A_1) \cup sp(A_2)$.

95. Lad U være en unitær operator på Hilbertrummet H. Vis, at der findes Hilbertrum H_1 og H_2 og en unitær operator U_1 uden egenværdien 1 på H_1, og en isomorfi φ af $H_1 \oplus H_2$ på H, så at $U \circ \varphi = U_1 \oplus E_2$, hvor E_2 betegner enhedsoperatoren på H_2.

Udnyt Cayley transformering til at konstruere en spektralfremstilling for U.

96. Vis, at hvis en rational funktion R er defineret og $\geqq 0$ på enhedscirklen S_1, så findes der en rational funktion R_1, så at $|R_1(z)|^2 = R(z)$ for $|z| = 1$. (Lad f.eks. ψ være homeomorfien $z \to -i(1+z)(1-z)^{-1}$ af S_1 på $\dot{R}_\infty$; $R \circ \psi^{\circ -1}(t)$ er $\geqq$ o for $t \in \dot{R}_\infty$, og derfor $= |R_2(t)|^2$ for en passende rational funktion R_2; for $R_1 = R_2 \circ \psi$ gælder: $|R_1(z)|^2 = |R_2(\psi(z))|^2 = R \circ \psi^{\circ -1}(\psi(z)) = R(z)$ for $z \in S_1$). Den tilsvarende sætning for polynomier er fundet af Fejer og Riesz.

Benyt dette til at konstruere en spektralfremstilling for en unitær operator.

97. Vis, at hvis en følge (f_n) konvergerer i den svage topologi mod $f \in H$, og $\|f_n\| \to \|f\|$, så konvergerer (f_n) mod f i den stærke topologi.

98. Sæt $H = l^2 = \{(a_n) \mid a_n \in \dot{C}$ og $\Sigma \mid a_n|^2 < \infty\}$; lad e_n betegne den følge $\in H$, der har 1 på den n'te plads, og 0 på alle andre. Lad $U_n \in L$ være defineret ved $U_n x = (x \mid e_n)e_1$. Find U_n^*. Vis at $U_n \not\to 0$ i den stærke topologi, men ikke i den ligelige, og at $U_n^* \to 0$ i den svage topologi, men ikke i den stærke.

99. Lad der være givet et Hilbertrum H og en afbildning $f:\dot{N} \to H$, så at $\| f(n) \| = 1$ og $(f(n) \mid f(m)) = 0$ for n og $m \in \dot{N}$, $n \neq m$. Lad, for $n \in \dot{N}$, $V_n \in L = L(H,H)$ være operatoren: $g \to V_n g = \sum_{\nu=1}^{n} (g \mid f(\nu)) f(n + \nu)$.

Undersøg for den ligelige, den stærke, og den svage topologi på L og for hver af følgerne (V_n), $n \in \dot{N}$, og (V_n^*), $n \in \dot{N}$, om følgen har en grænseværdi i den pågældende topologi.

100. Et gitter er en partielt ordnet mængde, i hvilken der til to elementer a og b findes et første element $c = a \vee b = b \vee a$, der følger efter a og b, og et sidste element $d = a \wedge b = b \wedge a$, der kommer før a og b.

Et gitter L kaldes distributivt, hvis:

$\forall a,b,c \in L[a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$ og

$a \wedge (b \vee c) =(a \wedge b) \vee (a \wedge c)]$.

Giv eksempel!

L kaldes modulært, hvis

$\forall a,b,c \in L\ [a \leqq c \Rightarrow a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge c]$

(og derfor $c \leqq a \Rightarrow a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee c$).

Vis, at et distributivt gitter er modulært.

Vis, at gitteret af afsluttede underrum af et Hilbertrum, med inclusion $\subseteq$ som partiel ordning, er distributivt, hvis og kun hvis H er éndimensionalt, og modulært, hvis og kun hvis H er endelig dimensionalt. (Brug f.eks. øv. 34).

101. Vis, at afbildningen $(A,B) \to A^*B$ er kontinuert: $L_\tau \times L_\tau \to L_\sigma$. Vis, at en filterbasis $\dot{F}$ konvergerer stærkt mod Q, hvis

og kun hvis filtret med basis $\{\{A^*A \mid A \in F\} \mid F \in \mathfrak{F}\}$ konvergerer svagt mod 0. Vis ved et eksempel, at $(A,B) \to AB$ ikke er kontinuert: $L_\tau \times L_{1\tau} \to L_\sigma$, hvis ikke H er endelig-dimensionalt (L_1 betegner enhedskuglen . (Til f og $g_1,\dots,g_n \in H \setminus \{0\}$ vælges enhedsvektoren $h \perp \{g_1,\dots g_n, f\}$; sæt $\lambda = \max\{1, \|g_1\|,\dots,\|g_n\|\}$, $Bx = \lambda^{-1}\|f\|^{-1}(x|f)h$, for $x \in H$, $Ax = Bx$ for x i underrummet udspændt af $\{g_1,\dots,g_n,f\}$, $Ah = \lambda\|f\|^{-3}f$; så er $\|Ag_\nu\| \leqq 1$, $\|Bg_\nu\| \leqq 1$, $\|B\| \leqq 1$, og $|(ABf|f)| \geqq 1$).

Vis, at $(A,B) \to AB$ er kontinuert: $L_{1\tau} \times L_\tau \to L_\tau$, men ikke $L_\tau \times L_{1\tau} \to L_\tau$.

102. Vis, at mængden af projektioner i L er stærkt afsluttet.

103. Lad $\mathfrak{F}$ være en filterbasis på mængden af projektioner i L, og antag, at $\mathfrak{F}$ konvergerer svagt mod en projektion P. Vis, at $\mathfrak{F}$ konvergerer stærkt mod P.

104. Lad N være en opad filtrerende mængde af projektioner. Vis, at den mindste majorant for N er en projektion.

105. Lad $\{P_i \mid i \in I\}$ være en uendelig mængde af projektioner på parvis ortogonale afsluttede underrum. Vis, at filtret med basis $\{\{\sum_{i\in K} P_i \mid K \text{ er en endelig delmængde af } I,\ K \supseteqq J\} \mid J \text{ er en endelig delmængde af } I\}$ konvergerer mod $\sum_{i\in K} P_i$ i den stærke topologi.

106. Vis, at hvis en operator A opfylder $0 \leqq A \leqq E$, vil A^n konvergere i den stærke topologi for $n \to \infty$ mod projektionen på $\{f \in H \mid Af = f\}$.

Lad P og Q være to projektioner. Vis, at projektionen på $PH \cap QH$ er $= \lim_{n\to\infty} (PQ)^n = P \lim_{n\to\infty} (QPQ)^n$, idet grænseværdierne tages i den stærke topologi.

107. Vis, at mængden af projektioner $\in L$ ikke er afsluttet i den svage topologi. (Konstruer f.eks. først en følge af enhedsvektorer, der i den svage, men ikke i den stærke, topologi på H har en grænseværdi $\neq 0$).

108. Bevis følgende sætning (princippet om ligelig begrænsning): Lad H og K være Banachrum, (A_n) en følge af kontinuerte lineære afbildninger af H ind i K, således at der til hvert $x \in H$ eksisterer et reelt tal $c(x)$, så at $\|A_n x\| \leqq c(x)$ for alle $n \in \dot{N}$. Der eksisterer da en konstant c, så at $\|A_n\| < c$, $\forall n \in N$.

Det er praktisk først at bevise lemma:
Der eksisterer $C \in \dot{R}$, så at $\|A_n\| < C$ for alle $n \in \dot{N}$, hvis og kun hvis der eksisterer en kugle $B = \{x \in H \mid \|x-x_0\| < a\}$, $a > 0$, og $D \in \dot{R}$, så at $\|A_n x\| \leqq D$ for alle $x \in B$ og $n \in \dot{N}$.

Derefter føres beviset indirekte. Vi vælger ved induktion en følge af kugler $B(x_\nu,\rho_\nu) = \{x \in H \mid \|x-x_\nu\| < \rho_\nu\}$, og voksende følge af indices (n_ν), $\nu = 0,1,\ldots$, så at $x_0 = 0$, $\rho_0 = 1$, $\rho_\nu \leqq 2^{-\nu}$, $B(x_{\nu+1},\rho_{\nu+1}) \subset B(x_\nu,\rho_\nu)$, og $\|A_{n_\nu} x\| > \nu$. For $x \in \cap\{B(x_\nu,\rho_\nu) \mid \nu \in \dot{N}\}$ fås en modstrid.

109. Lad T være en operator på H med $D(T) = H$.

Vis, at det om egenskaberne

I T er kontinuert: $H_\tau \to H_\tau$, d.v.s. $T \in L$

II T er kontinuert: $H_\tau \to H_\sigma$

III T " " : $H_\sigma \to H_\tau$

IV T " " : $H_\sigma \to H_\sigma$

V T er afsluttet, d.v.s. grafen $G(T)$ er afsluttet i $H_\tau \times H_\tau$

VI T har endelig rang

gælder: $(V \wedge VI) \Longleftrightarrow III \Rightarrow I \Longleftrightarrow II \Longleftrightarrow IV \Longleftrightarrow V$.

(III $\Rightarrow$ I $\Rightarrow$ II, III $\Rightarrow$ IV $\Rightarrow$ II og I $\Rightarrow$ V er trivielt, og I $\Rightarrow$ IV, III $\Rightarrow$ VI og (VI $\wedge$ I) $\Rightarrow$ III er let; II $\Rightarrow$ I vises ved hjælp af princippet om ligelig begrænsning: $0 \neq \|f_n\| \to 0 \Rightarrow \| \|f_n\|^{-\frac{1}{2}} f_n \| \to 0$ $\|f_n\|^{-\frac{1}{2}} \|Tf_n\|$ er begrænset $\Rightarrow$ $\|Tf_n\| \to 0$; V $\Rightarrow$ I: Vis, at T^* er kontinuert: $D(T^*)_\tau \to H_\sigma$, og derfor er begrænset).

Vis ved et eksempel, at VI ikke medfører III.

V $\Longleftrightarrow$ I er et specialtilfælde af "afsluttet graf sætningen": En lineær afbildning T af et metriserbart fuldstændigt t.v.r. ind i et metriserbart fuldstændigt t.v.r er kontinuert, hvis og kun hvis T har afsluttet graf. (se f.eks. N. Bourbaki: E.V.T., chap I, § 3, N° 3).

110. Lad T være et kompakt Hausdorffrum. Lad A være en afsluttet delalgebra af $C(T,\check{C})$, og antag, at $f \in A \Rightarrow \bar{f} \in A$ (A er selvadjungeret).

1) Vis, at $f \in A$, $f^{-1} \in C \Rightarrow f^{-1} \in A$

Antag nu også, at $1 \in A$

2) Vis, at $h_c(\underline{i}) = \{t \in T \mid g(t) = 0 \text{ for alle } g \in \underline{i}\} \neq \emptyset$ for ethvert egentligt ideal $\underline{i}$ i A.

3) Vis, at hvis det for to afsluttede idealer $\underline{i}_1$ og $\underline{i}_2$ i A gælder, at A er det mindste ideal i A, der indeholder

$\underline{i}_1 \cup \underline{i}_2$, så er $h_c(\underline{i}_1) \cap h_c(\underline{i}_2) = \emptyset$

4) Lad M være mængden af maksimale idealer i A. For $t \in T$ er $k_A(t) = \{f \in A | f(t) = 0\}$ et element $\varphi(t) \in M$. Vis, at $\varphi(t) = \underline{i} \Longleftrightarrow t \in h_c(\underline{i})$, at φ er surjectiv, og at $\varphi(t_1) \neq \varphi(t_2) \Longleftrightarrow \exists\, f \in A[f(t_1) \neq f(t_2)]$.

5) Lad $\hat{A}$ være mængden af funktioner $f\colon M \to \mathbb{C}$, for hvilke $\Phi f = f \circ \varphi \in A$; vis, at Φ er bijectiv $\hat{A} \to A$, at $\hat{A}$ er en selvadjungeret algebra af funktioner på M, der indeholder 1, og at Φ er en isomorfi og isometri, idet $\hat{A}$ forsynes med normen: $\|f\| = \sup\{|f(\underline{i})| \mid \underline{i} \in M\}$.

6) M tildeles den svageste topologi, med hensyn til hvilken alle funktioner i $\hat{A}$ er kontinuert. Vis, at M er et Hausdorffrum. Vis, at φ er kontinuert. Vis, at M er kompakt, og at $\hat{A} = C(M,\mathbb{C})$.

7) Vis, at et afsluttet ideal $\underline{i}$ i A indeholder enhver funktion i A, der er nul i ethvert punkt af T, for hvilket enhver funktion i $\underline{i}$ er 0, $\underline{i} = k_A\, h_C(\underline{i})$.

1. Lad T være et kompakt Hausdorff rum, $A \subseteq T$; vis, at $\bar{A} = h(k(A))$.

2. Vis, at $\bigcup\{k(U) \mid U \in \grave{U}(t)\}$ er det mindste ideal i $C(T)$ med hylstret $\{t\}$.

3. a) Lad $A \subseteq T$ være fællesmængde for numerabelt mange åbne mængder $\subseteq T$, og lad $\underline{i}$ være et afsluttet ideal $\subseteq C(T)$, så at $h(\underline{i}) \subseteq A$. Vis, at $\underline{i}$ indeholder en funktion g, så at $g(t) > 0$ for $t \notin A$.

   b) Lad T være en mængde af ordinaltal med et største element Ω, og således at venstre afsnittet $V_T(\Omega)$ ikke er numerabelt, men $V_T(a)$ er numerabelt for ethvert $a < \Omega$ (jfr. T 1, øv. 1). På T defineres en topologi (ordens topologien), idet vi som basis for de åbne mængder vælger mængderne: $\{x \in T \mid x < b\}$, $\{x \in T \mid a < x\}$, $\{x \in T \mid a < x < b\}$, for vilkårlige a og $b \in T$. Vis, at T herved bliver et kompakt Hausdorff rum (udnyt, at T er velordnet). Vis, at enhver omegn af Ω indeholder over nummererbart mange elementer, og at enhver funktion $\in M_\Omega$ er nul i en omegn af Ω.

4. Vis, at mængden af kontinuerte, reelle, periodiske funktioner på $\mathbb{R}$ med samme periode $a > 0$ udgør en normeret algebra m.h.t. sædvanlig (punktvis) addition og multiplikation med skalarer, en ringe multiplikation $*$ defineret ved $f * g(x) = \int_0^a f(y)g(x-y)dy$, og normen $f \to \|f\| = \int_0^a |f(x)|dx$.

   Formuler og bevis en tilsvarende sætning om $\mathfrak{D}^{\circ}$.

1. Lad m være Lebesgue målet på $\dot{R}$, $H = L^2_m(\dot{R},\dot{C})$, g en funktion $\in H$. En operator A defineres ved: $D(A) = \mathcal{D}^\circ$, $Af = f(o)\cdot g$ $(g \neq 0)$ for $f \in D(A)$. Vis, at A ikke kan afsluttes; **find** A^*; bestem afslutningen af $G(A)$.

2. Vis følgende regneregler for operatorer på et Hilbertrum H: $T_1+T_2 = T_2+T_1$, $(T_1+T_2)+T_3 = T_1+(T_2+T_3)$, $OT \subseteq O$, $(T_1 T_2)T_3 = T_1(T_2T_3)$, $(T_1+T_2)T_3 = T_1T_3+T_2T_3$, $T_1(T_2+T_3) \supseteq T_1T_2+T_1T_3$, $T_1(T_2+T_3) = T_1T_2+T_1T_3$ hvis $D(T_1) = H$; giv eksempel på operatorer, så at $T_1(T_2+T_3) \neq T_1T_2+T_1T_3$; vis, at hvis T_1 og T_2 er enentydige, er T_1T_2 enentydig og $(T_1T_2)^{-1} = T_2^{-1}T_1^{-1}$; **hvad** kan man slutte om T_1 og T_2, hvis det er givet, at T_1T_2 er enentydig?

3. Lad B_1, B_2, T_1, T_2 være operatorer på et Hilbertrum H, B_1 og B_2 $\in$, så at B_i kommuterer med T_j, $i,j = 1,2$. Vis, at T_1 kommuterer med B_1+B_2 og med B_1B_2, og at B_1 kommuterer med T_1+T_2 og med T_1T_2.

4. Lad A være en symmetrisk operator. Vis, at for $n \in \dot{N}$ og $x \in D(A^n)$ er $\|Ax\|^n \leq \|A^n x\|\cdot\|x\|^{n-1}$, og at = gælder, hvis og kun hvis x er egenvektor for A^2 eller 0, eller n = 1. Vis, at A^n er afsluttet, hvis A er afsluttet.

5. Lad A og B være operatorer, så at $AB = BA$ og $B^{-1} \in \mathcal{L}$. Vis, at A kommuterer med B^{-1}.

6.a) En operator $T \in \mathcal{L}(H \oplus H, H \oplus H)$ beskrives ved en matrix (T_{ij}), $i,j = 1,2$, hvor T_{ij} naturligt kan identificeres med en operator $\in \mathcal{L}(H,H)$ (jfr. III,1,øv. 6).

Lad for en afsluttet, tæt defineret operator S på H, $P(S)$ betegne projektionen på $G(S)$. Find matricen for $P(S^*)$ udtrykt ved matricen for $P(S)$. Find matricen for $P(S)$ udtrykt ved S. (løsning: $\begin{Bmatrix} (E+S^*S)^{-1} & S^*(E+SS^*)^{-1} \\ S(E+S^*S)^{-1} & SS^*(E+SS^*)^{-1} \end{Bmatrix}$; udnyt, at enhver vektor$(f,0)$ kan skrives

$(f,0) = (u,Tu)+(-T^*v,v)$, til at vise, at $E+T^*T$ afbilder på H).

b) Vis, at T^*T er selvadjungeret.

7. Lad S være en tæt defineret, afsluttet operator.

a) Vis, at $(x,y) \in G(S) \cap G(S_{|D(S^*S)})^{\perp} \Rightarrow x = 0$.

b) Vis, at S er afslutningen af sin sammentrækning til $D(S^*S)$.

c) Lad T være en tæt defineret, afsluttet operator, så at $T^*T = S^*S$. Vis, at $D(T) = D(S)$, og at $\|Tx\| = \|Sx\|$ for $x \in D(T)$ (S og T er metrisk ens).

8. En tæt defineret afsluttet operator N kaldes normal, hvis $N^*N \supseteq NN^*$. Vis, at N er normal, hvis og kun hvis N^* er normal, og hvis og kun hvis: $D(N)=D(N^*)$, $\|Nx\| = \|N^*x\|$ for $x \in D(N)$.

9. For en vilkårlig tæt defineret, afsluttet operator T og $\lambda \in \mathbb{C}$ gælder: $(T^* - \lambda E)^{0-1}(0) = [(T-\bar{\lambda}E)D(T)]^{\perp}$.

10. Lad $\mathcal{V}$ betegne mængden af operatorer V, så at $D(V)$ er et afsluttet underrum i H, V er isometrisk, og $(E-V)\mathcal{D}(\;)H$ er tæt i H. Lad $\mathcal{S}$ betegne mængden af tæt definerede, symmetriske, afsluttede operatorer.

Vis, at $V \in \mathcal{V} \Rightarrow$ V har ikke egenværdien 1, $-i(E+V)(E-V)^{-1} \in \mathcal{S}$. Vis, at $V \to -i(E+V)(E-V)^{-1}$ er en en-entydig afbildning af $\mathcal{V}$ på $\mathcal{S}$ med den omvendte afbildning $S \to (S+iE)(S-iE)^{-1}$ (Cayley transformering). Vis, at $S_1 \subseteq S_2 \Leftrightarrow V_1 \subseteq V_2$. Dette giver en metode til at få overblik over mængden af afsluttede, symmetriske udvidelser af en given operator $\in \mathcal{S}$.

Vis, at $D(V)^{\perp} = (S^* + iE)^{0-1}(0)$, og $(VD(V))^{\perp} = (S^* - iE)^{0-1}(0)$. Vis, at S er selvadjungeret, hvis og kun hvis V er unitær. Dimensionerne af $D(V)^{\perp}$ og $(VD(V))^{\perp}$ kaldes defekt indices for V og for S. S har altså en selvadjungeret udvidelse, hvis og kun hvis defekt indices er lige store.

11. Lad A være en vilkårlig operator, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $x \in H$, så at $A^2x = \lambda^2 x$. Vis, at $x = u+v$, hvor $Au = \lambda u$ og $Av = -\lambda v$.

12. Vi betragter igen mængden $\dot{\mathfrak{S}}$ af tæt definerede, afsluttede, symmetriske operatorer. Antag $S \in \dot{\mathfrak{S}}$. Vis, at $(x,y) \in G(S^*) \cap G(S)^{\perp} \Rightarrow x \in D(S^{*2})$, $S^{*2}x = -x$. Vis, at $G(S^*)$ er sum af tre ortogonale underrum: $G(S)$, $\{(x,ix) \mid x \in D(S^*), S^*x = ix\}$, og $\{(x,-ix) \mid x \in D(S^*), S^*x = -ix\}$. Vis, at $D(S^*)$ er direkte sum af $D(S)$, $(S^*-iE)^{0-1}(0)$ og $(S^*+iE)^{0-1}(0)$.

Hvis $T \in \dot{\mathfrak{S}}$ er en udvidelse af S, $S \subseteq T \subseteq T^* \subseteq S^*$, består $D(T)$ af vektorer af form $x+y+z$, $x \in D(S)$, $S^*y = iy$ $S^*z = -iz$. Vis, at til et givet y, $S^*y = iy$, findes højst ét z, $S^*z = -iz$, så at $y+z \in D(T)$ (udnyt, at alle egenværdier for T er reelle). Vis, at den herved definerede afbildning er en lineær isometri af et afsluttet underrum af $(S^*-iE)^{0-1}(0)$ ind i $(S^*+iE)^{0-1}(0)$, og at der omvendt til enhver sådan isometri svarer en udvidelse $T \supseteq S$, $T \in \dot{\mathfrak{S}}$.

13. Udtryk den Cayley transformerede af en projektion P som linearkombination af P og $E-P$.

Øvelser til kap.I,§ 2.

1. I rummet $C_2[0,1]$ betragtes integraloperatorerne k med kernerne $K(s,t) = st$, $K(s,t) = s+t$. Find i hvert af tilfældene egenværdierne og egenfunktionerne for k og diskuter integralligningen $\lambda\varphi - k(\varphi) = \alpha$.
   Løs den samme opgave for integraloperatoren k i $C_2[-\frac{1}{2}\pi,\frac{1}{2}\pi]$ med kernen $K(s,t) = \cos(t-s)$.

2. Vis, at den i $[0,1] \times [0,1]$ definerede funktion

$$G(s,t) = \begin{cases} t-ts & \text{for } 0 \leqq t \leqq s \leqq 1 \\ s-st & \text{for } 0 \leqq s < t \leqq 1 \end{cases}$$

er symmetrisk og kontinuert. Vis endvidere, at den er differentiabel for $s \neq t$, og at, der for den venstre og den højre differentialkvotient med hensyn til t i (s,s) gælder

$$\frac{\partial G}{\partial t}(s,s-) - \frac{\partial G}{\partial t}(s,s+) = 1.$$

Integraloperatoren i $C_2[0,1]$ med kernen G betegnes med g. Lad der være givet en funktion $f \in C[0,1]$. Vis, at differentialligningen $D^2\varphi = f$ har en og kun een løsning φ, som tilhører $C^2[0,1]$, og for hvilken $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$, og at denne løsning er $\varphi = g(f)$.
Find samtlige egenværdier og egenfunktioner for g, og angiv for et givet reelt tal $\lambda \neq 0$ og en given funktion $\alpha \in C^2[0,1]$, for hvilken $\alpha(0) = \alpha(1) = 0$, ved rækkeudviklinger løsningerne til integralligningen $\lambda\varphi - g(\varphi) = \alpha$.

3. Lad k være en integraloperator i $C_2[a,b]$ med en (ikke nødvendigvis symmetrisk) kontinuert kerne $K(s,t)$. Vis, at hvis den uendelige række

$$\lambda^{-1} \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^{-i} k^i(\alpha)$$

for en funktion $\alpha \in C[a,b]$ og et reelt tal λ konvergerer ligeligt i $[a,b]$, vil dens sum være en løsning φ til integralligningen $\lambda\varphi - k(\varphi) = \alpha$.

Vis, at dette er tilfældet, når $|\lambda|$ er større end et tal, der kun afhænger af $M = \sup K$ og $b - a$.

Københavns universitet

<u>Naturvidenskabelig embedseksamen. Vinteren 1963-64.</u>

M A T E M A T I K 6.

Alle hjælpemidler er tilladt.

Besvarelsen betragtes som fuldstændig, hvis 5 af nedenstående 6 opgaver er korrekt besvarede.

1.

Angiv samtlige singularitetspunkter klassificerede som knudepunkter, spiralpunkter, sadelpunkter etc. for det autonome differentialligningssystem

$$\dot{x} = x + x^2 - y^2, \quad \dot{y} = y - xy.$$

2.

Lad $f,g:]0,\infty[$ ind i $\mathring{R}$ være differentiable afbildninger, som opfylder betingelsen

$$\forall r \in]0,\infty[\ (f(r) \neq 0 \vee g(r) \neq 0).$$

Vis, at banekurverne til periodiske løsninger til differentialligningssystemet

$$\dot{x} = xf(x^2 + y^2) - yg(x^2 + y^2)$$
$$\dot{y} = xg(x^2 + y^2) + yf(x^2 + y^2)$$

er de cirkler med centrum i $(0,0)$, hvis radiers kvadrater er nulpunkter for f. Vis, at enhver ikke periodisk løsning vil konvergere mod $(0,0)$ eller gå asymptotisk mod en periodisk løsning eller fjerne sig i det uendelige.

(fortsættes)

Bestem for den partielle differentialligning

$$(x + z)\frac{\partial z}{\partial x} + (y - z)\frac{\partial z}{\partial y} = x + y$$

en løsning, som for $y = 0$ har randværdierne $x + 2$. En diskussion af gyldighedsområdet for løsningsmetoden forlanges ikke gennemført.

4.

Lad H være et Hilbertrum, a et element i H, og (x_n) en følge af elementer i H, der konvergerer mod a i den svage topologi på H.

Vis, at hvis der findes et element $y \in H$, for hvilket talfølgen $(\|x_n - y\|)$ er konvergent, så er $(\|x_n - z\|)$ konvergent for ethvert $z \in H$.

Vis, at hvis H ikke er endelig dimensionalt, findes der for ethvert $a \in H$ og ethvert reelt, ikke-negativt tal α en følge (x_n), der konvergerer mod a i den svage topologi, og for hvilken $\|x_n - a\| \to \alpha$.

5.

På $H = L^2_m(\mathbf{R},\mathbf{C})$, hvor m betegner Lebesgue-målet på $\mathbf{R}$, betragtes operatoren A_o, hvis definitionsområde er mængden $\mathcal{D}^1$ af komplekse differentiable funktioner på $\mathbf{R}$, der hver er nul uden for et begrænset interval og har kontinuert differentialkvotient, givet ved $A_o f = iDf$ for $f \in \mathcal{D}^1$. A_o har en afslutning $\overline{A_o} = A$.

Find A_o^2, og vis, at $\overline{A_o^2} \subsetneqq A^2$.

(fortsættes)

Lad H være et Hilbertrum og A en selvadjungeret operator på H med spektret $\sigma(A)$.

Vis, at A er en projektionsoperator, hvis og kun hvis $\sigma(A) \subseteq \{0,1\}$.

Vis, at en nødvendig og tilstrækkelig betingelse for, at der eksisterer en projektionsoperator P på H og en kontinuert reel funktion f på $\sigma(P)$, så at $A = f(P)$, er, at $\sigma(A)$ indeholder højst to punkter.

Vis, at hvis A er positiv og begrænset med $\|A\| = 1$, og A ikke er en projektionsoperator, findes der to forskellige positive, begrænsede operatorer B og C med $\|B\| = \|C\| = 1$, så at $2A = B + C$.

Mat. 6, 1963-64 Rettelser.

Side K I, 1,4 er også side K I 2,1.

2.6, l. 12: tilhører g(h) læs: tilhører g(h) $\overline{\overline{U}}_1 \subsetneq U$; til

" 13: f(V) læs: g(V)

7 " 1: også læs: basis for

8 " 12 og 9 l. 4 og 14: $\}$ læs $\}^*$

8 " 19:; læs: hvis $\grave{B}$ er en basis for $\grave{F}$,

er $\{\lambda B \mid B \in \grave{B}\}$ en basis for $\lambda\grave{F}$;

" 22 og 27 og 9. l.21 mangler en ` over et F

9 " 15 - 16: for $\lambda = 0$ må beviset ændres en smule

III, 3 1962-63

1 l. 18: da $G^{\perp}$ læs: da $F^{\perp\perp}$

2 " 11: underrum læs: afsluttede underrum

" 12: vilkårlig læs: vilkårlig endelig

3 " 13: $(h|f_i)^2$ læs: $|(h|f_i)|^2$

III, 1 1962-63

3 l.9: A læs: C

IV, 1 1962-63

2 l. 11: $y = 0$ læs: $y \neq 0$

4 l. 11: en læs: ingen

øv. 1.: Betingelsen 4) skal stryges

" 8., l. 13: bør begynde med et og

" 21, l. 4: norm læs: seminorm.

I 2, 3 l. 16: ; læs: , d.v.s. der findes en tællelig mængde B af åbne mængder, så at enhver åben mængde er foreningsmængde af mængder fra B;

II komm.t. III 3(62-63), 1 l.11: $G \subseteqq H$ læs: $G \subseteqq F^{\perp}$

3 " 2: T læs: I

3, 8 l.11:) læs: 2)

" 21: I_j læs: I_f

III 2, 3 l. 15: $= \{o\}$ læs: $\neq \{o\}$

II 3 (62-63), 4 l.13: $\bar{A} =$ læs: $\bar{A} \subseteqq$

Beviset nederst kan gøres lettere: da $f = f \vee o + f \wedge o$, kan vi antage, at $f \geqq o$; som g kan da anvendes $(f - \varepsilon) \vee o$

øv. 35 l.4: af H læs: af F '

II 3 (62-63) øv. 3 l. 4: $t \in A$ læs: $t \notin A$

øv. 4 l. 5: $y^{-1}x$ læs: $x - y$

IV 1 (62-63) øv. 1: $\mathfrak{D}^{o}$ betegner rummet af komplekse kontinuerte funktioner med kompakt støtte. g skal være $\neq 0$.

øv. 6: T = S

øv.10 l. 2: (E - V)H læs: (E - V)D(V)

l. 6: $i(E - V)^{-1}$ læs: $-i(E + V)(E - V)^{-1}$

i øv. 3, 5 og 6 mangler adskillige L.

Kommentarer til K II 1(1962-63).

1 l. 8: ,B2., og B3., må erstattes med $4(f|g)$ læs:
og B2., må erstattes med $2(f|g)+2(g|f)$.
" 9: . læs: , og $= 4(f|g)$, hvis også B3. er opfyldt.

III 5

1 " 2: kaldes læs: , hvor $a_n \in [-\infty,\infty[$, kaldes
" 3 tilføj: , idet vi sætter $-\infty + a = a+(-\infty)$
$= -\infty$ for $a \in [-\infty,\infty[$
2 " 4: r læs: r^{-1}
4 " 1: $\in$ læs: $\notin$
" 3: $\bar{\lambda}$ er læs: $\bar{\lambda}$ er ikke
" 6: $S^* - \lambda E$ læs: $S^* - \bar{\lambda}E$

III 6

1 " 11: $(PQ)(A) \supsetneqq P(A)Q(A)$ læs: $(PQ)(A) \subsetneqq P(A)Q(A)$
4 " 12: R læs: $\mathcal{R}$
5 " 16: $0 \leqq 1$ læs: $0 \leqq \varphi_n \leqq 1$
6 " 17: $\infty \neq \sigma(A)$ læs: $\infty \notin \sigma(A)$
7 " 4 f.n.: . læs: , for hvilken $p(1) = E$.
8 " 10 f.n.: f} læs: f, og g er nul i en omegn af S}
10 " 18: $\grave{G}$ læs: G
10 " 23 og 30 og 11 l. 4: g(h) læs: q(h)
11 " 12: y læs: g
øv. 76 " 7: 21 læs: 75

K III 2, 2 l. 9 : et talsæt læs: et egentligt talsæt.

" 11 : et polynomium læs: et egentligt polynomium.

6,17 " 5 : følger, læs: følger, hvis ikke $\sigma = \check{C}_\infty$,.

7, 7 " 16 : V læs: $V \cap N$.

8, 4 " 13 : IV læs: VI.

9, 2 " 20 : Schwartz læs: Schwarz.

3 " 7 f.n.: $\int K(s,t) e_i(s) e_j(t) dm_2$ læs:

$$\int K(s,t) e_i(s) \overline{\overline{e_j(t)}} dm_2$$

3 " 1,2,3 f.n. skal stryges.

6 " 11 : $\int u(s,t)dt$ læs: $\int u(s,t) f(t) dt$.

øv 101, næstsidste linie: (AB) læs: (A,B).

øv 109, l. 9 f.n. : $\| \|f_n\|^{-\frac{1}{2}} fn\| \to 0$ læs:

$$\| \|f_n\|^{-\frac{1}{2}} f_n\| \to 0 \Rightarrow.$$