Matematik 223

Kurver og flader i rummet

Matematik 223. (Kurver og flader i rummet)
Almen beskrivelse: Der tilstræbes fortrolighed med generelle begreber og egenskaber vedrørende kurver og flader i rummet, samt med fladers indre geometri. Kurset lægger vægt på det anskueligt geometriske, uden at give afkald på matematisk korrekthed. Der bygges især på differentialregning for funktioner af en eller to variable.
Læren om fladers indre geometri gav inspiration til og er stadig naturlig indgang til teorien for krumme rum (differentiable mangfoldigheder, Riemann geometri).
Indhold: Tangent, krumning, oskulationsplan og torsion for en kurve i rummet. Frenets formler. Parameterfremstilling for en flade i rummet. Tangentplan. Kurver på en flade. Hovedkrumninger. Gauss' krumningsmål. Bøjning. En flades indre geometri. Theorema egregium. Geodætiske kurver, geodætisk parallelforskydning og geodætisk krumning.
Skema: 2 timer forelæsning og 1 1/2 time øvelser om ugen i forårssemestret.
Eksamen: En skriftlig 2 timers prøve uden hjælpemidler. Eksamen holdes kun om sommeren.

Københavns Universitet
Matematisk Institut

1979
2. oplag 1983

Matematik 223. Kurver og flader i rummet.

Supplerende noter af Tage Gutmann Madsen

2. udgave

Indhold:

Københavns Universitet
Matematisk Institut

Matematik 223. Kurver og flader i rummet.

Eksamenspensum sommer 1979.

Børge Jessen „Lærebog i Geometri II", 2. udgave, København 1945:

1. kapitel, §§ 1-5 og 14-18.

Heraf kun kursorisk: p. 18^{11}-19_{12}, 23_5-24_1, 28^5-28^{10}, 77^6-77^{17},
samt eksemplerne 4, 6, 7, 11, 12, 47, 54, 55.

Kan forbigås: eksemplerne 18, 19, 45, 46, 49, 50.

3. kapitel, §§ 30-36 og 40-43.

Heraf kun kursorisk: p. 190^2-190^6, 195_7-196^2, 229_5-230^{11},
238^1-238^{19}, 238_7-239^{12},
samt eksemplerne 1, 6, 7, 8, 10, 24, 28, 29.

Kan forbigås: p. 190_5-194^9, 237^{10}-237_1,
samt eksemplerne 12, 23, 25, 27.

Supplerende noter af Tage Gutmann Madsen, 2. udgave, 1979:

Brev 0, 1, 2, 3 og 4.

Heraf kun kursorisk: p. 4.18^6-4.19_6.

Prøven er skriftlig og varer 2 timer. Der stilles en eller flere simple opgaver, eller der stilles „stileopgave(r)", hvor der ønskes gjort rede for begreber, sætninger og/eller beviser inden for pensum. Eventuelt kan der være tale om en blanding af de nævnte ingredienser. Hjælpemidler kan <u>ikke</u> medbringes, men formelsamlingen fra noterne vil blive hæftet til opgavesættet.

Januar 1979, Tage Gutmann Madsen

Rummet.

Vi vil ikke nöjere diskutere det rum, vi arbejder med, men blot nævne, at der er en mængde $E = E_3$ af punkter og en mængde $V = V_3$ af vektorer, mere præcist et vektorrum $V = V_3$ over $\mathbb{R}$ af dimension 3. Ethvert ordnet par P, Q af punkter bestemmer en vektor $\underline{v} = \overrightarrow{PQ}$, og der gælder:

(i) $\forall P, Q, R \in E: \quad \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$.

(ii) For fastholdt $O \in E$ er $P \to \overrightarrow{OP}$ en bijektiv afbildning af E på V.

Når (ii) anvendes, kalder man gerne $\overrightarrow{OP}$ stedvektor til P, og O kaldes udgangspunkt for stedvektorer eller begyndelsespunkt.

Endelig er der i V et skalarprodukt, og man kan derfor tale om sædvanlige retvinklede koordinatsystemer $(O, \underline{i}, \underline{j}, \underline{k})$ bestående af et punkt O og et sæt af tre parvis vinkelrette enhedsvektorer $\underline{i}$, $\underline{j}$ og $\underline{k}$. Et talsæt $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ kaldes koordinatsæt for vektoren $\underline{r} = x\underline{i} + y\underline{j} + z\underline{k}$ med hensyn til basis $(\underline{i}, \underline{j}, \underline{k})$, ligesom det kaldes koordinatsæt med hensyn til koordinatsystemet $(O, \underline{i}, \underline{j}, \underline{k})$ for punktet P med stedvektor $\overrightarrow{OP} = \underline{r} = x\underline{i} + y\underline{j} + z\underline{k}$.

De sædvanlige retvinklede koordinatsystemer falder i to klasser, kaldet höjrekoordinatsystemer og venstrekoordinatsystemer.

Ved teoretiske undersögelser vedrörende kurver og flader i rummet $E = E_3$ vælger vi gerne et begyndelsespunkt O for at kunne bringe vektorer i spil; i mere konkrete opgaver vælges ofte et koordinatsystem. At arbejde med vektorer i stedet for koordinater giver gerne en bedre geometrisk forståelse, og det har den væsentlige fordel, at et ændret valg af begyndelsespunkt blot betyder addition af en fast vektor til alle stedvektorer, – en ændring, der er uden betydning, så snart der differentieres. Arbejder man med koordinater, har ændret valg af koordinatsystem jo langt mere komplicerede fölger.

Om kurvebegrebet.

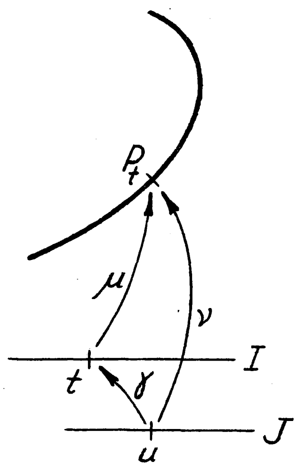
En kontinuert afbildning $\mu: t \to P_t$ af et interval $I \subseteq \mathbb{R}$ ind i rummet kaldes også en parameterfremstilling for en kontinuert kurve.

Men hvad er en kontinuert kurve ?

Lad os betragte to kontinuerte afbildninger μ og ν af intervaller $I \subseteq \mathbb{R}$ og $J \subseteq \mathbb{R}$ ind i rummet. Hvis der findes en kontinuert, strengt monoton funktion γ, der afbilder J på I, således at

$$\nu = \mu \circ \gamma,$$

da skal μ og ν regnes for parameterfremstillinger for samme kontinuerte kurve.



Egentlig er her tale om en ækvivalensrelation i mængden af kontinuerte afbildninger af intervaller på $\mathbb{R}$ ind i rummet. En kontinuert kurve er så en ækvivalensklasse. Man burde altså sige, at μ og ν repræsenterer samme kontinuerte kurve. Funktionen γ kaldes et parameterskift.

Parameterfremstillingerne μ og ν siges at fremstille kurven med samme eller modsat gennemløbsretning, efter som ν fremgår af μ ved et voksende eller et aftagende parameterskift γ. – Undtagelsestilfælde: Når alle kurvepunkter falder sammen, dvs. når μ er konstant, kan man naturligvis ikke skelne mellem to gennemløbsretninger.

Eksempel. Afbildningen $\mu: t \to P_t$ givet ved

$$\overrightarrow{OP_t} = \underline{a}t, \quad t \in [0, \infty[,$$

hvor O er et fast punkt og $\underline{a} \neq \underline{0}$ en fast vektor i rummet, fremstiller en halvlinie, gennemløbet fra endepunktet O. Med $\overrightarrow{OP_t} = \underline{a}t^2$, $t \in [0,\infty[$, og ligeledes med $\overrightarrow{OP_t} = \underline{a}t^2$, $t \in]-\infty, 0]$, fås samme kurve igen, i sidste tilfælde dog med modsat gennemløbsretning, medens $\overrightarrow{OP_t} = \underline{a}t^2$, $t \in]-\infty,\infty[$, giver en ny kurve: halvlinien gennemløbes to gange.

Bemærk, at begreber som tangent, spids og knæk i et kurvepunkt er <u>egenskaber ved kurven</u>: man støtter sig nok til en parameterfremstilling for kurven ved indføringen af disse begreber (bogen p. $8_8 - 9_{14}$), men det er uden betydning, hvilken af kurvens parameterfremstillinger, der benyttes. Begreberne positiv og negativ halvtangent samt orienteret tangent er <u>egenskaber ved kurven betragtet med en bestemt gennemløbsretning</u>.

Ved en n <u>gange differentiabel kurve</u> forstås (jfr. bogen p. $10_{20} - 10_7$) en kontinuert kurve, hvor der blandt parameterfremstillingerne <u>findes</u> en $\mu: t \to P_t$, $t \in I$, med følgende egenskaber:

Vektorfunktionen $t \to \underline{r}(t) = \overrightarrow{OP_t}$, $t \in I$, hvor O betegner et fast punkt i rummet, er af klasse $\mathcal{C}^n$, dvs. n gange differentiabel med kontinuert n^{te} afledet (se bogen p. $5_5 - 6$), <u>og</u>

$$\forall t \in I: \ \underline{r}'(t) \neq \underline{0}.$$

For $n=1$ siges blot <u>differentiabel kurve</u>.

Ved undersøgelser vedrørende f.eks. tre gange differentiable kurver vil vi, når andet ikke siges, holde os til parameterfremstillinger, der opfylder ovennævnte krav, med $n = 3$. De <u>tilladelige</u> parameterskift bliver da funktionerne $\gamma: J \to I$ af klasse $\mathcal{C}^3$, hvor

$$\forall u \in J: \ \gamma'(u) \neq 0$$

eller, hvis gennemløbsretningen ønskes bevaret,

$$\forall u \in J: \ \gamma'(u) > 0.$$

(Jfr. bogen p. 11, eks. 5. Vedr. bevis se f. eks. Andersen/Bohr/Petersen: Matematisk Analyse II, Gjellerup 1945, p. 265, eks. 20.)

Kravene til en „parameterfremstilling $\mu: t \to P_t$, $t \in I$, for en n gange differentiabel kurve" er klart uafhængige af valget af udgangspunkt O for stedvektorer. Vælges et koordinatsystem $(O, \underline{i}, \underline{j}, \underline{k})$, og er $(f(t), g(t), h(t))$ koordinatsættet for P_t, $t \in I$, kommer kravene ud på, at f, g og h er af klasse $\mathscr{C}^n$ og

$$\forall t \in I: \quad (f'(t), g'(t), h'(t)) \neq (0,0,0).$$

Kommentar.

Ad §4. Buelængde. Naturlig parameterfremstilling.

Bemærk, at buelængde af et kurvestykke er en egenskab ved kurven, dvs. ikke afhænger af, hvilken parameterfremstilling der benyttes. (Se f. eks. Mat 102, 1976-77, p. 35.01.)

En parameterfremstilling $\nu: s \to P_s$, $s \in I$, kaldes naturlig, hvis det for alle $s_0, s_1 \in I$, $s_0 < s_1$, gælder, at kurvestykket svarende til parameterintervallet $[s_0, s_1]$ har buelængde $s_1 - s_0$. Parameterskift mellem naturlige parameterfremstillinger for samme kurve med samme gennemløb har formen

$$s = u + \text{konstant}.$$

For en parameterfremstilling $\mu: t \to P_t$, $t \in I$, hvor vektorfunktionen $t \to \underline{r}(t) = \overrightarrow{OP_t}$, $t \in I$, er af klasse $\mathscr{C}^1$, har kurvestykket svarende til hvert parameterinterval $[t_0, t_1] \subseteq I$ en buelængde givet ved

$$\int_{t_0}^{t_1} |\underline{r}'(t)|\, dt,$$

uanset om $\underline{r}'(t) \neq \underline{0}$. (Se bogen p. 23-25, spec. eks. 13, eller Mat 102, 1976-77, p. 35.05-07, 40.01.) Parameterfremstillingen er følgelig naturlig, hvis og kun hvis

$$\forall t \in I: \ |\underline{r}'(t)| = 1.$$

(Ad „kun hvis": Hold t_0 fast og benyt infinitesimalregningens hovedsætning, Mat 102, 1976-77, p. 14.09. Jfr. bogen p. 25_{11}-25_9.)

Enhver differentiabel kurve, med valgt gennemløbsretning, har en - og på nær addition af en konstant til parameteren kun en - naturlig parameterfremstilling. Er kurven n gange differentiabel, da vil „den" naturlige parameterfremstilling også fremstille den som en n gange differentiabel kurve. (Se bogen p. 25-26.)

Kommentar.

Ad §§ 14-17. Tangentdrejning. Krumning. Oskulationsplan. Torsion.

Bemærk, at der ved definitionen p. 75 i bogen af drejningen $\theta: I \to \mathbb{R}$ og vinkelhastigheden $\frac{d\theta}{dt}$ af en vektorfunktion $t \to \underline{r}(t)$, $t \in I$, såvel som ved udledelsen af formlen

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{|\underline{r}(t) \times \underline{r}'(t)|}{|\underline{r}(t)|^2}$$

kun benyttes, at $\underline{r}$ er af klasse $\mathscr{C}^1$ og aldrig $\underline{0}$, men ikke, at $\underline{r}(t)$ og $\underline{r}'(t)$ er lineært uafhængige. (Det er nemlig uden betydning her, om $\underline{R}'(t) \neq 0$; se p. 0.5 eller bogen p. 25, eks. 13.)

Ved definitionen p. 82-84 i bogen af tangentdrejning θ og krumning $\varkappa$ såvel som ved udledelsen af formlen

$$\varkappa = \frac{|\underline{r}' \times \underline{r}''|}{|\underline{r}'|^3}$$

kan man derfor betragte en vilkårlig to gange differentiabel kurve i rummet, givet ved en parameterfremstilling $\overrightarrow{OP_t} = \underline{r}(t)$, $t \in I$, hvor $\underline{r}$ er af klasse $\mathscr{C}^2$ og $\underline{r}'$ aldrig er $\underline{0}$. (Jfr. bogen p. 85, eks. 48.)

Bemærk, at krumningen $\varkappa \in [0, \infty[$ i et kurvepunkt ifølge sin definition som grænseværdi for $\frac{\Delta\theta}{\Delta s}$ er en egenskab ved kurven, dvs. ikke afhænger af, hvilken parameterfremstilling der benyttes.

Indfører man krumning først, kan man formulere forudsætningerne ved indførelsen og behandlingen af oskulationsplan og ledsagende koordinatsystem i § 15 således: Betragt en to gange differentiabel kurve, givet ved en parameterfremstilling $\overrightarrow{OP_t} = \underline{r}(t)$, $t \in I$, hvor $\underline{r}$ er af klasse $\mathscr{C}^2$ og $\underline{r}'$ aldrig er $\underline{0}$, og antag, at krumningen $\varkappa$ er forskellig fra 0 i hvert punkt.

Antagelsen er – ifølge formlen ovenfor – ensbetydende med, at $\underline{r}'(t)$ og $\underline{r}''(t)$ er lineært uafhængige for alle $t \in I$, men mere tilfredsstillende udtrykt, idet den vedrører kurven og ikke den tilfældige parameterfremstilling. Dermed slipper vi også for at overveje, om egenskaben bevares ved parameterskift.

Bemærk, at oskulationsplanen i et kurvepunkt ifølge sin definition som grænsestilling er en egenskab ved kurven, dvs. ikke afhænger af, hvilken parameterfremstilling der benyttes.

Ved indførelsen af torsion (§17) kan man tilsvarende betragte en vilkårlig tre gange differentiabel kurve i rummet med krumning $\varkappa \neq 0$ i hvert punkt. (Jfr. bogen p. 93, eks. 52.)

Først defineres $|\tau| \in [0, \infty[$ i et kurvepunkt P som grænseværdi for $\frac{\Delta\beta}{\Delta s}$, se p. 90_{14}-90_9, 90_7-90_1, 91^{10}-92^4, og man finder formlen p. 92^{12}

$$|\tau| = \frac{|[\underline{r}'\,\underline{r}''\,\underline{r}''']|}{|\underline{r}' \times \underline{r}''|} .$$

I tilfældet $|\tau| \neq 0$ kan kurvens forløb omkring P undersøges som p. 88_{16}-88_6, idet $\underline{r}'''$ ikke falder i oskulationsplanen, og torsionen τ fås nu som $\pm|\tau|$, hvor der læses $+$ eller $-$, efter som kurven skærer igennem sin oskulationsplan i P i den retning binormalen angiver eller modsat.

Torsionen τ er igen en egenskab ved kurven. Specielt noteres, at fortegnet er uafhængigt af gennemløbsretningen.

Frenets formler p. 94, ligesom sætningen p. 92 nederst, gælder for enhver tre gange differentiabel kurve i rummet med krumning $\varkappa \neq 0$ i hvert punkt, – også når $\tau = 0$.

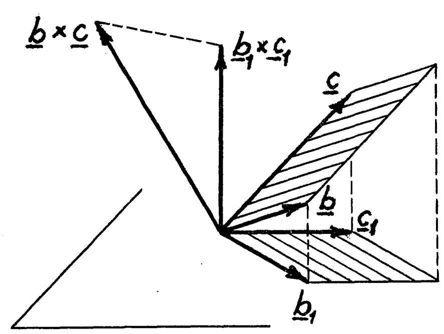
24.2.79, GM

Mat 223, 1974 brev 0.8

Kommentar.

Ad p. 91, omskrivning af $(\underline{r}'\times\underline{r}'')\times(\underline{r}'\times\underline{r}''')$.

Vi vil for vilkårlige vektorer $\underline{a},\underline{b},\underline{c}$ i rummet omregne $(\underline{a}\times\underline{b})\times(\underline{a}\times\underline{c})$.



Sæt $\underline{a}=\lambda\underline{e}$, hvor $\underline{e}$ er en enhedsvektor. Er nu $\underline{b}_1$ og $\underline{c}_1$ projektionerne af $\underline{b}$ og $\underline{c}$ på en plan vinkelret på $\underline{e}$, vil $\underline{b}_1\times\underline{c}_1$ være projektionen af $\underline{b}\times\underline{c}$ på $\underline{e}$'s linie. (Ved projektion multipliceres et areal med cosinus af toplanvinklen, dvs. af vinklen mellem normalerne.) Idet $\underline{e}\times\underline{b}$ og $\underline{e}\times\underline{c}$ fremgår af $\underline{b}_1$ og $\underline{c}_1$ ved samme drejning om $\underline{e}$ (af størrelse $\frac{\pi}{2}$), har vi derfor

$$(\underline{e}\times\underline{b})\times(\underline{e}\times\underline{c}) = \underline{b}_1\times\underline{c}_1 = (\underline{e}\cdot(\underline{b}\times\underline{c}))\underline{e} = [\underline{e}\,\underline{b}\,\underline{c}]\,\underline{e}\,.$$

Altså gælder $$(\underline{a}\times\underline{b})\times(\underline{a}\times\underline{c}) = [\underline{a}\,\underline{b}\,\underline{c}]\,\underline{a}\,.$$

7.3.74, GM

Om fladebegrebet.

Ved en parameterfremstilling for et differentiabelt fladestykke forstås en afbildning $\mu : (u,v) \to P_{u,v}$ af et område (dvs. en åben, sammenhængende mængde) $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ ind i rummet med følgende egenskaber:

Vektorfunktionen $(u,v) \to \underline{r}(u,v) = \overrightarrow{OP}_{u,v}$, hvor O betegner et fast punkt i rummet, har kontinuerte partielle afledede $D_1\underline{r} = \underline{r}'_u = \frac{\partial r}{\partial u}$ og $D_2\underline{r} = \underline{r}'_v = \frac{\partial r}{\partial v}$ i Ω, og for hvert $(u,v) \in \Omega$ er vektorparret $D_1\underline{r}(u,v)$, $D_2\underline{r}(u,v)$ lineært uafhængigt.

Det er klart, at dette krav ikke afhænger af valget af O.

Er $(O, \underline{i}, \underline{j}, \underline{k})$ et sædvanligt retvinklet koordinatsystem i rummet, og er $(x,y,z) = (f(u,v), g(u,v), h(u,v))$ koordinatsættet for $P_{u,v}$, $(u,v) \in \Omega$, kommer kravet ud på, at de reelle funktioner f, g og h har kontinuerte partielle afledede i Ω, dvs. $f, g, h \in \mathcal{C}^1(\Omega)$, og at matricen

$$\begin{pmatrix} D_1 f & D_2 f \\ D_1 g & D_2 g \\ D_1 h & D_2 h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f'_u & f'_v \\ g'_u & g'_v \\ h'_u & h'_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix}$$

har rangen 2 i hvert punkt $(u,v) \in \Omega$.

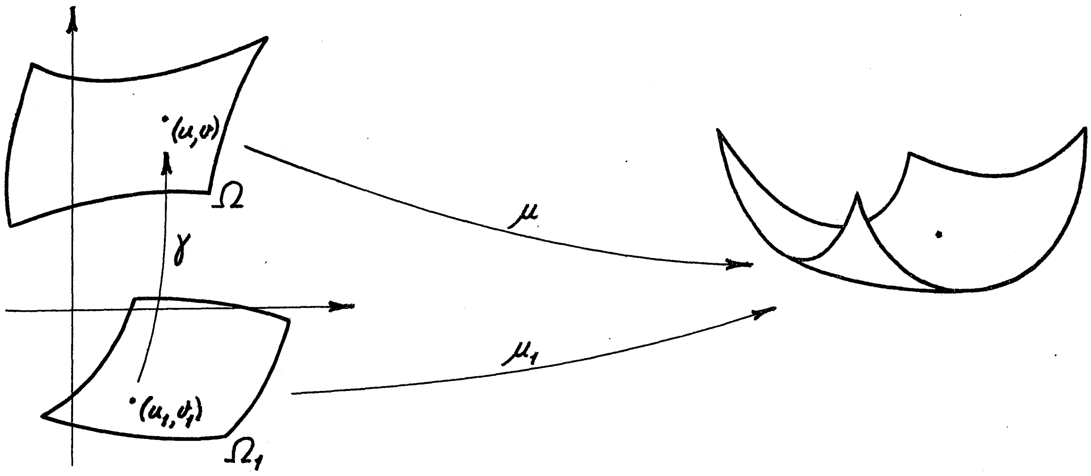
Men hvad er nu et differentiabelt fladestykke? Det skal straks siges, at helt det samme som billedmængde ved en parameterfremstilling er det ikke.

Lad os betragte to afbildninger som ovenfor beskrevet,

$$\mu : (u,v) \to P_{u,v}, \ (u,v) \in \Omega, \quad \text{og} \quad \mu_1 : (u_1,v_1) \to P_{u_1,v_1}, \ (u_1,v_1) \in \Omega_1 .$$

Hvis der findes en bijektiv afbildning γ af Ω_1 på Ω, som tillige med sin omvendte $\gamma^{-1} : \Omega \to \Omega_1$ er af klasse $\mathcal{C}^1$, således at

$$\mu_1 = \mu \circ \gamma ,$$



da skal μ og μ_1 regnes for parameterfremstillinger for samme differentiable fladestykke.

Egentlig er her tale om en ækvivalensrelation i mængden af afbildninger af den ovenfor beskrevne art (parameterfremstillinger). Et differentiabelt fladestykke er så en ækvivalensklasse. Man burde altså sige, at μ og μ_1 repræsenterer samme differentiable fladestykke.

Den bijektive afbildning $\gamma: \Omega_1 \to \Omega$ kaldes et (tilladeligt) parameterskift. At γ er af klasse $\mathscr{C}^1$, kommer, med

$$(u,v) = \gamma(u_1,v_1) = (\alpha(u_1,v_1), \beta(u_1,v_1)),$$

ud på, at funktionerne $\alpha: \Omega_1 \to \mathbb{R}$ og $\beta: \Omega_1 \to \mathbb{R}$ har kontinuerte partielle afledede i Ω_1. Da også γ^{-1} er af klasse $\mathscr{C}^1$, har vi

$$\underline{\underline{D}}\gamma^{-1}(u,v) \cdot \underline{\underline{D}}\gamma(u_1,v_1) = \underline{\underline{D}}(\gamma^{-1} \circ \gamma)(u_1,v_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(jfr. Mat 1y, §41 *)) Specielt bemærkes, at funktionalmatricen

$$\underline{\underline{D}}\gamma = \begin{pmatrix} D_1\alpha & D_2\alpha \\ D_1\beta & D_2\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial u_1} & \frac{\partial u}{\partial v_1} \\ \frac{\partial v}{\partial u_1} & \frac{\partial v}{\partial v_1} \end{pmatrix}$$

er regulær i hvert punkt $(u_1,v_1) \in \Omega_1$.

----

*) eller Mat 1, 1972-73, Differentiabilitet §41.

Bemærkning. Lad omvendt $\gamma: \Omega_1 \to \mathbb{R}^2$ være en injektiv $\mathscr{C}^1$-afbildning af et område $\Omega_1 \subseteq \mathbb{R}^2$ ind i $\mathbb{R}^2$, hvis funktionalmatrix $\underline{\underline{D}}\gamma$ er regulær i hvert punkt $(u_1, v_1) \in \Omega_1$. Da er billedmængden $\Omega = \gamma(\Omega_1)$ et område, og γ^{-1} er af klasse $\mathscr{C}^1$ (Mat 1y, §45 *).)

Er nu et differentiabelt fladestykke givet ved en parameterfremstilling μ med Ω som parameterområde, da er γ et tilladeligt parameterskift.

Bevis. Det gælder om at godtgøre, at $\mu_1 = \mu \circ \gamma$ opfylder kravene til en parameterfremstilling for et differentiabelt fladestykke. – Vi vælger et punkt O og sætter $\overrightarrow{OP}_{u,v} = \underline{r}(u,v)$, hvor $P_{u,v} = \mu(u,v)$. Videre sættes $\gamma(u_1,v_1) = (\alpha(u_1,v_1), \beta(u_1,v_1))$. Vektorfunktionen svarende til $\mu_1 = \mu \circ \gamma$ er da $(u_1,v_1) \to \underline{r}(\alpha(u_1,v_1), \beta(u_1,v_1))$. Den er åbenbart af klasse $\mathscr{C}^1$, og for hvert (u_1,v_1) er vektorerne

$$\frac{\partial r}{\partial u_1} = \frac{\partial r}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial u_1} + \frac{\partial r}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial u_1}$$
$$\frac{\partial r}{\partial v_1} = \frac{\partial r}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial v_1} + \frac{\partial r}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial v_1}$$

lineært uafhængige, da deres koordinatpar m.h.t. $\frac{\partial r}{\partial u}$ og $\frac{\partial r}{\partial v}$ er det. Koordinatparrene $(\frac{\partial u}{\partial u_1}, \frac{\partial v}{\partial u_1})$ og $(\frac{\partial u}{\partial v_1}, \frac{\partial v}{\partial v_1})$ er nemlig søjler i den regulære matrix $\underline{\underline{D}}\gamma$.

Ved overalt i det foregående at ændre ordene „kontinuerte partielle afledede" til „kontinuerte partielle afledede af n^{te} orden", dvs. ændre $\mathscr{C}^1$ til $\mathscr{C}^n$, får man begrebet n <u>gange</u> <u>differentiabelt fladestykke</u>.

NB. Det er stadig de afledede af første orden, der indgår i krav vedrørende lineær uafhængighed og matrixrang.

Et 3 gange differentiabelt fladestykke kan naturligvis behandles som 2 gange differentiabelt, blot er der da flere tilladelige parameterfremstillinger.

----

*) eller Mat 1, 1972-73, Omvendt afbildning §15.

Mat 223, 1974 brev 1.4

En *flade* i rummet består af fladestykker, der overlapper. Vi skal ikke komme ind herpå, men altid holde os inden for et enkelt fladestykke. Blot nævnes som eksempel, at en kugleflade ikke kan opfattes som et fladestykke, men let dækkes af to.

Bemærk, at med vor definition kan et fladestykke, ligesom en kurve, have dobbeltpunkter og selvgennemskæringer. Vi har nemlig ikke forlangt, at en parameterfremstilling skal være injektiv.

14.3.74, GM

Kommentar.

Ad §32. Kurve på fladestykke.

Lad $\mu : (u,v) \to P_{u,v}$, $(u,v) \in \Omega$, være en parameterfremstilling for et n gange differentiabelt fladestykke. Når der tales om en "kurve på fladestykket", menes altid en kurve overført fra Ω.

En kurve i Ω fremstilles $t \to (\varphi(t), \psi(t))$, $t \in I$, med $(\varphi(t), \psi(t)) \in \Omega$ for alle $t \in I$, hvor φ og ψ i det mindste er kontinuerte. Den tilsvarende "kurve på fladestykket" kan naturligvis betragtes som en kurve i rummet, med fremstilling

$$t \to P_t = P_{\varphi(t), \psi(t)} = \mu(\varphi(t), \psi(t)), \quad t \in I.$$

En kurve i rummet, hvis punkter alle falder på fladestykket, kan derimod ikke altid opfattes som en "kurve på fladestykket". (Se øvelse N.) Påstanden i eks. 9, andet punktum, skal derfor læses: Når en "kurve på fladen" er givet ved

$$(u,v) = (\varphi(t), \psi(t)), \quad t \in I,$$

med kontinuerte φ, ψ, og

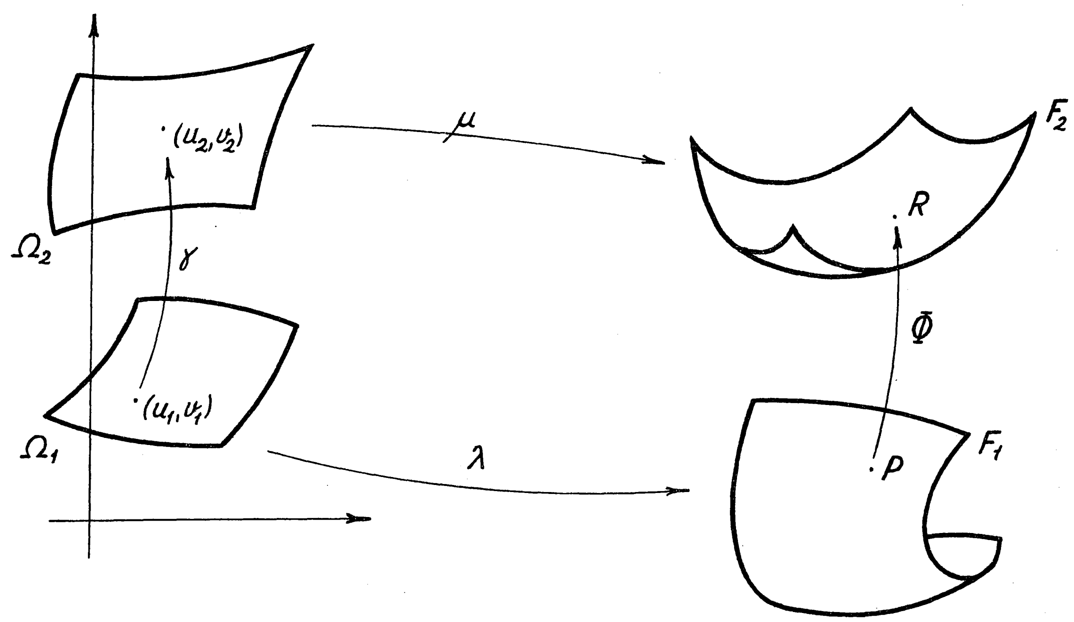
$$t \to P_t = P_{\varphi(t), \psi(t)} = \mu(\varphi(t), \psi(t)), \quad t \in I,$$

fremstiller kurven som en n gange differentiabel kurve i rummet, da er $\varphi, \psi \in \mathscr{C}^n(I)$ og $(\varphi'(t), \psi'(t)) \neq (0,0)$ for alle $t \in I$.

26.2.80, GM

Afbildning af flader.

Afbildning af flade i flade.



Lad $\lambda: (u_1,v_1) \to P_{u_1,v_1}$ og $\mu: (u_2,v_2) \to R_{u_2,v_2}$ være injektive parameterfremstillinger af to n gange differentiable fladestykker F_1 og F_2, $n \geq 1$. Parameterområderne betegnes Ω_1 og Ω_2, og vi sætter

$$\overrightarrow{OP}_{u_1,v_1} = \underline{p}(u_1,v_1), \quad \overrightarrow{OR}_{u_2,v_2} = \underline{r}(u_2,v_2),$$

hvor O er et fast punkt i rummet.

En afbildning $\Phi: F_1 \to F_2$ kan nu „udtrykkes i (krumlinede) koordinater", nemlig ved afbildningen $\gamma: \Omega_1 \to \Omega_2$, der fører (u_1,v_1) over i (u_2,v_2), når $\Phi(P_{u_1,v_1}) = R_{u_2,v_2}$. Med andre ord:

$$\gamma = \mu^{-1} \circ \Phi \circ \lambda, \quad \Phi = \mu \circ \gamma \circ \lambda^{-1}.$$

Afbildningen γ modsvarer funktionerne $\alpha: \Omega_1 \to \mathbb{R}$ og $\beta: \Omega_1 \to \mathbb{R}$, hvor

$$(u_2,v_2) = \gamma(u_1,v_1) = (\alpha(u_1,v_1), \beta(u_1,v_1)).$$

Man siger, at Φ er af klasse $\mathscr{C}^n$, hvis γ er det, dvs. hvis α og β har kontinuerte partielle afledede af n^{te} orden. – At definitionen er tilladelig, dvs. at kravet ikke ændres ved tilladelige parameterskift δ og τ, beror på, at γ og $\tau^{-1}\circ\gamma\circ\delta$ samtidig vil være af klasse $\mathscr{C}^n$.

Bevægelse af punkt og billedpunkt.

Med betegnelserne ovenfor antages, at $\Phi: F_1 \to F_2$ er af klasse $\mathscr{C}^1$.

Betragt en bevægelse (af et punkt P) på fladestykket F_1, givet ved

$$(u_1, v_1) = (\varphi_1(t), \psi_1(t)), \quad t \in I,$$

hvor I er et interval på $\mathbb{R}$ og $\varphi_1, \psi_1 \in \mathscr{C}^1(I)$ med $(\varphi_1(t), \psi_1(t)) \in \Omega_1$ for alle $t \in I$. Bevægelsen svarer til den sammensatte afbildning

$$t \to (u_1, v_1) = (\varphi_1(t), \psi_1(t)) \to P = P_{\varphi_1(t), \psi_1(t)}, \quad t \in I,$$

således at

$$\overrightarrow{OP} = \underline{\rho}(\varphi_1(t), \psi_1(t)), \quad t \in I.$$

Hastigheden er da

$$\underline{v}_1(t) = \frac{d\overrightarrow{OP}}{dt} = \frac{\partial \underline{\rho}}{\partial u_1}\frac{du_1}{dt} + \frac{\partial \underline{\rho}}{\partial v_1}\frac{dv_1}{dt}$$
$$= \underline{\rho}'_{u_1}(\varphi_1(t), \psi_1(t))\varphi_1'(t) + \underline{\rho}'_{v_1}(\varphi_1(t), \psi_1(t))\psi_1'(t).$$

Billedpunktet $R = \Phi(P)$ på F_2 har parametrene

$$(u_2, v_2) = (\varphi_2(t), \psi_2(t)) = (\alpha(\varphi_1(t), \psi_1(t)), \beta(\varphi_1(t), \psi_1(t))), \quad t \in I.$$

Idet

$$\overrightarrow{OR} = \underline{r}(\varphi_2(t), \psi_2(t)), \quad t \in I,$$

bevæger R sig altså med hastighed

$$\underline{v}_2(t) = \frac{d\overrightarrow{OR}}{dt} = \frac{\partial \underline{r}}{\partial u_2}\frac{du_2}{dt} + \frac{\partial \underline{r}}{\partial v_2}\frac{dv_2}{dt}$$
$$= \underline{r}'_{u_2}(\varphi_2(t), \psi_2(t))\varphi_2'(t) + \underline{r}'_{v_2}(\varphi_2(t), \psi_2(t))\psi_2'(t),$$

hvor
$$\begin{pmatrix}\varphi_2'(t)\\ \psi_2'(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{du_2}{dt}\\ \frac{dv_2}{dt}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{\partial\alpha}{\partial u_1}\frac{du_1}{dt} + \frac{\partial\alpha}{\partial v_1}\frac{dv_1}{dt}\\ \frac{\partial\beta}{\partial u_1}\frac{du_1}{dt} + \frac{\partial\beta}{\partial v_1}\frac{dv_1}{dt}\end{pmatrix} = \underline{\underline{D}}\gamma(\varphi_1(t),\psi_1(t))\begin{pmatrix}\varphi_1'(t)\\ \psi_1'(t)\end{pmatrix}.$$

Vi vil interessere os for sammenhængen mellem hastighederne af P og $R = \Phi(P)$ til et tidspunkt t_0.

Differential.

Lad π_1 være tangentplanen i P_{a_1,b_1} til fladestykket F_1, – se bogen p. 179–180. Den er bestemt ved P_{a_1,b_1} og de to vektorer $\frac{\partial \underline{\rho}}{\partial u_1} = \underline{\rho}'_{u_1}(a_1,b_1)$ og $\frac{\partial \underline{\rho}}{\partial v_1} = \underline{\rho}'_{v_1}(a_1,b_1)$. Tilsvarende betegner π_2 tangentplanen til F_2 i billedpunktet $R_{a_2,b_2} = \Phi(P_{a_1,b_1})$, bestemt ved R_{a_2,b_2} og de to vektorer $\frac{\partial \underline{r}}{\partial u_2} = \underline{r}'_{u_2}(a_2,b_2)$ og $\frac{\partial \underline{r}}{\partial v_2} = \underline{r}'_{v_2}(a_2,b_2)$, hvor $(a_2,b_2) = \gamma(a_1,b_1) = (\alpha(a_1,b_1), \beta(a_1,b_1))$. Vi vil her mere tænke på vektorerne end på punkterne i π_1 og π_2. Overgangen er i øvrigt umiddelbar, idet vektorerne afsættes fra P_{a_1,b_1}, henholdsvis R_{a_2,b_2}.

<u>Differentialet</u> $d\Phi$ af $\Phi: F_1 \to F_2$ i P_{a_1,b_1} er nu en afbildning af tangentplanen π_1 ind i tangentplanen π_2. Billedet $d\Phi(\underline{v}_1)$ af en vilkårlig vektor $\underline{v}_1$ i π_1 fås på følgende måde: Betragt en bevægelse af et punkt P på F_1, hvor P_{a_1,b_1} passeres med hastigheden $\underline{v}_1$. Billedpunktet $R = \Phi(P)$ på F_2 passerer da R_{a_2,b_2} med en hastighed $\underline{v}_2$, og vi sætter $d\Phi(\underline{v}_1) = \underline{v}_2$.

Denne definition forudsætter to bemærkninger:

1° Der findes en bevægelse på F_1 som nævnt.

2° For alle sådanne bevægelser vil billedpunktets hastighed $\underline{v}_2$ ved passagen af R_{a_2,b_2} være den samme.

Bevis. 1°. Idet vi benytter betegnelserne højere oppe, er det klart, at φ_1 og ψ_1 findes, så $\varphi_1(t_0) = a_1$, $\psi_1(t_0) = b_1$ og

$$\underline{\rho}'_{u_1}(a_1,b_1)\,\varphi_1'(t_0) + \underline{\rho}'_{v_1}(a_1,b_1)\,\psi_1'(t_0) = \underline{v}_1 .$$

2°. Blot φ_1 og ψ_1 er valgt som i 1°, har vi

$$\underline{v}_2 = \underline{r}'_{u_2}(a_2,b_2)\,\varphi_2'(t_0) + \underline{r}'_{v_2}(a_2,b_2)\,\psi_2'(t_0),$$

hvor

$$\begin{vmatrix}\varphi_2'(t_0)\\ \psi_2'(t_0)\end{vmatrix} = \underline{\underline{D}}\gamma(a_1,b_1)\begin{vmatrix}\varphi_1'(t_0)\\ \psi_1'(t_0)\end{vmatrix} .$$

Det fremgår, at $\underline{v}_2$ alene afhænger af $\underline{v}_1$, ikke af den specielle bevægelse, og videre, at

<u>Differentialet</u> $d\Phi$ <u>af</u> Φ <u>i</u> P_{a_1,b_1} <u>er en lineær afbildning af</u> π_1 <u>ind i</u> π_2. <u>Matricen med hensyn til baserne</u> $\underline{\rho}'_{u_1}, \underline{\rho}'_{v_1}$ <u>i</u> π_1 <u>og</u> $\underline{r}'_{u_2}, \underline{r}'_{v_2}$ <u>i</u> π_2 <u>er</u> $\underline{\underline{D}}\gamma(a_1,b_1)$.

Hvis differentialet $d\Phi$ af Φ i P_{a_1,b_1} har rangen 2, dvs. hvis $\underline{\underline{D}}\gamma(a_1,b_1)$ er regulær, siges afbildningen Φ at være <u>regulær</u> i P_{a_1,b_1}. Der vil da til enhver tangentretning i P_{a_1,b_1} svare en bestemt tangentretning i R_{a_2,b_2} og et bestemt målestoksforhold >0, sml. bogen p. 187.

<u>Diffeomorfi</u>.

Lad fortsat λ og μ være injektive parameterfremstillinger af to n gange differentiable fladestykker F_1 og F_2, $n \geq 1$.

Ved en <u>diffeomorfi</u> af F_1 på F_2 (som n gange differentiable fladestykker) forstås en afbildning $\Phi: F_1 \to F_2$, som er bijektiv og tillige med sin omvendte Φ^{-1} af klasse $\mathscr{C}^n$.

Kravene kommer ud på, at $\gamma = \mu^{-1} \circ \Phi \circ \lambda$ er en bijektiv afbildning af Ω_1 på Ω_2 og tillige med sin omvendte γ^{-1} af klasse $\mathscr{C}^n$.

Med andre ord: γ er et tilladeligt parameterskift.

Ved studiet af en diffeomorfi $\Phi: F_1 \to F_2$ kan man derfor udskifte parameterfremstillingen μ for F_2 med $\mu_1 = \mu \circ \gamma$: Vi har da samme parameterområde Ω_1 for begge fladestykker, og $\Phi = \mu_1 \circ \lambda^{-1}$, altså

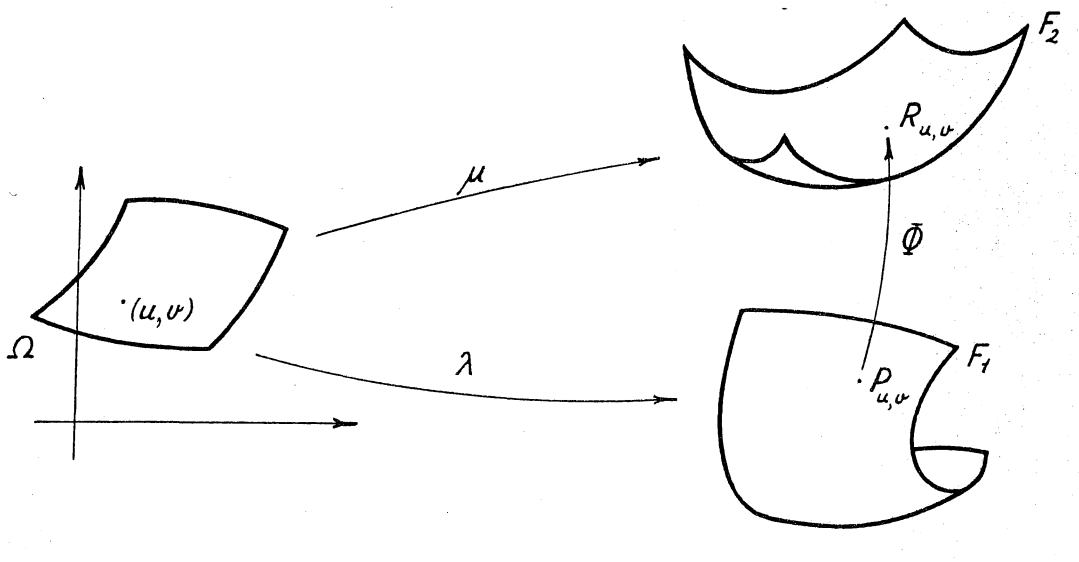
$$\mu_1^{-1}(\Phi(P)) = \lambda^{-1}(P) \quad \text{for } P \in F_1,$$

dvs. punkt og billedpunkt har samme parametre.

Enhver diffeomorfi Φ mellem n gange differentiable fladestykker F_1 og F_2 kan således fås ud fra passende parameterfremstillinger λ og μ for F_1 og F_2 med samme parameterområde Ω ved forskriften

$$P_{u,v} \to R_{u,v}, \quad (u,v) \in \Omega.$$

Jfr. bogen p. 201^1–201^8.



Med $\overrightarrow{OP_{u,v}} = \underline{p}(u,v)$ og $\overrightarrow{OR_{u,v}} = \underline{r}(u,v)$ er differentialet $d\Phi$ af Φ i $P_{a,b}$ da den lineære afbildning af tangentplanen til F_1 i $P_{a,b}$ på tangentplanen til F_2 i $R_{a,b}$, der fører $\underline{p}'_u(a,b)$ og $\underline{p}'_v(a,b)$ over i $\underline{r}'_u(a,b)$ og $\underline{r}'_v(a,b)$.

Thi bevægelser af et punkt P på F_1 og billedpunktet $R = \Phi(P)$ på F_2 har samme fremstilling

$$(u,v) = (\varphi(t), \psi(t)), \quad t \in I,$$

og hastighederne er

$$\underline{v}_1(t) = \frac{\partial \underline{p}}{\partial u}\varphi'(t) + \frac{\partial \underline{p}}{\partial v}\psi'(t),$$

henholdvis

$$\underline{v}_2(t) = \frac{\partial \underline{r}}{\partial u}\varphi'(t) + \frac{\partial \underline{r}}{\partial v}\psi'(t).$$

Böjning og udfoldning.

Lad fortsat F_1 og F_2 være to n gange differentiable fladestykker uden dobbeltpunkter, $n \geq 1$.

En diffeomorfi $\Phi: F_1 \to F_2$, der er længdetro, dvs. hvor tilsvarende kurvestykker på de to flader altid har samme længde, kaldes en böjning af F_1 på F_2. – I brev 4 vil vi påvise, at en række vigtige störrelser og begreber vedrörende flader er böjningsinvariante. Eksistens af en böjning $\Phi: F_1 \to F_2$ kræver således en ganske vidtgående overensstemmelse mellem de to fladestykker.

En böjning af et fladestykke på en plan eller en del af en plan kaldes også en udfoldning. En flade, for hvilken der eksisterer en udfoldning, kaldes udfoldelig. – Eksempelvis skal vi senere se, at et (nok så lille) stykke af en kugleflade ikke kan udfoldes (brev 4.9), – et geografisk kort er aldrig længdetro.

Sætning 1. *Lad $\Phi: F_1 \to F_2$ være en diffeomorfi. Fölgende udsagn er da ensbetydende:*

(1) *Φ er længdetro, dvs. en böjning.*

(2) *I ethvert punkt P på F_1 har Φ målestoksforholdet 1 i alle tangentretninger.*

(3) I ethvert punkt P på F_1 er differentialet $d\Phi$ af Φ en isometri, dvs. en afstandsbevarende afbildning, også kaldet kongruens eller flytning, af tangentplanen til F_1 i P på tangentplanen til F_2 i billedpunktet $\Phi(P)$.

Sætning 2. Lad $\Phi: F_1 \to F_2$ være bestemt ud fra parameterfremstillinger λ og μ for fladestykkerne F_1 og F_2 med samme parameterområde Ω ved forskriften

$$P_{u,v} \to R_{u,v}, \quad (u,v) \in \Omega,$$

dvs. $\Phi = \mu \circ \lambda^{-1}$. Følgende udsagn er da ensbetydende:

(1) Φ er længdetro, dvs. en bøjning.

(4) $E_\lambda = E_\mu, \; F_\lambda = F_\mu, \; G_\lambda = G_\mu$.

Her betegner $E_\lambda, F_\lambda, G_\lambda : \Omega \to \mathbb{R}$ og $E_\mu, F_\mu, G_\mu : \Omega \to \mathbb{R}$ koefficienterne i første fundamentalform for parameterfremstillingerne λ og μ (se p. 184 i bogen).

Ved beviset for sætning 1 kan Φ tænkes givet som i sætning 2, og begge sætninger fremgår da ved en cirkelslutning:

$$(4) \Rightarrow (1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (4).$$

At (4) ⇒ (1) følger umiddelbart af, at kurve og billedkurve har samme fremstilling $(u,v) = (\varphi(t), \psi(t)), \; t \in [t_1, t_2]$,

når man erindrer formlen for buelængde (p. 184 i bogen)

$$\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{E(\varphi')^2 + 2F\varphi'\psi' + G(\psi')^2}\, dt.$$

(1) ⇒ (2). Hvis Φ bevarer alle kurvelængder, vil afbildningen naturligvis have målestoksforholdet 1 i alle tangentretninger i hvert punkt $P_{u,v}$.

(2) $\Rightarrow$ (3). Thi Φ har samme målestoksforhold i enhver tangentretning i $P_{u,v}$ som $d\Phi$.

(3) $\Rightarrow$ (4). Idet $\underline{\rho}_u'(u,v)$, $\underline{\rho}_v'(u,v)$ og $\underline{\rho}_v'(u,v)-\underline{\rho}_u'(u,v)$ ved $d\Phi$ afbildes i $\underline{r}_u'(u,v)$, $\underline{r}_v'(u,v)$ og $\underline{r}_v'(u,v)-\underline{r}_u'(u,v)$, medfører (3), at disse vektorer parvis har samme længde. Men så er

$$|\underline{\rho}_u'| = |\underline{r}_u'|, \quad |\underline{\rho}_v'| = |\underline{r}_v'|, \quad \angle(\underline{\rho}_u',\underline{\rho}_v') = \angle(\underline{r}_u',\underline{r}_v'),$$

hvilket er ensbetydende med (4), - jfr. p. 185 i bogen.

<u>Korollar</u>. <u>En bøjning er vinkeltro og arealtro</u>.

Det kan ses af (3) og (4).

En kort behandling af diffeomorfi og bøjning findes i §36 i bogen. Her argumenteres efter skemaet (1) $\Leftrightarrow$ (4) $\Leftrightarrow$ (3), hvor det så ventes, at læseren selv indser (1) $\Rightarrow$ (4), jfr. p. 201_8 - 201_6. Det forventede ræsonnement kan man finde i brev 4, se p. 4.7. For eksempler på bøjning og udfoldning henvises til §36, eksempel 13, til §38 og til §39, eksempel 18.

12.2.79, GM

Kommentar.

Ad p. $231^9 - 231_9$.

Sætter vi $f(\xi) = f_\theta(\xi) = F(\xi\cos\theta, \xi\sin\theta)$, kan krumningen $\varkappa_T$ af normalsnittet i retningen T bestemt ved $(X,T) = \theta$ findes som $\varkappa_T = f''(0)$. (Se p. 49 nederst.) Og

$$f''(0) = r\cos^2\theta + 2s\cos\theta\sin\theta + t\sin^2\theta$$

fremgår enten direkte ved differentiation af $F(\xi\cos\theta, \xi\sin\theta)$ to gange m.h.t. ξ, eller ved benyttelse af

$$f(\xi) = F(\xi\cos\theta, \xi\sin\theta) = \tfrac{1}{2}(r\cos^2\theta + 2s\cos\theta\sin\theta + t\sin^2\theta)\xi^2 + o(\xi^2).$$

(Man klarer sig således let uden henvisning til §19.)

Ad p. 232_7, Eulers formel $\varkappa_T = \varkappa_X\cos^2\theta + \varkappa_Y\sin^2\theta$.

Ifölge Eulers formel kan hovedkrumningerne i et punkt P på en to gange differentiabel flade også karakteriseres som den störste og den mindste normalsnitskrumning $\varkappa_T$ i P. Herved må $\varkappa_T$ regnes med fortegn. Og medmindre normalsnitskrumningen $\varkappa_T$ er den samme for alle tangentretninger T i P, kan hovednormalsnittene karakteriseres som de normalsnit i P, der har den störste og den mindste krumning $\varkappa_T$. De er indbyrdes vinkelrette, og $\varkappa_T$ varierer monotont, når T drejes fra en hovednormalsnitsretning til en anden. For et givet tal $\varkappa$ mellem hovedkrumningerne findes netop to normalsnit med $\varkappa_T = \varkappa$; deres tangenter ligger symmetrisk med hensyn til hovednormalsnittenes tangenter.

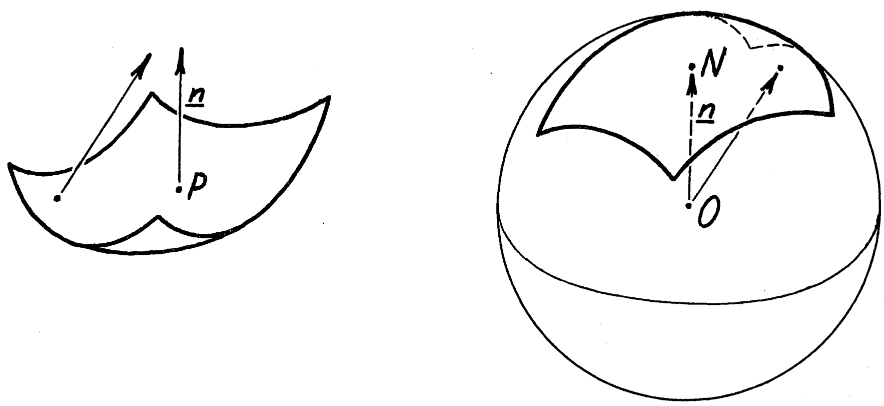
Alle disse påstande fremgår umiddelbart af Eulers formel, omskrevet til

$$\varkappa_T = \varkappa_X + (\varkappa_Y - \varkappa_X)\sin^2\theta.$$

Gauss' krumningsmål.

Vi betragter et to gange differentiabelt fladestykke givet ved en parameterfremstilling $\overrightarrow{OP}_{u,v} = \underline{r}(u,v)$, $(u,v) \in \Omega$.

Enhedsvektoren $\underline{n} = (\underline{r}'_u \times \underline{r}'_v)/|\underline{r}'_u \times \underline{r}'_v|$ på fladenormalen har da, som funktion af (u,v), kontinuerte partielle afledede i Ω. Punktet $N = N_{u,v}$ givet ved $\overrightarrow{ON}_{u,v} = \underline{n}(u,v)$, $(u,v) \in \Omega$, beskriver et fladestykke på enhedskuglefladen med centrum O. Det kaldes det sfæriske normalbillede af det givne fladestykke, medens afbildningen $P_{u,v} \to N_{u,v}$, $(u,v) \in \Omega$, kaldes den sfæriske normalafbildning.



Arealforholdet i et punkt $P = P_{u,v}$ ved den sfæriske normalafbildning turde være et naturligt mål for fladens krumning i punktet. Det er jo et udtryk for spredningen af fladenormalerne omkring P.

For et areal på fladen og det tilsvarende areal på det sfæriske normalbillede har vi henholdsvis

$$\int_{\mathcal{D}} |\underline{r}'_u \times \underline{r}'_v| \, d(u,v), \qquad \int_{\mathcal{D}} |\underline{n}'_u \times \underline{n}'_v| \, d(u,v),$$

idet vi vil tillade os at benytte den sidste formel, uanset om $\underline{n}'_u$ og $\underline{n}'_v$ er lineært uafhængige. Arealforholdet i et punkt $P = P_{u,v}$ er da lig værdien af $|\underline{n}'_u \times \underline{n}'_v| / |\underline{r}'_u \times \underline{r}'_v|$ i (u,v).

Differentialet af den sfæriske normalafbildning i $P = P_{u,v}$ er en lineær afbildning fra fladens tangentplan i P til enhedskuglefladens tangentplan i billedpunktet $N = N_{u,v}$. Ved denne går $\underline{r}'_u$ og $\underline{r}'_v$ over i $\underline{n}'_u$ og $\underline{n}'_v$, og arealforholdet er derfor ligeledes $|\underline{n}'_u \times \underline{n}'_v| / |\underline{r}'_u \times \underline{r}'_v|$. De to tangentplaner er imidlertid parallelle. Medmindre den lineære afbildning er udartet (dvs. n'_u og n'_v lineært afhængige), kan man derfor her regne arealforholdet positivt eller negativt, efter som orienteringen bevares eller vendes.

Fladens <u>krumningsmål</u> K i et punkt P defineres (efter Carl Friederich Gauss, 1827) som arealforholdet i P ved den sfæriske normalafbildning, forsynet med fortegnet + eller −, hvis en orientering af tangentplanen i P henholdsvis bevares eller vendes ved den tilhørende lineære afbildning.

Ifølge det foregående er $\underline{n}'_u \times \underline{n}'_v = K\, \underline{r}'_u \times \underline{r}'_v$.
Med $n'_u = a_1 r'_u + b_1 r'_v$, $n'_v = a_2 r'_u + b_2 r'_v$ har vi derfor

$$K = a_1 b_2 - a_2 b_1 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Ved differentiation af $\underline{n} \cdot \underline{r}'_u = 0$ og $\underline{n} \cdot \underline{r}'_v = 0$ fremgår

$$\underline{n}'_u \cdot \underline{r}'_u = -\underline{n} \cdot \underline{r}''_{u^2} = -L, \quad \underline{n}'_u \cdot \underline{r}'_v = \underline{n}'_v \cdot \underline{r}'_u = -M, \quad \underline{n}'_v \cdot \underline{r}'_v = -N.$$

Indsættes udtrykkene for n'_u og n'_v, fås en række formler, der kan samles i matrixligningen

$$\begin{pmatrix} -L & -M \\ -M & -N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$$

Ved overgang til determinanter fås følgende

<u>Formel</u> <u>for</u> <u>Gauss'</u> <u>krumningsmål</u>: $\quad K = \dfrac{LN - M^2}{EG - F^2}$

Samme udtryk er i §42 fundet for produktet af hovedkrumningerne. <u>Krumningsmålet</u> <u>kan</u> <u>derfor</u>, som gjort i bogen, <u>også</u>

<u>defineres</u> <u>som</u> <u>dette</u> <u>produkt</u>.

Specielt fremgår en simpel geometrisk betydning af krumningsmålets fortegn: $K = K(u,v)$ er positiv, 0 eller negativ, efter som fladen er elliptisk, parabolsk eller hyperbolsk krummet i $P_{u,v}$.

24.4.74, GM

En flades indre geometri

En flades indre geometri.

Nye betegnelser. Christoffel symboler.

Studiet af flader ved hjælp af parameterfremstillinger går tilbage til Carl Friedrich Gauss (1822). I det forudgående århundredes undersögelser tænkte man sig en flade givet ved en ligning. - En række af vore hidtidige betegnelser, som E, F, G, er ligefrem hentet fra Gauss' banebrydende arbejde: Disquisitiones generales circa superficies curvas (1827 – tysk oversættelse: Ostwalds Klassiker 5).

I dette brev vil vi imidlertid anvende et andet sæt meget benyttede symboler, bogstaver med indices, der ofte gør komplicerede udtryk mere overskuelige. Symbolerne kan i övrigt umiddelbart bruges i generaliseringer af fladeteorien til höjere dimension.

Vi betragter et n gange differentiabelt fladestykke givet ved en parameterfremstilling $\overrightarrow{OP}_{u^1,u^2} = \underline{r}(u^1,u^2)$, $(u^1,u^2)\in\Omega$. Generelt forudsættes $n \geqq 2$. (Så længe kun de afledede $\underline{r}'_1$ og $\underline{r}'_2$ af förste orden inddrages, er dog $n \geqq 1$ tilstrækkeligt.)

Bemærk, at de to parametre er betegnet med samme bogstav med index 1 og 2, anbragt foroven. (Der må advares mod forveksling af indices og eksponenter. Har man brug for f. eks. kvadratet på u^2, skrives $(u^2)^2$.)

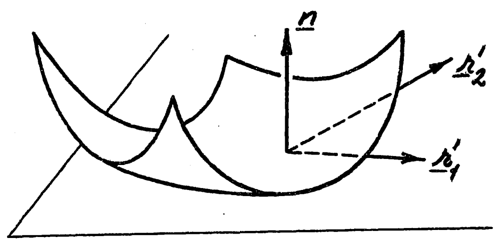
For $\frac{\partial \underline{r}}{\partial u^i}, \frac{\partial^2 \underline{r}}{\partial u^i \partial u^j}, \dots$ skrives $\underline{r}'_i, \underline{r}''_{ij}, \dots$, og vi sætter $g_{ij} = \underline{r}'_i \cdot \underline{r}'_j$, således at

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}.$$

Denne matrix kaldes parameterfremstillingens <u>fundamentalmatrix</u>. Dens elementer g_{11}, $g_{12} = g_{21}$ og g_{22} er reelle funktioner tilhörende $\mathcal{C}^{n-1}(\Omega)$; i bogen kaldes de koefficienter i förste fundamentalform (p. 185). Determinanten

$$g = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix} = EG - F^2 = |\underline{r}'_1 \times \underline{r}'_2|^2$$

(se bogen p. 195) tilhører ligeledes $\mathscr{C}^{n-1}(\Omega)$. Da $g(u^1,u^2) \neq 0$ i hvert punkt $(u^1,u^2) \in \Omega$, har fundamentalmatricen overalt i Ω en invers; den skrives
$$\begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{pmatrix}.$$
Også g^{11}, $g^{12} = g^{21}$ og g^{22} tilhører $\mathscr{C}^{n-1}(\Omega)$; eksempelvis er jo $g^{11} = \frac{g_{22}}{g}$.



For hvert $(u^1,u^2) \in \Omega$ udgør vektorerne $\underline{r}'_1(u^1,u^2)$ og $\underline{r}'_2(u^1,u^2)$ i fladestykkets tangentplan i P_{u^1,u^2} sammen med enhedsvektoren
$$\underline{n}(u^1,u^2) = \frac{\underline{r}'_1(u^1,u^2) \times \underline{r}'_2(u^1,u^2)}{|\underline{r}'_1(u^1,u^2) \times \underline{r}'_2(u^1,u^2)|}$$
på fladenormalen en basis for rummets vektorer.

Specielt har $\underline{r}''_{ij}(u^1,u^2)$ netop én fremstilling
$$\underline{r}''_{ij}(u^1,u^2) = \Gamma_{ij}^{\,1}(u^1,u^2)\underline{r}'_1(u^1,u^2) + \Gamma_{ij}^{\,2}(u^1,u^2)\underline{r}'_2(u^1,u^2) + L_{ij}(u^1,u^2)\underline{n}(u^1,u^2);$$
vi har benyttet lejligheden til at indføre betegnelser for koordinaterne. Med andre ord: $\Gamma_{ij}^{\,k}$ og L_{ij}, $i,j,k = 1,2$, er reelle funktioner defineret på Ω, givet ved

(1) $$\underline{r}''_{ij} = \Gamma_{ij}^{\,1}\underline{r}'_1 + \Gamma_{ij}^{\,2}\underline{r}'_2 + L_{ij}\underline{n}.$$

Det bemærkes, at $\Gamma_{ij}^{\,k} = \Gamma_{ji}^{\,k}$ og $L_{ij} = L_{ji}$, idet $\underline{r}''_{ij} = \underline{r}''_{ji}$.

Da $L_{ij} = \underline{n} \cdot \underline{r}''_{ij} = \frac{(\underline{r}'_1 \times \underline{r}'_2) \cdot \underline{r}''_{ij}}{|\underline{r}'_1 \times \underline{r}'_2|} = \frac{[\underline{r}'_1\, \underline{r}'_2\, \underline{r}''_{ij}]}{\sqrt{g}}$, er L_{11}, $L_{12} = L_{21}$ og L_{22} blot andre betegnelser for L, M og N (se bogen p. 227). Derimod er funktionerne $\Gamma_{ij}^{\,k}$ nye for os; de kaldes <u>Christoffel</u> <u>symboler</u> af anden art (efter Erwin Bruno Christoffel, 1869).

Christoffel symbolerne Γ_{ijl} af første art defineres ved $\Gamma_{ijl} = \underline{r}''_{ij} \cdot \underline{r}'_l$. For hvert i,j er da
$$\begin{aligned} \Gamma_{ij1} &= \Gamma_{ij}^{\,1}\underline{r}'_1 \cdot \underline{r}'_1 + \Gamma_{ij}^{\,2}\underline{r}'_2 \cdot \underline{r}'_1 \\ \Gamma_{ij2} &= \Gamma_{ij}^{\,1}\underline{r}'_1 \cdot \underline{r}'_2 + \Gamma_{ij}^{\,2}\underline{r}'_2 \cdot \underline{r}'_2 \end{aligned}, \text{ dvs. } \begin{pmatrix} \Gamma_{ij1} \\ \Gamma_{ij2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Gamma_{ij}^{\,1} \\ \Gamma_{ij}^{\,2} \end{pmatrix},$$

og dermed

$$\begin{pmatrix} \Gamma_{ij}^{\ 1} \\ \Gamma_{ij}^{\ 2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma_{ij1} \\ \Gamma_{ij2} \end{pmatrix},$$

altså $\Gamma_{ij}^{\ k} = \sum_{l=1}^{2} g^{kl}\Gamma_{ijl}$.

Bemærk, at Γ_{ijl} og dermed $\Gamma_{ij}^{\ k}$ tilhører $\mathscr{C}^{n-2}(\Omega)$.

Christoffel symbolerne viser sig at være bestemt ved funktionerne g_{ij}. Det fremgår af følgende regning:

Differentiation af $g_{il} = \underline{r}_i' \cdot \underline{r}_l'$ giver

$$\frac{\partial g_{il}}{\partial u^j} = r_{ij}'' \cdot r_l' + r_{lj}'' \cdot r_i' = \Gamma_{ijl} + \Gamma_{lji},$$

hvor i, j og l hver kan tillægges værdien 1 eller 2. Vi opskriver resultatet på tre måder

$$\frac{\partial g_{il}}{\partial u^j} = \Gamma_{ijl} + \Gamma_{lji}$$

$$\frac{\partial g_{jl}}{\partial u^i} = \Gamma_{jil} + \Gamma_{lij}$$

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^l} = \Gamma_{ilj} + \Gamma_{jli}.$$

Idet $\Gamma_{ijl} = \Gamma_{jil}$, $\Gamma_{lji} = \Gamma_{jli}$, $\Gamma_{lij} = \Gamma_{ilj}$, finder vi heraf

$$\frac{\partial g_{il}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^l} = 2\Gamma_{ijl}.$$

Vi noterer:

<u>Sætning 1.</u> <u>Christoffel symbolerne kan udtrykkes ved funktionerne g_{ij} i fundamentalmatricen</u> (dvs. ved koefficienterne i første fundamentalform):

$$\Gamma_{ijl} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{il}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^l}\right), \qquad \Gamma_{ij}^{\ k} = \sum_{l=1}^{2} g^{kl}\Gamma_{ijl}.$$

Det afgørende er ofte, at der findes sådanne formler, medens udseendet er underordnet.

Indre geometri 1.

Dette afsnit er ikke matematik, men læs det alligevel!

Forestil dig en todimensional skabning, der lever på et n gange differentiabelt fladestykke. (Som sædvanlig tænker vi os det givet ved en parameterfremstilling, se p. 4.2.) Han kender de reelle tal, er i stand til at måle kurvelængder på fladestykket og har lært differential- og integralregning, men han er bundet til fladen og evner end ikke at forestille sig det tredimensionale rum, fladen ligger i. Fladens tangentplan i et vilkårligt punkt kan han nok forestille sig, men bevæge sig ud i den kan han ikke.

Vort fladevæsen benytter parametrene u^1, u^2 som koordinater; – ligesom længde og bredde bruges på en kugleflade. Et punkts bevægelse på fladen beskriver han således ved at angive punktets parametre som funktioner af tiden, $u^1 = \varphi^1(t)$, $u^2 = \varphi^2(t)$; – sammenlign logbogen for et skib på rejse over Atlanten. En afbildning $t \to (\varphi^1(t), \varphi^2(t))$, $t \in I$, hvor $(\varphi^1(t), \varphi^2(t))$ tilhører parameterområdet Ω for alle $t \in I$, omtaler han også som parameterfremstilling af en kurve på fladen. Er $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathscr{C}^1(I)$, vil

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \sqrt{\Sigma_{i,j}\, g_{ij}(\varphi^1(v), \varphi^2(v))\, \frac{d\varphi^i}{dv}\frac{d\varphi^j}{dv}}\, dv$$

som bekendt (bogen p. 184) være buelængden på kurven; altså

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \Sigma_{i,j}\, g_{ij}(\varphi^1(t), \varphi^2(t))\, \frac{d\varphi^i}{dt}\frac{d\varphi^j}{dt}\,.$$

<u>Nota bene</u>. <u>Fladevæsenet kan bestemme funktionerne g_{ij} i fundamentalmatricen</u> (dvs. koefficienterne i første fundamentalform).

Funktionsværdierne i et punkt $(a^1, a^2) \in \Omega$ kan han nemlig finde således: Først måler han buelængde $s(t)$ på parameterkurven givet ved $u^1 = t$, $u^2 = a^2$; han beregner $\left(\frac{ds}{dt}\right)_{t=a^1}$ og udnytter

$$\left(\left(\frac{ds}{dt}\right)_{t=a^1}\right)^2 = g_{11}(a^1, a^2)\,.$$

Analogt bestemmes $g_{22}(a^1, a^2)$, hvorefter han kan finde $g_{12}(a^1, a^2) = g_{21}(a^1, a^2)$ ved at måle buelængde f.eks. på kurven givet ved $u^1 = a^1 + t$, $u^2 = a^2 + t$.

Det er således i princippet enkelt nok for fladevæsenet at bestemme funktionerne g_{ij}, når han først kender formen af udtrykket for buelængde $s(t)$. – At finde frem til denne har nok voldt ham lidt kvaler.

Størrelser (talstørrelser, funktioner) og begreber, der kan fastlægges af fladevæsenet, siges at være <u>indre geometriske</u>.

<u>Indre geometri</u> 2.

Denne gang vil vi ikke støtte os til et fantasivæsen (men tænk alligevel på ham nu og da!).

Vi betragter et n gange differentiabelt fladestykke givet ved en parameterfremstilling, som på p. 4.2.

En størrelse (talstørrelse, funktion) eller et begreb, der kan fastlægges ud fra buelængder af kurver på fladestykket, kaldes <u>indre geometrisk</u>.

Oftest er det mere bekvemt at søge størrelsen/begrebet fastlagt ved hjælp af funktionerne g_{ij} i fundamentalmatricen (dvs. koefficienterne i første fundamentalform). Det gør ingen forskel, thi funktionerne g_{ij} er faktisk indre geometriske (bevis kan hentes i foregående afsnit), og på den anden side er buelængden for en kurve på fladestykket jo bestemt ved formlen p. 4.5, når kurven er givet ved $(u^1, u^2) = (\varphi^1(t), \varphi^2(t)) \in \Omega$, $t \in I$, med $\varphi^1, \varphi^2 \in \mathscr{C}^1(I)$.

Som eksempler på indre geometriske størrelser kan (ud over buelængder og funktionerne g_{ij}) nævnes vinkler mellem kurver på fladen og fladearealer (se bogen p. 186 og p. 195). At Christoffel symbolerne er indre geometriske, er hovedindholdet af sætning 1 (p. 4.4). Vi skal træffe yderligere en række eksempler senere.

Lad os nu tænke os to n gange differentiable fladestykker uden dobbeltpunkter givet ved parameterfremstillinger $(u^1, u^2) \to P_{u^1, u^2}$ og $(u^1, u^2) \to R_{u^1, u^2}$ med samme parameterområde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, og lad os (som i bogen p. 201) betragte den bijektive afbildning Φ af det ene fladestykke på det andet, hvor
$$\forall (u^1, u^2) \in \Omega: \ \Phi(P_{u^1, u^2}) = R_{u^1, u^2}.$$

Man bemærker specielt, at en kurve på det ene fladestykke givet ved $(u^1, u^2) = (\varphi^1(t), \varphi^2(t))$, $t \in I$, ved Φ føres over i en kurve på det andet <u>med</u> <u>samme</u> <u>fremstilling</u>.

Som der er gjort rede for i brev 2, -se p. 2.5 -, er Φ en vilkårlig diffeomorfi af et n gange differentiabelt fladestykke på et andet, idet fremstillingen
$$P_{u^1, u^2} \to R_{u^1, u^2}, \ (u^1, u^2) \in \Omega,$$
opnås ved brug af passende parameterfremstillinger med et fælles parameterområde Ω.

Som bekendt (p. 2.6, bogen p. 201) kaldes Φ en <u>böjning</u>, hvis ethvert kurvestykke på det ene fladestykke ved Φ føres over i et af samme længde, dvs. hvis Φ er <u>længdetro</u>. En nödvendig og tilstrækkelig betingelse er (sætning 2 i brev 2, bogen p. 201), at funktionerne g_{ij} i fundamentalmatricen er <u>fælles</u> for de to fladestykkers parameterfremstillinger. Dette fölger direkte af, at længder af modsvarende buer på de to fladestykker bestemmes på samme måde ud fra funktionerne g_{ij}, og at funktionerne g_{ij} bestemmes på samme måde ud fra længder af modsvarende buer (jfr. p. 4.5-6).

En böjning Φ er <u>vinkeltro</u> og <u>arealtro</u>, da vinkler mellem kurver, henholdsvis arealer kan bestemmes ved identiske udtryk for de to flader. <u>Ganske tilsvarende er alle indre geometriske störrelser böjningsinvariante</u>. Eksempelvis gælder det Christoffel symbolerne.

Mat 223, 1975 brev 4.8

Vort fladevæsen vil ikke være i stand til at afgøre, om han befinder sig på et stykke af en cylinderflade, en plan eller en kegleflade, henholdsvis på et stykke af en vindelflade eller en katenoide (se bogen p. 223).

Theorema egregium.

Theorema egregium (Gauss 1827*)). Gauss' krumningsmål er böjningsinvariant. – Vi tager her tre gange differentiable fladestykker i betragtning.

Vi förer (som Gauss) beviset ved at godtgöre, at krumningsmålet K kan udtrykkes ved indre geometriske störrelser – og dermed selv er indre geometrisk. Det turde være overordentlig bemærkelsesværdigt i lys af krumningsmålets definition som den sfæriske normalafbildnings arealforhold (brev 3). Karakteriseringen af K som produkt af hovedkrumningerne (bogen p. 235) peger heller ikke mod böjningsinvarians, idet hovedkrumninger og hovedretninger i almindelighed ændres ved böjning.

Nu beviset. Vi betragter et tre gange differentiabelt fladestykke givet ved parameterfremstilling $\overrightarrow{OP}_{u^1,u^2} = \underline{r}(u^1,u^2)$. Idet

$$K = \frac{L_{11}L_{22} - L_{12}L_{21}}{g_{11}g_{22} - g_{12}g_{22}} = \frac{L}{g} ,$$

er det nok at vise, at $L = \begin{vmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{vmatrix}$ er indre geometrisk.

Vi går ud fra ligningen

$$(1) \qquad \underline{r}''_{ij} = \Gamma_{ij}^{1}\underline{r}'_1 + \Gamma_{ij}^{2}\underline{r}'_2 + L_{ij}\underline{n} = \Sigma_{p=1}^{2}\Gamma_{ij}^{p}\underline{r}'_p + L_{ij}\underline{n} ,$$

hvor Γ_{ij}^{p} er af klasse $\mathscr{C}^1$ (se p. 4.4), medens $\underline{n} = (\underline{r}'_1 \times \underline{r}'_2)/|\underline{r}'_1 \times \underline{r}'_2|$ endda er af klasse $\mathscr{C}^2$ og $L_{ij} = \underline{n}\cdot\underline{r}''_{ij}$ af klasse $\mathscr{C}^1$. Ved differentiation fås

$$\underline{r}'''_{ijk} = \Sigma_{p=1}^{2}\left(\frac{\partial \Gamma_{ij}^{p}}{\partial u^k}\underline{r}'_p + \Gamma_{ij}^{p}\underline{r}''_{pk}\right) + L_{ij}\underline{n}'_k + \frac{\partial L_{ij}}{\partial u^k}\underline{n} .$$

Idet $\underline{n}\cdot\underline{r}'_l = 0$ og dermed $\underline{n}'_k\cdot\underline{r}'_l = -\underline{n}\cdot\underline{r}''_{lk} = -L_{lk}$, sluttes videre

$$\underline{r}'''_{ijk}\cdot\underline{r}'_l = \Sigma_{p=1}^{2}\left(\frac{\partial \Gamma_{ij}^{p}}{\partial u^k}g_{pl} + \Gamma_{ij}^{p}\Gamma_{pkl}\right) - L_{ij}L_{lk} .$$

---

*) Werke IV, p. 237. Egregium: udsøgt, ypperligt.

Her giver $(i,j,k,l) = (1,2,1,2)$ og $(i,j,k,l) = (1,1,2,2)$ samme venstre side, da jo $\underline{r}'''_{121} = \underline{r}'''_{112}$, og af ligheden mellem højre siderne fremgår så et udtryk for $L_{11}L_{22} - L_{12}L_{21}$ ved indre geometriske størrelser.

Eksempler. For en plan er K identisk 0. Det samme gælder da ethvert udfoldeligt fladestykke. – For en kugleflade med radius R er $K = \frac{1}{R^2}$. Et (nok så lille) stykke af en kugleflade kan altså ikke udfoldes.

Ved bøjning sker der ingen ændring i, om en flade i et givet punkt er elliptisk, parabolsk eller hyperbolsk krummet.

Gauss viste ikke blot, at krumningsmålet er indre geometrisk, men han fandt også en simpel indre geometrisk karakterisering. Han viste nemlig følgende sætning, der "utvivlsomt hører til de eleganteste i fladeteorien", at for en trekant på fladestykket, hvis sider er geodætiske kurver (se p. 4.16 ff.), er vinkelsummens afvigelse fra π lig arealet af det sfæriske normalbillede (1827, Werke IV, p. 246). I generaliseret form går resultatet under navnet Gauss/Bonnets sætning. (Se f.eks. J.J. Stoker: Differential geometry, Wiley 1969, p. 191-197.)

Bevægelse på en flade.

Lad et to gange differentiabelt fladestykke være givet ved en parameterfremstilling $\overrightarrow{OP}_{u^1,u^2} = \underline{r}(u^1,u^2)$, $(u^1,u^2)\in\Omega$.

Vi betragter en kurve på fladestykket givet ved

$$u^1 = \varphi^1(t),\ u^2 = \varphi^2(t), \quad t\in I,$$

hvor I er et interval på $\mathbb{R}$ og $\varphi^1,\varphi^2 \in \mathscr{C}^2(I)$ med $(\varphi^1(t),\varphi^2(t))\in\Omega$ for alle $t\in I$.

Vi vil tolke afbildningen $t \to P_{\varphi^1(t),\varphi^2(t)}$, $t\in I$, som beskrivelse af et punkt P, der bevæger sig på fladestykket - og dermed i rummet. Heri ligger blot, at vi vil bruge en kinematisk terminologi.

Af $\overrightarrow{OP} = \underline{r}(\varphi^1(t),\varphi^2(t))$ fås ved differentiation

$$\underline{v}(t) = \frac{d\underline{r}}{dt} = \Sigma_{i=1}^2 \underline{r}_i'(\varphi^1(t),\varphi^2(t))\frac{d\varphi^i}{dt}, \qquad \text{kort: } \underline{v} = \Sigma_{i=1}^2 \underline{r}_i'\frac{d\varphi^i}{dt},$$

og videre

$$\underline{w} = \frac{d^2\underline{r}}{dt^2} = \Sigma_{i=1}^2\Big(\underline{r}_i'\frac{d^2\varphi^i}{dt^2} + \big(\Sigma_{j=1}^2 \underline{r}_{ij}''\frac{d\varphi^j}{dt}\big)\frac{d\varphi^i}{dt}\Big)$$
$$= \Sigma_{i=1}^2 \underline{r}_i'\frac{d^2\varphi^i}{dt^2} + \Sigma_{i,j=1}^2 \underline{r}_{ij}''\frac{d\varphi^i}{dt}\frac{d\varphi^j}{dt},$$

ganske som i bogen p. 226-227. Hastigheden $\underline{v}$ til tiden t ligger i fladestykkets tangentplan i $P_{\varphi^1(t),\varphi^2(t)}$; dens koordinater med hensyn til $\underline{r}_1'(\varphi^1(t),\varphi^2(t))$, $\underline{r}_2'(\varphi^1(t),\varphi^2(t))$ er $\frac{d\varphi^1}{dt}, \frac{d\varphi^2}{dt}$. Accelerationen $\underline{w}$ regner vi videre på, idet ligning (1) benyttes (se p. 4.3):

$$\underline{w} = \underline{r}_1'\Big(\frac{d^2\varphi^1}{dt^2} + \Sigma_{i,j}\Gamma_{ij}^1\frac{d\varphi^i}{dt}\frac{d\varphi^j}{dt}\Big)$$
$$+ \underline{r}_2'\Big(\frac{d^2\varphi^2}{dt^2} + \Sigma_{i,j}\Gamma_{ij}^2\frac{d\varphi^i}{dt}\frac{d\varphi^j}{dt}\Big) + \underline{n}\,\Sigma_{i,j}L_{ij}\frac{d\varphi^i}{dt}\frac{d\varphi^j}{dt}.$$

Vi genfinder udtrykket $\Sigma_{i,j}L_{ij}(\varphi^1(t),\varphi^2(t))\frac{d\varphi^i}{dt}\frac{d\varphi^j}{dt}$ for den med fortegn regnede længde af projektionen af $\underline{w}(t)$ på fladenormalen i $P_{\varphi^1(t),\varphi^2(t)}$ (ligning (1), bogen p. 227), men vil her i stedet hefte os ved projektionen $\underline{w}_g(t)$ af $\underline{w}(t)$ på tangentplanen. Denne vektor vil vi kalde den <u>geodætiske</u> <u>acceleration</u>. Dens koordinater med hensyn til $\underline{r}_1'(\varphi^1(t),\varphi^2(t))$,

$r_2'(\varphi^1(t), \varphi^2(t))$ aflæses til

$$\frac{d^2\varphi^1}{dt^2} + \Sigma_{i,j} \Gamma_{ij}^1(\varphi^1(t), \varphi^2(t)) \frac{d\varphi^i}{dt}\frac{d\varphi^j}{dt}, \quad \frac{d^2\varphi^2}{dt^2} + \Sigma_{i,j} \Gamma_{ij}^2(\varphi^1(t), \varphi^2(t)) \frac{d\varphi^i}{dt}\frac{d\varphi^j}{dt},$$

kort: $$\left(\frac{d^2\varphi^k}{dt^2} + \Sigma_{i,j} \Gamma_{ij}^k \frac{d\varphi^i}{dt}\frac{d\varphi^j}{dt}\right), \quad k = 1,2 .$$

Vort fladevæsen (se p. 4.5) benytter også fremstillingen $(u^1, u^2) = (\varphi^1(t), \varphi^2(t))$ af punktets bevægelse, og han opfatter $(\frac{d\varphi^1}{dt}, \frac{d\varphi^2}{dt})$ som koordinatpar til hastigheden $\underline{v}(t)$. Accelerationen $\underline{w}(t)$ ligger uden for hans forestillingsverden; men koordinaterne til den geodætiske acceleration $\underline{w}_g(t)$ er indre geometriske (jfr. sætning 1, p. 4.4); dem kan han beregne. Fornuftigvis opfatter han da $\underline{w}_g(t)$ som accelerationen.

<u>Jævn geodætisk bevægelse på en flade.</u>

Jævn bevægelse af et punkt i rummet kan karakteriseres ved, at accelerationen er konstant lig $\underline{0}$. Banekurven er (et stykke af) en ret linie.

Lad igen et to gange differentiabelt fladestykke være givet ved en parameterfremstilling $\overrightarrow{OP}_{u^1,u^2} = \underline{r}(u^1,u^2)$, $(u^1,u^2) \in \Omega$.

Når vi taler om en bevægelse (af et punkt) på fladen, vil vi tænke os den givet på formen

$$(u^1, u^2) = (\varphi^1(t), \varphi^2(t)), \quad t \in I,$$

hvor I er et interval på $\mathbb{R}$ og $\varphi^1, \varphi^2 \in \mathscr{C}^2(I)$ med $(\varphi^1(t), \varphi^2(t)) \in \Omega$ for alle $t \in I$.

Accelerationens komponent efter fladenormalen ved passage af et punkt P_{u^1,u^2} på fladen er

$$\underline{n}(u_1,u_2)\ \Sigma_{i,j} L_{ij}(u^1,u^2) \frac{d\varphi^i(t)}{dt} \frac{d\varphi^j(t)}{dt},$$

som beregnet p. 4.11 såvel som i bogen p. 227. Det er bemærkelsesværdigt, at denne komponent er bestemt alene ved den hastighed, hvormed P_{u^1,u^2} passeres. Det har vi udmøntet i Meusniers sætning (bogen p. 229). Og det afskærer os fra at stille krav til komponenten. Vi definerer da:

En bevægelse på fladen kaldes <u>jævn geodætisk</u>, hvis den geodætiske acceleration $\underline{w}_g(t)$, dvs. accelerationens komponent efter tangentplanen i $P_{\varphi^1(t),\varphi^2(t)}$, er $\underline{0}$ for hvert $t \in I$. Altså hvis accelerationen $\underline{w}(t)$ ligger på fladenormalen i $P_{\varphi^1(t),\varphi^2(t)}$ for hvert $t \in I$.

(Til belysning af begrebet et indskud, der hører hjemme i rationel mekanik: En partikel, der er bundet til en glat flade og ikke påvirkes af andre kræfter end fladens reaktion, rettet efter fladenormalen, vil netop udføre en jævn geodætisk bevægelse på fladen. (Leonhard Euler 1736).)

<u>Ved en jævn geodætisk bevægelse på fladen er farten</u> $|\underline{v}| = \frac{ds}{dt}$ <u>konstant</u>.

Thi da hastigheden $\underline{v}$ ligger i fladens tangentplan, er $\frac{dv^2}{dt} = 2\underline{v}\cdot\underline{w} = 0$.

Sætning 2. En bevægelse på fladestykket givet ved

$$(u^1, u^2) = (\varphi^1(t), \varphi^2(t)), \quad t \in I,$$

hvor $\varphi^1, \varphi^2 \in \mathscr{C}^2(I)$ og $(\varphi^1(t), \varphi^2(t)) \in \Omega$ for alle $t \in I$, er jævn geodætisk, hvis og kun hvis

$$\frac{d^2\varphi^k(t)}{dt^2} + \sum_{i,j=1}^{2} \Gamma_{ij}^{k}(\varphi^1(t), \varphi^2(t)) \frac{d\varphi^i(t)}{dt}\frac{d\varphi^j(t)}{dt} = 0, \quad t \in I, \ k = 1, 2,$$

dvs. hvis (φ^1, φ^2) er lösning til de sammenhörende differentialligninger af anden orden

$$(2) \qquad \begin{aligned} \frac{d^2u^1}{dt^2} + \sum_{i,j=1}^{2} \Gamma_{ij}^{1}(u^1, u^2)\frac{du^i}{dt}\frac{du^j}{dt} &= 0 \\ \frac{d^2u^2}{dt^2} + \sum_{i,j=1}^{2} \Gamma_{ij}^{2}(u^1, u^2)\frac{du^i}{dt}\frac{du^j}{dt} &= 0 \end{aligned} \; .$$

Sætningen fölger umiddelbart af det p. 4.12 fundne udtryk for koordinaterne til $\underline{w}_g$.

Sætning 3a. Ved böjning modsvares en jævn geodætisk bevægelse på det ene fladestykke af en jævn geodætisk bevægelse på det andet.

Thi Christoffel symbolerne er identiske ifölge sætning 1 (p. 4.4), differentialligningerne (2) altså de samme for de to fladestykker. Og modsvarende bevægelser har samme fremstilling $(u^1, u^2) = (\varphi^1(t), \varphi^2(t))$. – Herved forudsættes, at fladestykkernes parameterfremstillinger er afpasset som på p. 4.7 (bogen p. 201).

Kort: Da Christoffel symbolerne er indre geometriske, gælder dette også begrebet geodætisk bevægelse.

Sætning 2 sætter os endvidere i stand til at klare problemet om eksistens af geodætiske bevægelser på et tre gange differentiabelt fladestykke. Her vil Christoffel symbolerne (svarende til en passende parameterfremstilling) være af klasse $\mathscr{C}^1$, således at eksistens- og entydighedssætningen for differentialligningssystemer (Mat 102, 1977-78, p. 51.04) kan anvendes på systemet (2). Det giver følgende vigtige resultat:

<u>Sætning</u> 4a. <u>På en tre gange differentiabel flade findes en og kun en jævn geodætisk bevægelse med foreskrevet position</u> P_0 <u>og hastighed</u> v_0 <u>i tangentplanen i</u> P_0 <u>til et givet tidspunkt</u> t_0.

Entydigheden er således at forstå, at enhver jævn geodætisk bevægelse, der opfylder kravene, er restriktion af en med maksimalt tidsinterval $I \subseteq \mathbb{R}$.

Bevis. Der søges løsninger (φ^1, φ^2) til (2) med

$$(\varphi^1(t_0), \varphi^2(t_0), (\varphi^1)'(t_0), (\varphi^2)'(t_0)) = (u_0^1, u_0^2, a^1, a^2),$$

hvor $P_0 = P_{u_0^1, u_0^2}$ og $\underline{v}_0 = a^1 \underline{r}_1'(u_0^1, u_0^2) + a^2 \underline{r}_2'(u_0^1, u_0^2)$.

Geodætiske kurver på en flade.

Banekurven for en jævn geodætisk bevægelse (der ikke er hvile) på en to gange differentiabel flade kaldes en geodætisk kurve på fladen. - Det er en to gange differentiabel kurve. (Farten i en geodætisk bevægelse er jo konstant og dermed aldrig 0, når bevægelsen ikke er hvile.)

En to gange differentiabel kurve på fladen er geodætisk, hvis og kun hvis dens oskulationsplan indeholder fladenormalen i hvert punkt, hvor kurvens krumning $\varkappa$ er forskellig fra 0.

Et gennemløb af en sådan kurve med konstant fart er nemlig en jævn geodætisk bevægelse: når accelerationen $\underline{w}(t)$ ikke er $\underline{0}$, ligger den på kurvens hovednormal, som her falder sammen med fladenormalen. Omvendt: ved en jævn geodætisk bevægelse falder $\underline{w}(t)$ på fladenormalen, men jo også i banekurvens oskulationsplan, når $\varkappa(t) \neq 0$.

Eksempler. Eventuelle rette linie(stykke)r på en flade er altid geodætiske kurver. Storcirkler er geodætiske kurver på en kugleflade.

For et to gange differentiabelt fladestykke givet ved en parameterfremstilling ser man ofte ligningerne (2) i sætning 2 (p. 4.14) omtalt som differentialligninger for geodætiske kurver på fladestykket, skönt det jo er differentialligninger for jævne geodætiske bevægelser, dvs. for geodætiske kurver gennemlöbet med konstant fart.

Sætning 3b. Ved böjning går en geodætisk kurve på den ene flade over i en geodætisk kurve på den anden.

En umiddelbar konsekvens af sætning 3a. Begrebet geodætisk kurve er indre geometrisk.

Eksempel. De geodætiske kurver i en plan er de rette linie(stykke)r. De geodætiske kurver på en omdrejningscylinderflade er derfor frembringere, parallelcirkler og skruelinier.

Sætning 4b. Gennem hvert punkt på en tre gange differentiabel flade går der en og kun en geodætisk kurve i hver tangentretning.

Entydigheden er således at forstå, at alle geodætiske kurver gennem et givet punkt med given retning er delkurver af en og samme maksimale.

Resultatet følger af sætning 4a: For en geodætisk kurve gennem et givet punkt P_0 med foreskrevet tangentretning kan vi benytte den naturlige parameterfremstilling med P_0 som udgangspunkt. Med kinematisk terminologi opfatter vi da kurven som banekurve for en geodætisk bevægelse med fart 1, hvor P_0 er positionen til tiden 0. Idet hastigheden til tiden 0 er enhedsvektoren $\underline{v}_0$ i den foreskrevne tangentretning, slutter vi, at bevægelsen er (en restriktion af) den maksimale jævne geodætiske bevægelse med position P_0 og hastighed $\underline{v}_0$ til tiden 0. På den anden side er banekurven for denne bevægelse jo virkelig en geodætisk kurve gennem P_0 med den ønskede tangentretning.

Eksempel. Der er ikke andre geodætiske kurver på en kugleflade end storcirklerne. Gennem hvert punkt går der nemlig en storcirkel i hver tangentretning.

Geodætiske kurvers minimalegenskab.

Vi vil indskrænke os til følgende resultat:

Sætning 5. Hvis to punkter A og B på et to gange differentiabelt fladestykke kan forbindes med en to gange differentiabel kurve på fladen af mindst længde, da er kurven geodætisk. (Johann Bernoulli 1697.)

Bevis. Vi tænker os som sædvanlig fladestykket givet ved en parameterfremstilling $(u^1, u^2) \to P_{u^1 u^2}$, $(u^1, u^2) \in \Omega$, og sætter $A = P_{a^1 a^2}$, $B = P_{b^1 b^2}$. Vi tænker os en kortest mulig to gange differentiabel kurve på fladen fra A til B givet ved naturlig parameterfremstilling, på formen

$$(u^1, u^2) = (\varphi^1(t), \varphi^2(t)), \quad t \in [0, l].$$

Her er $(\varphi^1(0), \varphi^2(0)) = (a^1, a^2)$, $(\varphi^1(l), \varphi^2(l)) = (b^1, b^2)$; videre er l kurvens længde og

$$(*) \qquad \forall t: \ \sum_{i,j} g_{ij}(\varphi^1(t), \varphi^2(t)) \frac{d\varphi^i}{dt} \frac{d\varphi^j}{dt} = 1.$$

Nu følger et stykke variationsregning (sml. Mat 102, 1977-78, p. 55.02-05). For vilkårlige $h^1, h^2 \in \mathscr{C}^2([0,l])$ med $h^1(0) = h^2(0) = h^1(l) = h^2(l) = 0$ vil

$$(u^1, u^2) = (\varphi^1(t) + \varepsilon h^1(t), \ \varphi^2(t) + \varepsilon h^2(t)), \quad t \in [0, l],$$

fremstille en to gange differentiabel kurve på fladen fra A til B for ethvert ε i et interval $[-c, c]$ omkring 0. Længden er

$$L(\varepsilon) = \int_0^l \sqrt{\sum_{i,j} g_{ij}(\varphi^1(t) + \varepsilon h^1(t), \varphi^2(t) + \varepsilon h^2(t)) \left(\frac{d\varphi^i(t)}{dt} + \varepsilon \frac{dh^i(t)}{dt}\right)\left(\frac{d\varphi^j(t)}{dt} + \varepsilon \frac{dh^j(t)}{dt}\right)} \, dt.$$

Da integranden $G(\varepsilon, t)$ har en kontinuert partiel afledet $\frac{\partial G}{\partial \varepsilon} = G'_\varepsilon(\varepsilon, t)$ i $[-c, c] \times [0, l]$, er $L(\varepsilon)$ differentiabel i $[-c, c]$ med

$$L'(\varepsilon) = \int_0^l G'_\varepsilon(\varepsilon, t) \, dt;$$

specielt er

$$L'(0) = \int_0^l G'_\varepsilon(0, t) \, dt.$$

Udregning giver

$$L'(0) = \int_0^l \frac{1}{2\sqrt{1}} \left(\sum_{i,j,k} \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} h^k(t) \frac{d\varphi^i}{dt} \frac{d\varphi^j}{dt} \ + \ 2 \sum_{i,j} g_{ij} \frac{d\varphi^i}{dt} \frac{dh^j}{dt} \right) dt,$$

hvor $\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}$ og g_{ij} tages i $(\varphi^1(t), \varphi^2(t))$. – Det er her, $(*)$ giver en forenkling.

Ved partiel integration findes

$$\int_0^l \left(g_{ik}\frac{d\varphi^i}{dt}\right)\frac{dh^k}{dt}\,dt = \left[g_{ik}\frac{d\varphi^i}{dt}h^k(t)\right]_{t=0}^{t=l} - \int_0^l \frac{d}{dt}\left(g_{ik}\frac{d\varphi^i}{dt}\right)h^k(t)\,dt,$$

hvor første led på højre side er $0-0=0$. Udtrykket for $L'(0)$ kan derfor omregnes til

$$\int_0^l \sum_{k=1}^2\left(\left\{\tfrac{1}{2}\sum_{i,j}\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}\frac{d\varphi^i}{dt}\frac{d\varphi^j}{dt} - \sum_i \frac{d}{dt}\left(g_{ik}\frac{d\varphi^i}{dt}\right)\right\}\cdot h^k(t)\right)dt.$$

Ifølge forudsætning er nu dette udtryk lig 0. Og da det er tilfældet for ethvert funktionspar $h^1, h^2 \in \mathcal{C}^2([0,l])$ med $h^1(0)=h^2(0)=h^1(l)=h^2(l)=0$, følger (sml. Mat 102, 1977-78, p. 55.04, lemma)

$$\tfrac{1}{2}\sum_{i,j}\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}\frac{d\varphi^i}{dt}\frac{d\varphi^j}{dt} - \sum_i\frac{d}{dt}\left(g_{ik}\frac{d\varphi^i}{dt}\right) = 0,\quad k=1,2,$$

dvs. $$-\tfrac{1}{2}\sum_{i,j}\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}\frac{d\varphi^i}{dt}\frac{d\varphi^j}{dt} + \sum_{i,j}\frac{\partial g_{ik}}{\partial u^j}\frac{d\varphi^j}{dt}\frac{d\varphi^i}{dt} + \sum_i g_{ik}\frac{d^2\varphi^i}{dt^2} = 0,\quad k=1,2.$$

Den midterste sum skrives $\frac{1}{2}\left(\sum_{i,j}\frac{\partial g_{ik}}{\partial u^j}\frac{d\varphi^i}{dt}\frac{d\varphi^j}{dt} + \sum_{i,j}\frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i}\frac{d\varphi^i}{dt}\frac{d\varphi^j}{dt}\right)$, hvorpå vi samler igen:

$$\tfrac{1}{2}\sum_{i,j}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}\right)\frac{d\varphi^i}{dt}\frac{d\varphi^j}{dt} + \sum_i g_{ki}\frac{d^2\varphi^i}{dt^2} = 0,\quad k=1,2.$$

Her genkendes Christoffel symbolet Γ_{ijk} (sætning 1, p. 4.4). De to ligninger kan altså skrives

$$\sum_{i,j}\begin{pmatrix}\Gamma_{ij1}\\ \Gamma_{ij2}\end{pmatrix}\frac{d\varphi^i}{dt}\frac{d\varphi^j}{dt} + \begin{pmatrix}g_{11} & g_{12}\\ g_{21} & g_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{d^2\varphi^1}{dt^2}\\ \frac{d^2\varphi^2}{dt^2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}.$$

Multiplikation med fundamentalmatricens inverse giver endelig

$$\frac{d^2\varphi^k}{dt^2} + \sum_{i,j}\Gamma_{ij}^k\frac{d\varphi^i}{dt}\frac{d\varphi^j}{dt} = 0,\qquad k=1,2,$$

hvilket viser, at (φ^1, φ^2) bestemmer en jævn geodætisk bevægelse på fladen (sætning 2, p. 4.14). Kurven er altså geodætisk, q.e.d.

Bemærkninger. Der findes ikke altid en korteste vej mellem to punkter på en flade (betragt f.eks. en plan, hvor et punkt er fjernet). På den anden side kan der være flere (således mellem nord- og sydpol på en kugleflade). – En geodætisk kurve fra A til B behøver ikke at være kortest mulig (betragt igen en kugleflade).

Mat 223, 1975 brev 4.20

Johann Bernoulli var den første, der så, at en korteste vej på en (konveks) flade fra A til B i hvert punkt med krumning $\varkappa \neq 0$ har oskulationsplan vinkelret på fladens tangentplan (1697). Hvorledes kom han på den tanke? Man kan tage som et fingerpeg, at han som "den simpleste, letteste og mest almene konstruktion" nævner "den mekaniske, nemlig at udspænde en tråd på den konvekse flade fra et givet punkt til et andet og stramme den fast til: derved vil den nemlig indtage den korteste beliggenhed mellem de to punkter." (1698. Opera omnia I, p. 264.) Johann Bernoulli kan nu have ræsonneret omtrent således: For et lille stykke af den spændte tråd, ved P, holdes træk efter tangenterne i endepunkterne i ligevægt af fladens reaktion. Da tangenterne (meget nær) ligger i oskulationsplanen i P (se bogen p. 80), medens reaktionen (meget nær) ligger på fladenormalen i P, ja, så må fladenormalen ligge i kurvens oskulationsplan.

Leonhard Euler fandt 1728 en differentialligning tilfredsstillet af en korteste vej og i 1736 den samme for banekurven for en inertibevægelse på en glat flade (jfr. p. 4.13). Dermed forelå det første matematiske bevis for sætning 5.

Geodætisk parallelforskydning.

Mellem vektorerne i tangentplanerne i to punkter A og B på en flade er der i almindelighed ikke nogen naturlig forbindelse. Derimod kan man, som vi skal se, på naturlig måde forskyde en vektor i tangentplanen i A langs en given kurve på fladen. (Levi-Cività, 1917.)

Lad en kurve på et to gange differentiabelt fladestykke være givet ved
$$(u^1,u^2) = (\varphi^1(t), \varphi^2(t)), \quad t \in I,$$
idet $\overrightarrow{OP}_{u^1,u^2} = \underline{r}(u^1,u^2)$, $(u^1,u^2) \in \Omega$, er en parameterfremstilling for fladestykket. Vi forudsætter $\varphi^1, \varphi^2 \in \mathscr{C}^1(I)$.

Er der for hvert $t \in I$ givet en vektor $\underline{p}(t)$ i fladens tangentplan i $P_{\varphi^1(t),\varphi^2(t)}$, taler man om et (tangent)vektorfelt langs kurven. Ved ligningen
$$\underline{p}(t) = \xi^1(t)\,\underline{r}_1'(\varphi^1(t),\varphi^2(t)) + \xi^2(t)\,\underline{r}_2'(\varphi^1(t),\varphi^2(t))$$
modsvares vektorfeltet af to funktioner $t \to \xi^1(t), \xi^2(t)$, $t \in I$. Man ser, at $t \to \underline{p}(t)$ er af klasse $\mathscr{C}^1$, hvis ξ^1 og ξ^2 er det. Det omvendte er også rigtigt, thi af
$$\begin{aligned} \underline{p}\cdot\underline{r}_1' &= g_{11}\xi^1 + g_{12}\xi^2 \\ \underline{p}\cdot\underline{r}_2' &= g_{21}\xi^1 + g_{22}\xi^2 \end{aligned} \qquad \text{følger} \qquad \begin{pmatrix}\xi^1\\ \xi^2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\underline{p}\cdot\underline{r}_1' \\ \underline{p}\cdot\underline{r}_2'\end{pmatrix}.$$

Ved en regning som på p. 4.11 findes da
$$\begin{aligned}\frac{d\underline{p}}{dt} = {} & \underline{r}_1'\Big(\frac{d\xi^1}{dt} + \Sigma_{i,j}\Gamma_{ij}^1\frac{d\varphi^j}{dt}\xi^i\Big) \\ & + \underline{r}_2'\Big(\frac{d\xi^2}{dt} + \Sigma_{i,j}\Gamma_{ij}^2\frac{d\varphi^j}{dt}\xi^i\Big) + \underline{n}\,\Sigma_{i,j}L_{ij}\frac{d\varphi^j}{dt}\xi^i.\end{aligned}$$

Hvis komponenten af $\frac{d\underline{p}}{dt}$ efter tangentplanen i $P_{\varphi^1(t),\varphi^2(t)}$ er $\underline{0}$ for hvert $t \in I$, siges vektorfeltet $t \to \underline{p}(t)$ at være et geodætisk parallelfelt langs kurven. – Begrebet er invariant over for et parameterskift $t = \psi(u)$, hvor $\psi \in \mathscr{C}^1(J)$ og $\psi'(u)$ aldrig er 0, idet $\frac{d\underline{p}}{du} = \frac{d\underline{p}}{dt}\frac{dt}{du}$.

Et vektorfelt $t \to \underline{p}(t)$ langs kurven er således et geodætisk parallelfelt, hvis og kun hvis (ξ^1, ξ^2) er løsning til det homogene lineære differentialligningssystem af første orden

$$(3)\quad \begin{aligned} &\frac{d\xi^1}{dt} + \Sigma_{i,j=1}^2 \Gamma_{ij}^1(\varphi^1(t),\varphi^2(t))\frac{d\varphi^j(t)}{dt}\xi^i = 0 \\ &\frac{d\xi^2}{dt} + \Sigma_{i,j=1}^2 \Gamma_{ij}^2(\varphi^1(t),\varphi^2(t))\frac{d\varphi^j(t)}{dt}\xi^i = 0 \end{aligned} \; .$$

Følgelig gælder (Mat 102, 1977-78, p. 52.02, sætning 1):

Sætning 6. Et geodætisk parallelfelt $t \to \underline{\rho}(t)$, $t \in I$, langs kurven er entydigt bestemt ved feltvektoren $\underline{\rho}(t_0)$ i et givet kurvepunkt P_{t_0}. Denne kan foreskrives vilkårligt i fladens tangentplan i P_{t_0}.

Vektorerne $\underline{\rho}(t)$ i det geodætiske parallelfelt langs kurven bestemt ved $\underline{\rho}(t_0) = \underline{\rho}_0$ siges at fremgå af vektoren $\underline{\rho}_0$ i tangentplanen i P_{t_0} ved (geodætisk parallel)forskydning langs kurven.

Bemærk, at begrebet er af indre geometrisk natur, i kraft af sætning 1 (p. 4.4).

Sætning 7. En to gange differentiabel kurve på fladen er en geodætisk kurve, hvis og kun hvis feltet af tangentenhedsvektorer er et geodætisk parallelfelt.

Thi antages $(u^1,u^2) = (\varphi^1(t),\varphi^2(t))$ at være en naturlig parameterfremstilling, er tangentenhedsvektoren

$$\underline{t}(t) = \frac{d\varphi^1(t)}{dt}\underline{r}_1'(\varphi^1(t),\varphi^2(t)) + \frac{d\varphi^2(t)}{dt}\underline{r}_2'(\varphi^1(t),\varphi^2(t)) .$$

Det er nu klart, at $(u^1,u^2) = (\varphi^1(t),\varphi^2(t))$ tilfredsstiller differentialligningerne (2) i sætning 2 (p. 4.14), hvis og kun hvis $(\xi^1,\xi^2) = (\frac{d\varphi^1(t)}{dt}, \frac{d\varphi^2(t)}{dt})$ tilfredsstiller (3).

Geodætisk krumning.

Vi betragter en to gange differentiabel kurve på et to gange differentiabelt fladestykke.

For et vilkårligt kurvepunkt P_0 er krumningen $\varkappa_g$ i P_0 af kurvens projektion på fladens tangentplan i P_0 (som vi om lidt skal se) en indre geometrisk størrelse. Den kaldes kurvens geodætiske krumning i P_0.

Idet kurvens tangent ligger i fladens tangentplan, er

$$\varkappa_g = \varkappa \cos\psi,$$

hvis kurven i P_0 har krumning $\varkappa > 0$. Her er ψ vinklen mellem tangentplanen og kurvens oskulationsplan. (Jfr. bogen p. 86.) Hvis $\varkappa = 0$, er også $\varkappa_g = 0$. – Specielt noteres (jfr. p. 4.16):

Kurven er geodætisk, hvis og kun hvis dens geodætiske krumning er 0 i hvert punkt.

At kurvens geodætiske krumning $\varkappa_g$ i P_0 er indre geometrisk, påviser vi ved at udtrykke $\varkappa_g$ ved hjælp af størrelser, vi allerede ved er indre geometriske (se specielt sætning 1, p. 4.4).

Lad som sædvanlig fladestykket være givet ved en parameterfremstilling, medens kurven tænkes givet på formen $(u^1, u^2) = (\varphi^1(t), \varphi^2(t))$, $t \in I$. Med kinematisk terminologi opfattes kurven altså som banekurve for en bevægelse.

Hastigheden $\quad v = v^1 r_1' + v^2 r_2'$

og projektionen $\quad w_g = w^1 r_1' + w^2 r_2'$

af accelerationen på fladens tangentplan til tiden t_0, hvor $P_0 = P_{\varphi^1(t_0), \varphi^2(t_0)}$, kan også opfattes som hastighed og acceleration i bevægelsens projektion på tangentplanen i P_0 (bogen p. 15). Følgelig er

$$\varkappa_g = \frac{|\underline{v} \times \underline{w}_g|}{|\underline{v}|^3}$$

Og da

$$\underline{v} \times \underline{w}_g = \Sigma_{i,j}\, v^i w^j \underline{r}_i' \times \underline{r}_j' = \begin{vmatrix} v^1 & v^2 \\ w^1 & w^2 \end{vmatrix} \underline{r}_1' \times \underline{r}_2' ,$$

finder vi, at $\sqrt{g}\begin{vmatrix} v^1 & v^2 \\ w^1 & w^2 \end{vmatrix} \Big/ (\Sigma_{i,j}\, g_{ij} v^i v^j)^{3/2}$,

dvs. $$\frac{\sqrt{g}}{(\Sigma_{i,j}\, g_{ij}\frac{d\varphi^i}{dt}\frac{d\varphi^j}{dt})^{3/2}} \cdot \begin{vmatrix} \frac{d\varphi^1}{dt} & \frac{d\varphi^2}{dt} \\ \frac{d^2\varphi^1}{dt^2} + \Sigma_{i,j}\Gamma^1_{ij}\frac{d\varphi^i}{dt}\frac{d\varphi^j}{dt} & \frac{d^2\varphi^2}{dt^2} + \Sigma_{i,j}\Gamma^2_{ij}\frac{d\varphi^i}{dt}\frac{d\varphi^j}{dt} \end{vmatrix} ,$$

er lig $\varkappa_g$ forsynet med et fortegn, + eller −.

Vi noterer:

<u>Den geodætiske krumning er bøjningsinvariant.</u>

Uden bevis (se f.eks. A. Goetz: Introduction to differential geometry, Addison/Wesley 1970, p. 244) skal vi til slut nævne, hvorledes den geodætiske krumning $\varkappa_g$ i P_0 naturligt kan karakteriseres indre geometrisk. For simpelheds skyld benyttes den naturlige parameterfremstilling for kurven med P_0 som udgangspunkt. Vi betegner med $\Theta(s)$ vinklen mellem kurvens tangentenhedsvektor $\underline{t}(s)$ i P_s og vektoren, der fås af $\underline{t}(0)$ ved geodætisk parallelforskydning langs kurven fra P_0 til P_s. (De to vektorer ligger begge i fladens tangentplan i P_s.) Der gælder da

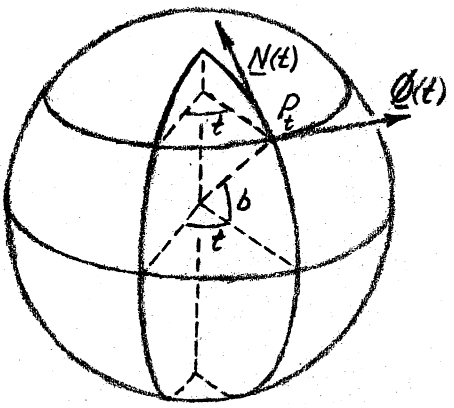
$$\frac{\Theta(s)}{|s|} \xrightarrow[s\to 0]{} \varkappa_g .$$

Det havde været naturligt at indføre begrebet geodætisk krumning ad denne vej. Det ville vort fladevæsen gøre.

20.3.75, GM

Øvelser

A.



En cirkel liggende på en kugleflade kan – med passende valg af geografiske koordinater – opfattes som en breddecirkel. Vi betegner dens bredde med b og bruger længden t som parameter.

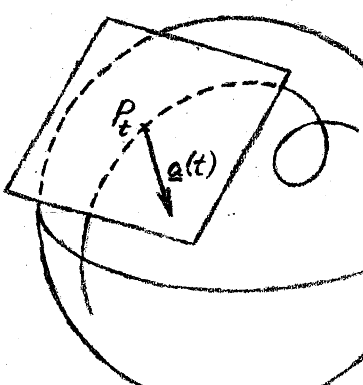
For hvert t lader vi $\underline{Ø}(t)$ og $\underline{N}(t)$ være enhedsvektorer i kuglens tangentplan i det til t svarende punkt P_t på cirkelen, således at $\underline{Ø}(t)$ er rettet mod øst og $\underline{N}(t)$ mod nord. (Vi skal senere diskutere begrebet tangentplan i et punkt af en flade. For en kugleflade er den vinkelret på radius, som således er fladens normal i punktet.)

Bestem $\frac{d\underline{Ø}}{dt}$ og $\frac{d\underline{N}}{dt}$ og vis, at deres projektioner på kuglefladens tangentplan i P_t er $\underline{N}(t)\sin b$ og $-\underline{Ø}(t)\sin b$

(Vink. Afsættes f.eks. $\underline{N}$ fra et fast punkt, og tolkes t som tiden, er $\frac{d\underline{N}}{dt}$ endepunktets hastighed.)

(Øvelse C er en fortsættelse.)

B. Geodætisk parallelforskydning langs kurve på kugleflade.



Lad $t \to P_t$, $t \in I$, være en parameterfremstilling for en differentiabel kurve og antag, at alle kurvepunkter ligger på en kugleflade. Videre er $\underline{a}(t)$ for hvert t en vektor i kuglefladens tangentplan i P_t. Man taler om et tangentvektorfelt på kuglefladen langs kurven. Vektorfunktionen $\underline{a}$ antages differentiabel.

Hvis $\frac{d\underline{a}}{dt}$ for hvert $t \in I$ ligger på kuglefladens normal i P_t, siges feltet at være et geodætisk parallelfelt på kuglefladen langs kurven, og vektorerne $\underline{a}(t)$ siges at fremgå af vektoren $\underline{a}(t_0)$ i kuglefladens tangentplan i P_{t_0} ved geodætisk parallelforskydning på kuglefladen langs kurven.

1° Vis, at et tilladeligt parameterskift for kurven er uden betydning for begrebet geodætisk parallelfelt.

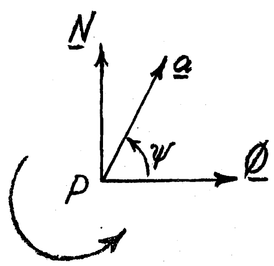
2° Vis, at længden af en vektor bevares ved geodætisk parallelforskydning.

3° Er $\underline{Ø}$ og $\underline{N}$ i øvelse A geodætiske parallelfelter på kuglefladen langs breddecirklen med bredde b ?

C. Geodætisk krumning af cirkel på kugleflade.

Fortsættelse af øvelse A.

1°



Bestem vinklen $\psi = \psi(t)$, – kompasretningen –, således at feltet af enhedsvektorer $\underline{a} = \underline{a}(t)$ er et geodætisk parallelfelt på kuglefladen langs breddecirklen med bredde b. – Se figuren. Vinklen ψ regnes med fortegn.

Breddecirklens tangent har retningen øst. Vinklen fra en parallelforskudt retning er $-\psi$. Størrelsen $\Delta(-\psi) = \psi(t) - \psi(t+\Delta t)$ kaldes derfor tangentens geodætiske drejning, medens $\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta(-\psi)}{\Delta s}$, hvor Δs er buelængden, er breddecirklens geodætiske krumning, $\varkappa_g$.

2° Vis, at den geodætiske tangentdrejning ved ét gennemløb af en cirkel med sfærisk radius α på en kugle med radius R er $2\pi \cos\alpha$, medens

$$\varkappa_g = \frac{1}{R} \cot\alpha .$$

3° Idet P_0 er et punkt på cirklen, skal man vise, at krumningen i P_0 af cirklens projektion på kuglens tangentplan i P_0 er lig $\varkappa_g$.

Geodætisk parallelforskydning langs og geodætisk krumning af en kurve på en flade vil blive taget op generelt i brev 4.21-24.

Mat 223, 1980 øvelsesblad 80,3

D. En kurve er givet ved parameterfremstillingen

$$x = t^2, \quad y = t^3, \qquad t \in [0, \infty[,$$

m.h.t. et sædv. retvinklet koordinatsystem XY i planen.

1° Vis, at kurven er differentiabel.

2° Undersøg, om kurven er to gange differentiabel.

3° Undersøg forholdet $\frac{\Delta\theta}{\Delta s}$ mellem tangentdrejning og buelængde langs kurven regnet fra begyndelsespunktet $O(0,0)$ ved grænseovergangen $\Delta s \to 0$.

E. Lad $t \to P_t$, $t \in I$, være parameterfremstilling for en to gange differentiabel kurve i rummet. Vis, at kurvens krumning i P_{t_0} er

$$\varkappa = \lim_{t \to t_0} \frac{\sphericalangle\, T_{t_0} T_t}{|\Delta s|} = \lim_{t \to t_0} \frac{\sphericalangle\, T_{t_0} T_t}{|\overrightarrow{P_{t_0} P_t}|} ,$$

hvor T_t er kurvens tangent i P_t og Δs dens buelængde fra P_{t_0}.

F. Lad $t \to P_t$, $t \in I$, være parameterfremstilling for en tre gange differentiabel kurve, hvis krumning i P_{t_0} ikke er 0. Vis, at kurvens numeriske torsion i P_{t_0} er

$$|\tau| = \lim_{t \to t_0} \frac{\sphericalangle\, \pi_{t_0} \pi_t}{|\Delta s|} = \lim_{t \to t_0} \frac{\sphericalangle\, \pi_{t_0} \pi_t}{|\overrightarrow{P_{t_0} P_t}|} ,$$

hvor π_t er kurvens oskulationsplan i P_t og Δs dens buelængde fra P_{t_0}.

G. 1° Tangenterne i alle punkter af en differentiabel kurve i rummet antages at være parallelle. Bevis, at kurven er en del af en ret linie.

2° En to gange differentiabel kurve i rummet antages at have krumningen 0 i hvert punkt. Bevis, at kurven er en del af en ret linie.

Mat 223, 1980 øvelsesblad 80,4

H. 1° Tangenterne i alle punkter af en differentiabel kurve antages at være vinkelrette på en fast retning givet ved en vektor $\underline{a} \neq \underline{0}$. Bevis, at kurven ligger i en plan vinkelret på $\underline{a}$.

2° En tre gange differentiabel kurve, hvis krumning er forskellig fra 0 i hvert punkt, antages at have torsionen 0 i hvert punkt. Bevis, at kurven ligger i en plan.

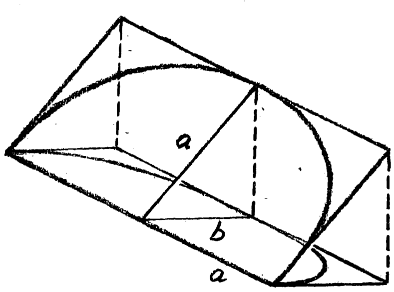
I. For en tre gange differentiabel kurve, hvis krumning er forskellig fra 0 i hvert punkt, er valgt en gennemløbsretning.

1° Hvad sker med $T, N, B, \varkappa, \tau$, når kurven spejles i en plan?

2° Vis, at torsionen er 0 i ethvert toppunkt for kurven, dvs. et kurvepunkt, hvor normalplanen er symmetriplan for kurven.

J. For hvilke planer gennem et punkt P på en tre gange differentiabel kurve med krumning $\neq 0$ og torsion $\neq 0$ har kurvens projektion på planen spids i P? vendepunkt i P? konvekspunkt i P?

K.



Find krumningen i toppunkterne af en ellipse med halvakser a og b, $a > b$, ved brug af sætningen om krumning af en projiceret kurve.

Mat 223, 1980 øvelsesblad 80,5

L. Givet et sædvanligt retvinklet koordinatsystem XYZ i rummet.

1° Vis, at afbildningen $\mu : (u,v) \to P_{u,v}$ givet ved

$$(x,y,z) = \begin{cases} (\ 1\ ,\ u\ ,\ v\ ) & \text{for } -1<u\leq 0\ ,\ -1<v<1 \\ (\cos u, \sin u, v) & \text{for } 0<u<3\pi,\ -1<v<1 \end{cases}$$

er parameterfremstilling for et differentiabelt fladestykke og beskriv dette geometrisk (tegn og forklar).

2° Er μ injektiv, dvs. er fladestykket uden dobbeltpunkter?

3° Lad her μ være defineret som i 1°, men kun for $-1<u<2\pi$, $-1<v<1$. Beskriv fladestykket geometrisk og gør rede for, at μ er injektiv. Er μ^{-1} kontinuert?

<u>Kurve på fladestykke.</u>

Lad $\mu : (u,v) \to P_{u,v}$, $(u,v)\in\Omega$, være en parameterfremstilling for et differentiabelt fladestykke. Når der tales om en „kurve på fladestykket", menes altid en kurve overført fra Ω.

En kurve i Ω fremstilles $t \to (\varphi(t), \psi(t))$, $t\in I$, med $(\varphi(t),\psi(t))\in\Omega$ for alle $t\in I$, hvor φ og ψ i det mindste er kontinuerte.

Den tilsvarende „kurve på fladestykket" kan naturligvis betragtes som en kurve i rummet, med fremstilling

$$t \to P_t = P_{\varphi(t),\psi(t)} = \mu(\varphi(t),\psi(t)),\ t\in I.$$

M. Betragt en kurve på et differentiabelt fladestykke. Den tænkes givet som netop beskrevet, ved

$$(u,v) = (\varphi(t), \psi(t)),\ t\in I,$$

hvor u,v er parametre på fladestykket og φ,ψ er kontinuerte funktioner.

Gør rede for, at en eventuel (halv)tangent til kurven i et kurvepunkt $P_{\varphi(t),\psi(t)}$ ligger i fladestykkets tangentplan i punktet.

Resultatet benyttes i eks. 9, linie 9 (p. 190 i bogen).

N. Fortsættelse af øvelse L. 3°.

Gør rede for, at punkterne på kurven givet ved

$$(x,y,z) = (\cos t, \sin t, 0), \quad -\tfrac{\pi}{2} < t < \tfrac{\pi}{2},$$

alle ligger på fladestykket, men at parameterfremstillingen ikke kan skrives

$$t \to \mu(\varphi(t), \psi(t)), \quad -\tfrac{\pi}{2} < t < \tfrac{\pi}{2},$$

med <u>kontinuerte</u> funktioner φ, ψ. Der er således <u>ikke</u> tale om en „kurve på fladestykket".

Man må altså ikke forveksle „kurve på fladestykke" med kurve, hvis punkter alle ligger på fladestykket. (Jf. eks. 9 i bogen: „Vi vil nu vise, at omvendt enhver ... <u>kurve på fladen</u> ... ")

Se dog øvelse O og P.

O. Lad $\mu: (u,v) \to P_{u,v}$, $(u,v) \in \Omega$, være en parameterfremstilling for et differentiabelt fladestykke og antag, at μ er injektiv med en invers, der er kontinuert, betragtet som afbildning fra en delmængde af rummet.

Vis, at en fremstilling af en kontinuert kurve i rummet, hvor alle kurvepunkter ligger på fladestykket, kan skrives

$$(u,v) = (\varphi(t), \psi(t)), \quad t \in I,$$

dvs. $$t \to P_{\varphi(t),\psi(t)} = \mu(\varphi(t), \psi(t)), \quad t \in I,$$

med <u>kontinuerte</u> φ, ψ.

Kurven kan altså opfattes som en „kurve på fladen".

P. Lad $\mu: (u,v) \to P_{u,v}$, $(u,v) \in \Omega$, være en parameterfremstilling for et differentiabelt fladestykke.

Vis, at ethvert $(u,v) \in \Omega$ har en omegn $\omega \subseteq \Omega$, således at restriktionen af μ til ω er injektiv med en invers, der er kontinuert, betragtet som afbildning fra en delmængde af rummet.

Vink: Se p. 181, eks. 3.

Mat 223, 1980 övelsesblad 80,7

Q. I hvert punkt P af et n gange differentiabelt fladestykke F uden dobbeltpunkter, $n \geq 2$, vælges en enhedsvektor $\underline{n}$ på fladenormalen, således at $\underline{n}$ varierer kontinuert (dvs. er en kontinuert funktion af parametrene i en parameterfremstilling for F).

Afbildningen $P \to N$ fra fladestykket F til en enhedskuglefladе S med centrum O, hvor N er givet ved $\overrightarrow{ON} = \underline{n}$, kaldes <u>den sfæriske normalafbildning</u> af F.

Vis, at det er en $\mathscr{C}^{n-1}$-afbildning fra F til S.

Vink: Som parametre på S kan man lokalt benytte to af koordinaterne i et sædvanligt retvinklet koordinatsystem XYZ.

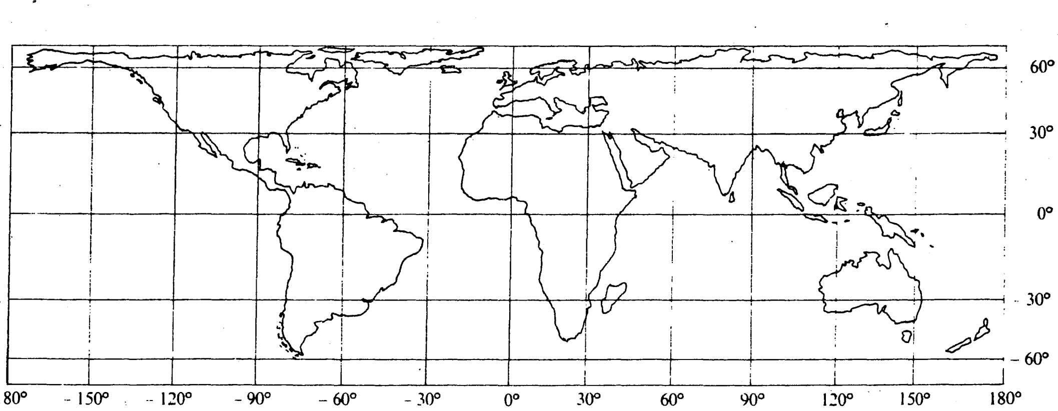
R. En kugleflade pånær „polerne" afbildes i omdrejningscylinderfladen, der rører langs „ækvator", således at punkt P og billedpunkt R ligger på samme halvlinie udgående fra cylinderaksen under ret vinkel.

1° Gør rede for, at afbildningen er en $\mathscr{C}^{\infty}$-diffeomorfi på en del af cylinderfladen.

2° Bestem afbildningens hovedretninger samt største og mindste målestoksforhold i hvert punkt P.

3° Vis, at afbildningen er <u>arealtro</u>. (Arkimedes.)

Ved udfoldning af cylinderfladen fås <u>Lamberts projektion</u> af kuglefladen (1772). – Den burde bære Archimedes navn.

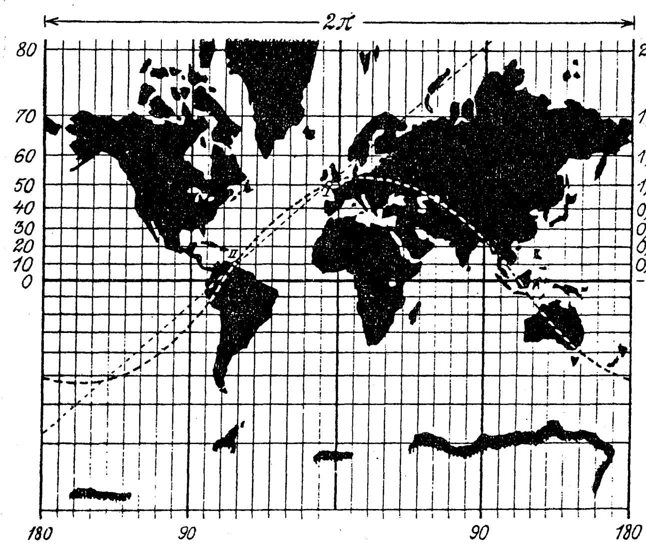


S. En enhedskugleflade, pånær „polerne", afbildes i omdrejningscylinderfladen, der rører langs „ækvator", således at punkt P og billedpunkt R ligger i samme halvplan afgrænset af cylinderaksen, og således at R's højde z over ækvators plan er givet ved P's bredde b, $z = f(b)$.

1° Bestem funktionen f, således at afbildningen er <u>vinkeltro</u>.

Ved udfoldning af cylinderfladen fås <u>Mercators projektion</u> af kuglefladen (1569), benyttet i (alle) søkort.

2° Gør rede for, at kurver på kuglefladen, hvis tangent har fast kompasretning, loxodromer, herved modsvarer rette linie(stykke)r.



På figuren er afbildet dels en loxodrom gennem I og II, dels storcirklen gennem de to punkter.

3° Find sammenhængen mellem (tilvækster i) buelængde og bredde for en loxodrom, hvis vinkel med nord-syd meridianerne er α.

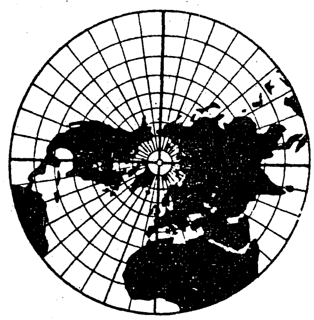
4° Vis, at man ved at følge en loxodrom, hvor $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, vil nærme sig en af polerne og samtidig passere enhver nord-syd meridian uendelig ofte. Gør rede for, at man ved at føje polerne til loxodromen får en kontinuert kurve, der har en buelængde, men ikke har (halv)tangent i endepunkterne.

Mat 223, 1980 øvelsesblad 80,9

T. En kugleflade pånær ét punkt S afbildes på tangentplanen i det diametralt modsatte punkt N, således at punkt P og billedpunkt R ligger på samme stråle fra S. (Stereografisk projektion.)

1° Gør rede for, at afbildningen er en $\mathscr{C}^\infty$-diffeomorfi.
(Vink. Benyt f.eks. længde og poldistance på kuglefladen og polære koordinater i planen.)

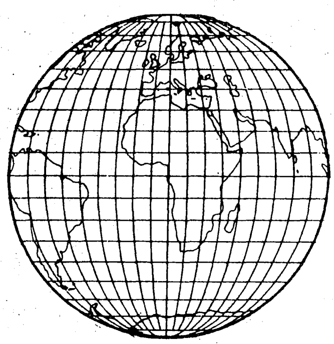
2° Vis, at stereografisk projektion er vinkeltro.



Af hensyn til pladsen viser figuren kun den nordlige halvkugle i stereografisk projektion.

U. Lad F være en halv enhedskugleflade, afgrænset af meridiancirkler med længde $l = \pm\frac{\pi}{2}$.
Der søges en diffeomorfi Φ af F til planen, således at

(i) billedmængden $\Phi(F)$ er en cirkelskive.
(ii) Φ afbilder (de halve) breddecirkler i parallelle korder.
(iii) Φ er arealtro.



Opgaven, stillet af en professor Schmidt i Giessen 1803, blev løst i 1805 af astronomen Karl Mollweide.

I øvelserne U og V behandler vi henholdsvis entydighed og eksistens.

Vis, at opgaven har höjst en lösning, – pånær flytning og spejling af cirkelskiven. (Entydighed.)

– – – – – – – – – –

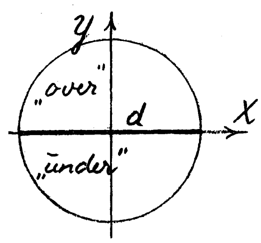
Hjælp. Hertil foretages en <u>analyse</u>: Man <u>tænker</u> <u>sig</u> en afbildning Φ som önsket, påviser egenskaber ved den og söger at nå frem til en karakterisering.

F. eks. i fölgende trin:

(a) Cirkelskivens radius er $\sqrt{2}$.

(b) (Den halve) ækvator afbildes på en diameter d, den nordlige og sydlige del af halvkuglen på hver sin halvcirkel, lad os sige „over" og „under" d.

(c) De to dele, hvori en (halv) breddecirkel deler halvkuglen, den nordlige og den sydlige, afbildes henholdsvis over og under den tilsvarende korde. Bæltet mellem ækvator og breddecirkel afbildes på området mellem diameter og korde.

(d) 

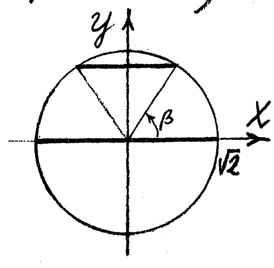
Ved brug af et koordinatsystem XY som vist udtrykkes Φ ved

$$x = f(\ell, b)$$
$$y = g(b) \quad ,$$

hvor ℓ, b er længde, bredde på halvkuglen.

(e) Med $y = \sqrt{2}\sin\beta$, $-\frac{\pi}{2} < \beta < \frac{\pi}{2}$, gælder

$$(*) \quad 2\beta + \sin 2\beta = \pi \sin b .$$



(f) Funktionen $\chi : t \to 2t + \sin 2t$, $t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, er af klasse $\mathcal{C}^\infty$, med $\chi'(t) > 0$ og værdimængde $]-\pi, \pi[$.

(g) Vi har så $\quad y = \sqrt{2}\sin\beta$ med $\beta = \chi^{-1}(\pi \sin b)$,

altså $\quad g(b) = \sqrt{2}\sin \chi^{-1}(\pi \sin b)$.

(h) Endvidere $\quad 4\cos^2\beta \, \frac{d\beta}{db} = \pi \cos b .$

(j) Afbildningen μ af parameterområdet $\Omega =]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\times]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ på halvkuglefladen har i (l,b) arealforholdet $\cos b$.

(k) Afbildningen $\Phi\circ\mu$ af parameterområdet Ω på cirkelskiven har i (l,b) arealforholdet

$$\left|\frac{\partial x}{\partial l}\cdot\frac{\partial y}{\partial b} - \frac{\partial x}{\partial b}\cdot 0\right| = \left|\frac{\partial x}{\partial l}\right|\cdot\sqrt{2}\cos\beta\,\frac{d\beta}{db}.$$

(l) $\frac{\partial x}{\partial l} = f_l'(l,b) = \pm\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\cos\beta$ (samme fortegn overalt).

(m) $x = f(l,b) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} l\cos\beta$, efter evt. omorientering af X-aksen. (Hvorfor ikke et led $c(b)$?)

Resultat: <u>Hvis</u> der findes en afbildning Φ som ønsket, kan den ved brug af et sædvanligt retvinklet koordinatsystem XY udtrykkes

$$x = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} l\cos\beta$$
$$y = \sqrt{2}\sin\beta \quad ,$$

hvor l, b er længde, bredde, og $\beta \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ er givet ved (*).
Dette viser entydigheden.

NB. En <u>analyse</u> – hvor man jo starter med at <u>tænke sig</u> en løsning – kan aldrig være et eksistensbevis. – (Men den kan evt. udpege en kandidat som den eneste mulighed.)

V. <u>Mollweides projektion</u>. (1805).

–2° Vis (f) i øvelse U.

Relationen $\quad (*)\ 2\beta + \sin 2\beta = \pi\sin b$

fastlægger da $\beta \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ som $\mathcal{C}^\infty$-funktion af $b \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$,
$\beta = \chi^{-1}(\pi\sin b)$.

–1° Vis, at $\quad 4\cos^2\beta\,\frac{d\beta}{db} = \pi\cos b$.

En enhedskugleflade, pånær meridianen med længde $l = \pm\pi$, afbildes i en plan. Afbildningen Φ er givet ved

Mat 223, 1980 øvelsesblad 80,12

$$x = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} l \cos\beta$$
$$y = \sqrt{2} \sin\beta \quad ,$$

hvor l, b er længde, bredde på kuglefladen, og $\beta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ er givet som funktion af b ved relationen (*), medens x, y er sædvanlige retvinklede koordinater i planen.

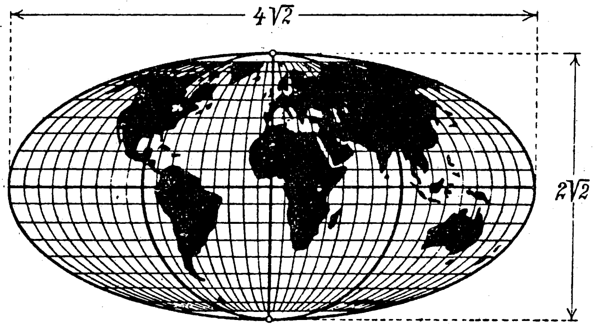
1° Bestem billedet ved Φ af

meridianen med given længde l.

halvkuglefladen F givet ved $-\frac{\pi}{2} < l < \frac{\pi}{2}$.

hele kuglefladen, pånær meridianen $l = \pm\pi$.

breddecirklen med given bredde b.



2° Gør rede for, at Φ er en diffeomorfi på billedmængden.

3° Vis, at Φ er arealtro.

(Vink. Vis, at μ og $\Phi \circ \mu$ har samme arealforhold i hvert $(l, b) \in \Omega$, hvor μ er afbildningen af parameterområdet $\Omega =]-\pi, \pi[\times]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ på kuglefladen. Her kan -1° komme til nytte.)

4° Gør rede for, at restriktionen $\Phi|_F$ er en løsning på professor Schmidts problem i øvelse U. (Og altså den eneste, når resultatet der tages i betragtning.)

X. Vis, at en diffeomorfi Φ af et fladestykke F_1 på et fladestykke F_2, som er både vinkeltro og arealtro, er en bøjning.

(Et landkort kan således ikke være både vinkeltro og arealtro, idet det vises i brev 4, at intet stykke af en kugleflade kan udfoldes.)

Mat 223, 1980 Øvelsesblad 80,13

Y. <u>Rumkurvers</u> <u>tangentflader</u>.

En to gange differentiabel kurve k, hvis krumning $\varkappa$ er forskellig fra 0 i hvert punkt, tænkes givet ved naturlig parameterfremstilling $\vec{OA} = \underline{a}(u)$, $u \in I$. Enhedsvektoren på den positive halvtangent T^+ betegnes $\underline{t}$.

Når A gennemløber kurven k, beskriver tangenten T en flade kaldet kurvens <u>tangentflade</u>. Vi betragter den del F af fladen, der beskrives af T^+, idet A ikke medregnes.

1° Udtryk stedvektoren $\vec{OP} = \underline{p}(u,v)$ til punktet $P = P_{u,v}$ på kurvetangenten T^+ i $A = A_u$, hvor AP har længden v.

2° Vis, at F er et differentiabelt fladestykke. Bestem tangentplanen i hvert punkt P på F og beskriv dens beliggenhed i forhold til kurven.

Lad ligeledes $\vec{OB} = \underline{b}(u)$, $u \in I$, være naturlig parameterfremstilling for en kurve l, med tilsvarende forudsætninger som ovenfor, og lad Φ afbilde F på den tilsvarende halvtangentflade G, således at billedet $R = \Phi(P)$ af et punkt P på den positive halvtangent til k i $A = A_u$ ligger på den positive halvtangent til l i $B = B_u$, og $AP = BR$. (Vi bekymrer os ikke om dobbeltpunkter på fladerne.)

3° Begrund, at Φ er en diffeomorfi, og vis, at Φ er en bøjning, hvis og kun hvis de to kurver i tilsvarende punkter har samme krumning.

4° Som eksempel lader vi her k være en skruelinie givet i sædvanlige retvinklede koordinater ved

$$x = \cos\frac{u}{\sqrt{2}}, \quad y = \sin\frac{u}{\sqrt{2}}, \quad z = \frac{u}{\sqrt{2}}, \qquad u \in \mathbb{R}.$$

Find en parameterfremstilling for den korteste kurve på fladen F beskrevet af den positive halvtangent, der forbinder punkterne svarende til $(u,v) = (0,4)$ og $(u,v) = (\pi,2)$.

(Vink. Udfold F i $\xi\eta$-planen, og udtryk afbildningen i koordinater (u,v) og (ξ,η).)

Mat 223, 1975 øvelsesblad 14

I de følgende øvelser benyttes betegnelserne fra brev 4. Dog kaldes parametrene u, v i stedet for u^1, u^2; – ved konkrete udregninger kan der ellers være en vis risiko for fejl ved forveksling af indices og eksponenter.

Z. På et to gange differentiabelt fladestykke givet ved en parameterfremstilling $\overrightarrow{OP}_{u,v} = \underline{r}(u,v)$ skærer parameterkurverne hinanden under ret vinkel. Vis, at

$$\Gamma_{11}^{1} = \frac{1}{2g_{11}}\frac{\partial g_{11}}{\partial u}, \qquad \Gamma_{12}^{1} = \Gamma_{21}^{1} = \frac{1}{2g_{11}}\frac{\partial g_{11}}{\partial v}, \qquad \Gamma_{22}^{1} = -\frac{1}{2g_{11}}\frac{\partial g_{22}}{\partial u},$$

$$\Gamma_{11}^{2} = -\frac{1}{2g_{22}}\frac{\partial g_{11}}{\partial v}, \qquad \Gamma_{12}^{2} = \Gamma_{21}^{2} = \frac{1}{2g_{22}}\frac{\partial g_{22}}{\partial u}, \qquad \Gamma_{22}^{2} = \frac{1}{2g_{22}}\frac{\partial g_{22}}{\partial v}.$$

Æ. Geodætiske kurver på en omdrejningsflade. Clairauts sætning.

Betragt en omdrejningsflade fremkommet ved, at en to gange differentiabel kurve i XZ-planen, givet ved naturlig parameterfremstilling

$$x = f(u) > 0, \quad z = h(u),$$

drejes om Z-aksen. Som parametre benyttes u og drejningsvinklen v. (Se bogen §34 og §43, spec. fig. 89 og fig. 105.)

1° Gør (gerne ved geometriske betragtninger) rede for, at $\underline{r}''_{11}(u,v)$ ligger på fladenormalen i $P_{u,v}$, at $\underline{r}''_{22}(u,v)$ er vektoren fra $P_{u,v}$ vinkelret ind til omdrejningsaksen, og at

$$\underline{r}''_{12}(u,v) = \frac{df(u)}{du}\,\frac{\underline{r}'_2(u,v)}{f(u)}.$$

Vis videre, at $\Gamma_{22}^{1} = -f\frac{df}{du}$ og $\Gamma_{12}^{2} = \Gamma_{21}^{2} = \frac{1}{f}\frac{df}{du}$, medens de øvrige Christoffel symboler af anden art er identisk 0.

Opstil endelig differentialligningerne for en jævn geodætisk bevægelse på fladen.

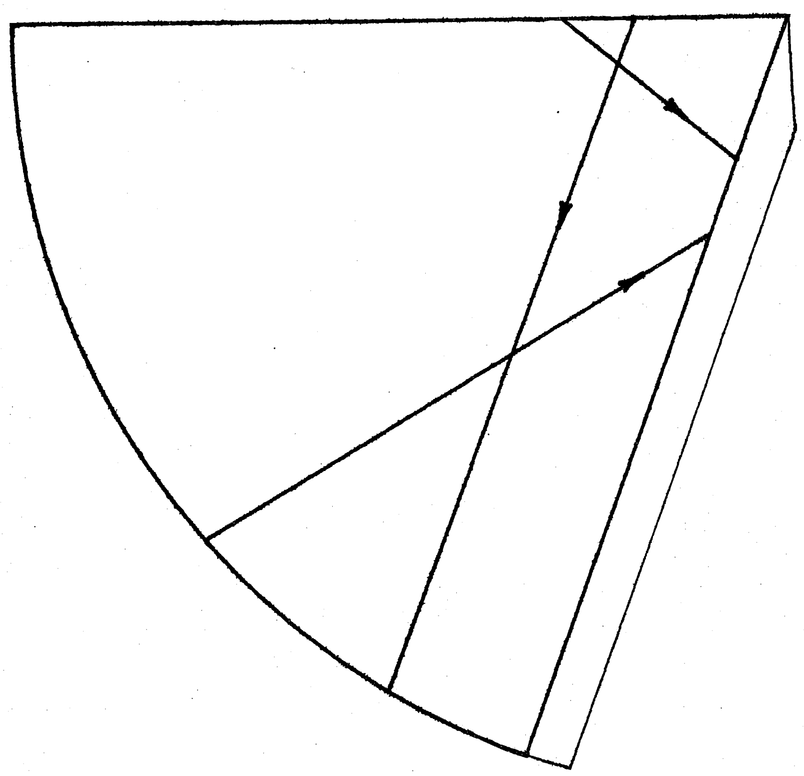
2° Løs opgave 173 i bogen (Alexis Claude Clairaut 1733). –

(Vink. Benyttes naturlig parameterfremstilling, er

$$r \sin\theta = \underline{r}_2' \cdot (\underline{r}_1' \frac{du}{ds} + \underline{r}_2' \frac{dv}{ds}) = r^2 \frac{dv}{ds} .)$$

3° Vis omvendt, at en to gange differentiabel kurve på omdrejningsfladen er geodætisk, hvis $r \sin\theta$ er konstant langs kurven, uden at vinklen θ er ret langs nogen delkurve.

Til illustration et kræmmerhus i modelkarton, med en geodætisk kurve indtegnet:



Ø. <u>Den ikke-euklidiske plan.</u>

Antag en tre gange differentiabel flade givet ved en parameterfremstilling med halvplanen $\Omega = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid v > 0\}$ som parameterområde og antag, at fundamentalmatricen er

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{v^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{v^2} \end{pmatrix} .$$

Mat 223, 1975 øvelsesblad 16

1° Vis, at $\Gamma_{11}^{1} = 0$, $\Gamma_{12}^{1}(u,v) = \Gamma_{21}^{1}(u,v) = -\frac{1}{v}$, $\Gamma_{22}^{1} = 0$

$\Gamma_{11}^{2}(u,v) = \frac{1}{v}$, $\Gamma_{12}^{2} = \Gamma_{21}^{2} = 0$, $\Gamma_{22}^{2}(u,v) = -\frac{1}{v}$.

2° Vis, at den ved

$$(u,v) = (a + r\cos t,\ r\sin t), \quad t \in]0,\pi[,$$

givne kurve på fladen er geodætisk, for hvert $a \in \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{R}_+$.
(Vink. Se udtrykket for κ_g, brev 4.24.)

3° Bestem samtlige kurver i halvplanen Ω, der svarer til geodætiske kurver på fladen.

4° Vis, at parameterintervallet ved naturlig parameterfremstilling af en vilkårlig (maksimal) geodætisk kurve på fladen er hele $\mathbb{R}$. (Man siger, at fladen er fuldstændig.)

5° Vis, at der gennem hvert punkt på fladen, der ikke ligger på en given geodætisk kurve, går et bundt af geodætiske kurver, der ikke skærer den givne.

Bemærkning. En beregning (jfr. brev 4.9) vil vise, at fladens krumningsmål er konstant lig -1.
I det tredimensionale rum findes der imidlertid slet ikke nogen fuldstændig flade med konstant krumning -1, et berømt resultat af David Hilbert (1901). Insisterer man på den fulde halvplan som parameterområde, er øvelsen således i virkeligheden indholdsløs. (Ellers kan henvises til pseudosfæren, jfr. bogen p. 241.) - Det indre geometriske synspunkt i studiet af flader i rummet førte imidlertid Bernhard Riemann til et mere alment begreb, Riemann mangfoldigheder eller Riemann rum (1854). I den ramme kan halvplanen Ω med den givne fundamentalmatrix betragtes som et (vinkeltro) landkort over den ikke-euklidiske plan.

Københavns universitet

Naturvidenskabelig embedseksamen

Sommeren 1974

MATEMATIK 223. Kurver og flader i rummet.

Opgaver til besvarelse i 2 timer.

Hjælpemidler kan *ikke* medbringes.

Opgave nr. 1

Betragt en tre gange differentiabel rumkurve, hvis krumning κ er forskellig fra 0 i hvert punkt. Torsionen betegnes τ. Der vælges en gennemløbsretning, og enhedsvektorerne på tangent, hovednormal og binormal betegnes $\underline{t}$, $\underline{n}$ og $\underline{b}$.

1° Det antages her, at kurvens tangenter alle danner samme vinkel φ, $0 < \varphi < \pi$, med en fast retning givet ved enhedsvektoren $\underline{e}$.

Vis, at kurvens hovednormaler alle står vinkelret på $\underline{e}$, og gør rede for, at

$$\underline{e} = \underline{t} \cos \varphi \pm \underline{b} \sin \varphi ,$$

hvor der enten læses $+$ for alle kurvepunkter eller $-$ for alle kurvepunkter.

Vis videre, at

$$\frac{\tau}{\kappa} = \pm \cot \varphi .$$

2° Her antages omvendt, at $\frac{\tau}{\kappa}$ er konstant langs kurven. Vis, at kurvens tangenter alle danner samme vinkel med en fast retning.

(Opgavesættet fortsættes)

Københavns universitet
Matematik 223
Sommeren 1974

2

Opgave nr. 2

Med κ_T betegnes krumningen af normalsnittet med en given tangentretning T i et punkt P på en to gange differentiabel flade. Det forudsættes, at κ_T er forskellig fra 0. Betragt en to gange differentiabel kurve på fladen, der går gennem P, ligeledes med tangentretning T. Kurvens krumning i P betegnes κ.

1° Gør rede for, at sidstnævnte kurve har en oskulationsplan i P, og at denne er forskellig fra fladens tangentplan i P.

2° Bevis, at

$$\kappa = \frac{|\kappa_T|}{\cos\varphi} ,$$

hvor φ er vinklen mellem kurvens oskulationsplan og normalsnittets plan. (Meusnier 1776.)

(Vink, til begge spørgsmål: Idet man benytter parameterfremstillinger for flade og kurver, kan man med fordel for hver kurve betragte projektionen af $\underline{r}''_{t^2}$ på fladenormalen.)

Ved bedømmelsen tillægges de to opgaver samme vægt.

2 formelblade er vedhæftet.

KØBENHAVNS UNIVERSITET

Naturvidenskabelig embedseksamen

Sommeren 1975

MATEMATIK 223. Kurver og flader i rummet.

Opgaver til besvarelse i 2 timer.

Hjælpemidler kan ikke medbringes.

Opgave nr. 1

Betragt en tre gange differentiabel kurve, hvis krumning er forskellig fra 0 i hvert punkt.

1° Antag her, at kurvens tangenter alle er vinkelrette på en fast retning givet ved en vektor $\underline{a} \neq \underline{0}$. Bevis da, at kurven ligger i en plan vinkelret på $\underline{a}$.

2° Antag her, at kurven har torsionen 0 i hvert punkt. Bevis da, at kurven ligger i en plan.

3° Antag her, at kurvens oskulationsplaner alle går gennem et fast punkt O, som ikke ligger på nogen tangent. Bevis da, at kurven ligger i en plan.

(Vink: Man kan benytte 2°.)

Opgave nr. 2

Udled Eulers formel for normalsnitkrumningens variation med tangentretningen i et punkt på en flade.

(Opgaven fortsættes)

KØBENHAVNS UNIVERSITET

Naturvidenskabelig embedseksamen, sommeren 1975

Matematik 223.

(Forudsætninger og resultat bør formuleres præcist. Der bør gives en karakterisering af hovedkrumninger og af hovednormalsnit.)

Ved bedømmelsen tillægges de to opgaver samme vægt.

2 formelblade er vedhæftet.

Københavns universitet

Naturvidenskabelig embedseksamen

Sommeren 1976

MATEMATIK 223. Kurver og flader i rummet.

Opgave til besvarelse i 2 timer.

Hjælpemidler kan ikke medbringes.

En besvarelse regnes for fuldstændig, hvis 7 af de 9 spørgsmål er besvaret korrekt.

Lad

$$\overrightarrow{OA_u} = \underline{a}(u), \quad u \in I,$$

være naturlig parameterfremstilling for en 4 gange differentiabel kurve og antag

$$\forall u \in I: 0 < \kappa(u) < {}^1/_\rho ,$$

hvor $\kappa = \kappa(u)$ er krumningen, og ρ er et fast positivt tal. Tangent-, hovednormal- og binormalvektor betegnes henholdsvis $\underline{t} = \underline{t}(u)$, $\underline{n} = \underline{n}(u)$ og $\underline{b} = \underline{b}(u)$.

1° Opskriv Frenets formler, uden begrundelse.

2° Gør rede for, at

$$\overrightarrow{OP_{u,v}} = \underline{r}(u,v) = \underline{a}(u) + \underline{n}(u)\rho\cos v + \underline{b}(u)\rho\sin v$$

er parameterfremstilling for et 2 gange differentiabelt fladestykke, idet $\Omega = I \times]-\pi,\pi[$ benyttes som parameterområde.

3° Beskriv fladen geometrisk.

(Vink: Begynd med parameterkurven svarende til et fastholdt u.)

(Opgaven fortsættes)

4^o For hvert $(u,v) \in \Omega$ skal man vise, at A_u ligger på fladenormalen i $P_{u,v}$.

(Bemærk til senere brug, at enhedsvektor på fladenormalen er $\underline{p}(u,v) = -\underline{n}(u)\cos v - \underline{b}(u)\sin v$.)

5^o Find arealforholdet i $(u,v) \in \Omega$ for afbildningen af parameterområdet på fladen.

6^o Vis, at fladens krumningsmål i $P_{u,v}$ er

$$\frac{-\kappa(u)\cos v}{\rho(1-\rho\kappa(u)\cos v)} .$$

7^o I hvilke punkter $P_{u,v}$ er fladen henholdsvis parabolsk, hyperbolsk og elliptisk krummet ?

8^o Vis, at hver parameterkurve svarende til fastholdt u er en krumningskurve på fladen.

(Vink: Se formelsamling.)

9^o Angiv tangentretningerne for hovednormalsnittene og bestem hovedkrumningerne i hvert punkt $P_{u,v}$ på fladen.

To formelblade er vedhæftet.

Københavns Universitet

Naturvidenskabelig embedseksamen

Sommeren 1977

MATEMATIK 223. Kurver og flader i rummet.

Opgave til besvarelse i 2 timer.
Hjælpemidler kan ikke medbringes.

Lad $(O,\underline{i},\underline{j},\underline{k})$ være et sædvanligt retvinklet højrekoordinatsystem i rummet og sæt

$$\underline{R}(v) = \underline{i}\cos v + \underline{j}\sin v , \quad v \in \mathbb{R} .$$

Det kan måske lette besvarelsen tillige at sætte

$$\underline{N}(v) = -\underline{i}\sin v + \underline{j}\cos v , \quad v \in \mathbb{R} .$$

1° Gør rede for, at

$$\overrightarrow{OP}_{u,v} = \underline{r}(u,v) = u\underline{R}(v) + v\underline{k} , \quad (u,v) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} ,$$

er parameterfremstilling for en vilkårlig ofte differentiabel flade. Beskriv parameterkurverne gennem et vilkårligt punkt $P_{a,b}$ på fladen. Tegn på en skitse stykker af parameterkurverne gennem $P_{1,\frac{\pi}{4}}$ tilligemed $\underline{r}'_u(1,\frac{\pi}{4})$ og $\underline{r}'_v(1,\frac{\pi}{4})$.

2° Gør rede for, at parameterkurven gennem $P_{a,b}$ svarende til fast u har en oskulationsplan i $P_{a,b}$, og vis, at den falder sammen med fladens tangentplan i $P_{a,b}$.

(Opgaven fortsættes)

3^o Beskriv det sfæriske normalbillede (dvs. billedet ved den sfæriske normalafbildning) af fladestykket svarende til området $]0,1[\times]0,2\pi[$ i UV-planen. Der ønskes en præcis angivelse af art, udstrækning og beliggenhed på kuglefladen.

(Vink: Opskriv først en parameterfremstilling for normalbilledet.)

4^o Vis, at målestoksforholdet i $P_{a,b}$ ved den sfæriske normalafbildning af fladen er det samme i alle tangentretninger.

(Vink: Man kan f.eks. begynde med retningerne givet ved $\underline{r}'_u(a,b)$ og $\underline{r}'_v(a,b)$.)

5^o Find fladens krumningsmål i $P_{a,b}$.

6^o Vis, at fladens normalsnit i $P_{a,b}$ i parameterkurvernes tangentretninger begge har krumningen 0 i $P_{a,b}$. Angiv tangentretningerne for fladens hovednormalsnit i $P_{a,b}$ og find hovedkrumningerne i $P_{a,b}$.

To formelblade er vedhæftet.

Københavns Universitet

Naturvidenskabelig embedseksamen

Sommeren 1978

MATEMATIK 223. Kurver og flader i rummet.

Opgaver til besvarelse i 2 timer.
Hjælpemidler kan ikke medbringes.

Opgave nr. 1

1° Lad κ være krumningen og κ_g den geodætiske krumning i et punkt P_0 af en to gange differentiabel kurve på et to gange differentiabelt fladestykke, og lad κ_n være krumningen i P_0 af normalsnittet i fladen svarende til kurvens tangent i P_0.

Vis, at

$$\kappa_n^2 + \kappa_g^2 = \kappa^2.$$

2° Find κ, κ_g og κ_n for et punkt P_0 af en parallelcirkel på en omdrejningskegleflade, når keglens halve åbningsvinkel er 30°, og afstanden fra P_0 til toppunktet er 6.

3° En cirkelskive med radius 2 bøjes på ovennævnte kegleflade (om man vil: klæbes på som etiket), således at randkurven rører parallelcirkelen i det betragtede punkt P_0 og i øvrigt ligger på den side af parallelcirkelens plan, der vender bort fra keglens toppunkt.

Bestem den omtalte randkurves krumning, oskulationsplan og hovednormal i punktet P_0.

Opgavesættet fortsættes

Opgave nr. 2

1° Beskriv den sfæriske normalafbildning af et to gange differentiabelt fladestykke og angiv Gauss' definition af fladestykkets krumningsmål K i et punkt P_0.

2° Idet fladestykket tænkes givet ved en parameterfremstilling

$$\overrightarrow{OP}_{u,v} = \underline{r}(u,v) , \quad (u,v) \in \Omega ,$$

hvor P_0 svarer til (u_0,v_0), skal man udlede en andengradsligning med koefficienter udtrykt ved E, F, G, L, M og N, taget i (u_0,v_0), til bestemmelse af hovedkrumningerne κ_1 og κ_2 i P_0.

Som udgangspunkt kan man tage formlen for krumning af normalsnit udtrykt ved første og anden fundamentalform.

3° Bevis, at

$$K = \kappa_1 \kappa_2 ,$$

idet K tænkes indført ved Gauss' definition.

– – – – – – – – – –

Ved bedømmelsen tillægges de to opgaver samme vægt.

To formelblade er vedhæftet

Københavns Universitet
Matematik 223
Sommeren 1979

Naturvidenskabelig embedseksamen

Sommeren 1979

MATEMATIK 223. Kurver og flader i rummet.

Opgave til besvarelse i 2 timer.

Hjælpemidler kan ikke medbringes.

En besvarelse regnes for fuldstændig, hvis 8 af de 9 spørgsmål er besvaret korrekt.

Lad $\overrightarrow{OA} = \underline{a}(u)$, $u \in I$, være naturlig parameterfremstilling for en fire gange differentiabel kurve k, hvis krumning κ er forskellig fra 0 i hvert punkt. Torsionen betegnes τ, og enhedsvektorerne på tangent T, hovednormal N og binormal B betegnes $\underline{t}$, $\underline{n}$ og $\underline{b}$.

1° Opskriv Frenets formler, uden begrundelse.

Når A gennemløber kurven k, beskriver binormalen B en flade F_1, der kaldes kurvens *binormalflade*. Stedvektoren til et vilkårligt punkt P på fladen kan skrives

$$\overrightarrow{OP} = \underline{r}(u,v) = \underline{a}(u) + v\,\underline{b}(u) .$$

2° Gør rede for, at $\overrightarrow{OP} = \underline{r}(u,v)$, $(u,v) \in I \times \mathbb{R}$, er parameterfremstilling for et to gange differentiabelt fladestykke.

3° Beskriv parameterkurven svarende til et vilkårligt fastholdt u. Vis, at de to parameterkurver gennem et vilkårligt punkt $P = P_{u,v}$ på fladen skærer hinanden under ret vinkel.

4° Bestem binormalfladens tangentplan i et vilkårligt punkt A på kurven k og vis, at k er en geodætisk kurve på binormalfladen.

Opgaven fortsættes

5° Beregn Gauss' krumningsmål K i et vilkårligt punkt på binormalfladen. (Vink: Find først koefficienten N i anden fundamentalform.) - I hvilke punkter er fladen hyperbolsk, henholdsvis parabolsk krummet ?

\- - - - - - -

En kurve l er i et sædvanligt retvinklet koordinatsystem XYZ givet ved

$$x = f(v) = \sqrt{1+v^2}\,, \quad y = 0\,, \quad z = h(v) = \log(v + \sqrt{1+v^2})\,, \quad v \in \mathbb{R}\,.$$

6° Vis, at parameterfremstillingen er naturlig.

7° Bestem fundamentalmatricen (eller første fundamentalform) for omdrejningsfladen F_2, der fremkommer ved, at kurven l drejes om Z-aksen. Som parametre benyttes drejningsvinklen u og kurveparameteren v.

\- - - - - - -

Fra nu af forudsættes, at den tidligere betragtede kurve k har længden 2π, og at dens torsion τ er konstant.

8° Antag her $|\tau| = 1$ og vis da, at binormalfladen F_1 for k kan bøjes på omdrejningsfladen F_2, således at k går over i enhedscirklen i XY-planen, og k's binormaler går over i meridiankurverne.

9° Antag her $|\tau| < 1$ og vis da, at binormalfladen F_1 for k kan bøjes på en omdrejningsflade.

To formelblade er vedhæftet

Københavns Universitet
Matematik 223
Sommeren 1980

Naturvidenskabelig embedseksamen

Sommeren 1980

Matematik 223. Kurver og flader i rummet.

Opgaver til besvarelse i 2 timer.
Hjælpemidler kan ikke medbringes.

Lad O være et punkt på en to gange differentiabel flade.

Der vælges et sædvanligt retvinklet højrekoordinatsystem XYZ med begyndelsespunkt O, således at XY-planen falder sammen med fladens tangentplan i O. Et stykke F af fladen omkring O kan da fremstilles

$$\overrightarrow{OP}_{x,y} = \underline{r}(x,y) = x\underline{i} + y\underline{j} + f(x,y)\underline{k}\ , \qquad (x,y) \in \Omega\ ,$$

hvor $f: \Omega \rightsquigarrow \mathbb{R}$ er en funktion af klasse $\mathscr{C}^2$, defineret på et område Ω i XY-planen, medens $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ er koordinatsystemets grundvektorer.

1^0 Opstil en ligning for tangentplanen i et vilkårligt punkt P_{x_0,y_0} på fladestykket F. Gør rede for, at

$$f(0,0) = f'_x(0,0) = f'_y(0,0) = 0\ .$$

2^0 Med κ_T betegnes krumningen i O af normalsnittet til F i O med tangentretning T i XY-planen. Udled en formel for κ_T udtrykt ved

$$r = f''_{x^2}(0,0)\,,\ s = f''_{xy}(0,0)\,,\ t = f''_{y^2}(0,0) \quad \text{og} \quad \theta = \angle(X,T)\ .$$

Opgaven fortsættes

3° Bestem arealforholdet i (x_0, y_0) for parameterfremstillingen $(x,y) \rightsquigarrow P_{x,y}$. Vis, at

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{|\underline{r}'_x \times \underline{r}'_y|}\right) \quad \text{og} \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{|\underline{r}'_x \times \underline{r}'_y|}\right)$$

begge er 0 i (0,0). Beregn $\underline{n}'_x(0,0)$ og $\underline{n}'_y(0,0)$, hvor $\underline{n}$ er enhedsvektoren ensrettet med $\underline{r}'_x \times \underline{r}'_y$.

4° Giv definitionen på den sfæriske normalafbildning Φ af F. Opskriv koordinatfremstillingen for differentialet $d\Phi$ af Φ i O, idet $(\underline{i},\underline{j})$ benyttes som basis både for vektorer og for billedvektorer. Find Gauss' krumningsmål K for F i O.

Vink til 5°: Antag koordinatsystemet valgt, så den i 2° udledte formel går over i Eulers formel

$$\kappa_T = \kappa_X \cos^2\theta + \kappa_Y \sin^2\theta ,$$

og vis da, at

$$\underline{n}'_x(0,0) = -\kappa_X \underline{i} \quad \text{og} \quad \underline{n}'_y(0,0) = -\kappa_Y \underline{j} .$$

5° Vis, at

$$K = \kappa_1 \kappa_2 ,$$

hvor κ_1 og κ_2 er hovedkrumningerne for F i O, medens krumningsmålet K for F i O tænkes indført ved Gauss' definition.

Vis, at tangentretningerne for hovednormalsnittene til F i O samtidig er hovedretninger i O for den sfæriske normalafbildning Φ af F.

Angiv største og mindste målestoksforhold for Φ i O.

Bestem egenværdier og egenvektorer for differentialet $d\Phi$ af Φ i O.

To formelblade er vedhæftet

Københavns Universitet
Matematik 223
Sommeren 1981

Naturvidenskabelig embedseksamen

Sommeren 1981

Matematik 223. Kurver og flader i rummet.

Opgaver til besvarelse i 2 timer.
Hjælpemidler kan ikke medbringes.

Opgave 1. (Omtrentlig vægt 75%.)

Lad $\overrightarrow{OA} = \underline{a}(u)$, $u \in I$, være naturlig parameterfremstilling for en fire gange differentiabel kurve k, hvis krumning κ er forskellig fra 0 i hvert punkt. Krumningsradius betegnes ρ, torsionen τ, og enhedsvektorerne på tangent T, hovednormal N og binormal B betegnes $\underline{t}$, $\underline{n}$ og $\underline{b}$.

1^0 Opskriv Frenets formler, uden begrundelse.

2^0 Tegn en skitse, der foruden et stykke af kurven k viser $\underline{t}$, $\underline{n}$ og $\underline{b}$ i et punkt A på k , kurvens krumningscentrum C i A og den rette linie l gennem C parallel med $\underline{b}$.

Når A gennemløber k, beskriver l en flade F. Stedvektoren til et vilkårligt punkt $P = P_{u,v}$ på fladen F kan skrives

$$\overrightarrow{OP} = \underline{r}(u,v) = \underline{a} + \rho\underline{n} + v\underline{b} = \underline{a}(u) + \rho(u)\underline{n}(u) + v\,\underline{b}(u) .$$

3^0 Gør rede for, at $\overrightarrow{OP} = \underline{r}(u,v)$, $(u,v) \in I \times \mathbb{R}$, er parameterfremstilling for en to gange differentiabel flade. (Her og i det følgende ses bort fra punkter $P_{u,v}$, hvor $\frac{d\rho}{du} = \tau v$.)

4^0 Karakteriser tangentplanen til fladen F i $P_{u,v}$ så simpelt som muligt ud fra kurven k .

Opgaven fortsættes

Binormaldrejningen for k, svarende til et udgangspunkt A_{u_0} på k, betegnes med β. Idet vi antager $\tau > 0$ og indskrænker os til et interval $J \subseteqq I$ af u-værdier, hvor $-\frac{\pi}{2} < \beta = \beta(u) < \frac{\pi}{2}$, betragtes kurven h givet ved

$$u \rightsquigarrow Q = Q_u, \quad u \in J,$$

hvor Q ligger på l, og vinklen $\angle BAQ$ mellem binormalen B til k og AQ er $\frac{\pi}{2} + \beta$.

5^0 Vis, at kurven h i hvert punkt Q_u, som ikke er et undtagelsespunkt på fladen F (se 3^0), har en tangent, der går gennem A_u og er en normal til kurven k.

6^0 Vis, at h er en geodætisk kurve på fladen F.
Vink. Ud fra tangentenhedsvektor, som ifølge 5^0 er

$$\pm(\underline{n} \cos\beta - \underline{b} \sin\beta),$$

kan hovednormalen til h findes.

Opgave 2. (Omtrentlig vægt 25%.)

Terrænet omkring Høje Sandbjerg er afbildet på et kort. Afbildningen kan opfattes som en projektion på en vandret plan*) fulgt af en ligedannethed i forholdet 1/10000.

1^0 Gør rede for, at målestoksforholdet ved overgangen φ fra kortet til det bakkede terræn er større eller lig 10000 i enhver retning i ethvert punkt af kortet.

2^0 Gør rede for, at tangenten i et punkt P af en niveaukurve på kortet angiver en hovedretning for φ i P.

Vink. Undlad at indføre parameterfremstillinger, koordinatsystemer eller lignende.

*) Når der kun er tale om et beskedent område, kan man med Per Degn betragte Jorden som flak, uden mærkbar fejl.

To formelblade er vedhæftet

Mat 223, 1975 formler 1

Kurver og flader i rummet.
Formelsamling.

Samlingen omfatter ikke de mest fundamentale og centrale formler (som f. eks. Taylors formel og Frenets formler) eller særlig simple formler (som f. eks. $\varrho = |\varrho_T| \cos\varphi$ (Meusniers sætning)), men kun et udvalg af mere specielle eller mere komplicerede formler.

Produkt af vektorprodukter: $(\underline{a}\times\underline{b})\times(\underline{a}\times\underline{c}) = [\underline{a}\underline{b}\underline{c}]\,\underline{a}$.

Hastighed og acceleration ved bevægelse på cirkel:
$$\underline{v} = r\omega\underline{N}, \qquad \underline{w} = -r\omega^2\underline{R} + r\omega'\underline{N}.$$

Strækningshastighed for liniestykke, $l = l(t) \neq 0$: $\quad \dfrac{dl}{dt} = \underline{e}\cdot\underline{v}_2 - \underline{e}\cdot\underline{v}_1$.

For vektorfunktion $\underline{r} = \underline{r}(t) \neq \underline{0}$: $\quad \dfrac{d\underline{r}}{dt} = \dfrac{dr}{dt}\underline{R} + r\dfrac{d\theta}{dt}\underline{N}$.

Vinkelhastighed: $\quad \dfrac{d\theta}{dt} = \dfrac{|\underline{r}\times\underline{r}'|}{|\underline{r}|^2}$.

Arealhastighed: $\quad \dfrac{dS}{dt} = \dfrac{1}{2}r^2\dfrac{d\theta}{dt} = \dfrac{1}{2}|\underline{r}\times\underline{r}'|$.

Opløsning af acceleration: $\quad \underline{w} = \dfrac{dv}{dt}\underline{t} + v\dfrac{d\theta}{dt}\underline{n} = \dfrac{dv}{dt}\underline{t} + v^2\varkappa\underline{n}$.

Krumning af rumkurve: $\quad \varkappa = \dfrac{d\theta}{ds} = \dfrac{|\underline{r}'\times\underline{r}''|}{|\underline{r}'|^3}$.

Krumning af projektion: $\quad \varkappa_0 = \dfrac{\varkappa\cos\varphi}{\cos^3\theta}$.

Torsion: $\quad \tau = \dfrac{[\underline{r}'\underline{r}''\underline{r}''']}{|\underline{r}'\times\underline{r}''|^2}$.

Buelængde $s = s(t)$ af kurve på flade:
$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left|\frac{d\underline{r}}{dt}\right|^2 = E\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2.$$

Fladeareal: $\quad S = \int_\omega |\underline{r}'_u\times\underline{r}'_v|\,d(u,v) = \int_\omega \begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix}^{1/2} d(u,v)$.

(fortsættes)

Mat 223, 1975 *formler 2*

Krumning af normalsnit:

$$\varkappa_T = \varkappa_1 \cos^2\theta + \varkappa_2 \sin^2\theta = \frac{L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2}{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}\,.$$

$$L = \underline{n}\cdot\underline{r}''_{u^2} = \frac{\underline{r}'_u \times \underline{r}'_v}{|\underline{r}'_u \times \underline{r}'_v|}\cdot\underline{r}''_{u^2} = \frac{[\underline{r}'_u\,\underline{r}'_v\,\underline{r}''_{u^2}]}{\sqrt{EG-F^2}}\,,\quad M = \underline{n}\cdot\underline{r}''_{uv}\,,\quad N = \underline{n}\cdot\underline{r}''_{v^2}\,.$$

Middelkrumning:
$$H = \frac{\varkappa_1 + \varkappa_2}{2} = \frac{EN - 2FM + GL}{2(EG-F^2)}\,.$$

Krumningsmål:
$$K = \varkappa_1 \varkappa_2 = \frac{\begin{vmatrix} L & M \\ M & N \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix}}\,.$$

Differentialligning for krumningskurver:

$$(EM - FL)\,du^2 + (EN - GL)\,du\,dv + (FN - GM)\,dv^2 = 0.$$

Nye betegnelser:
$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}.$$

Christoffel symboler:
$$\underline{r}''_{ij} = \Gamma_{ij}^{1}\,\underline{r}'_1 + \Gamma_{ij}^{2}\,\underline{r}'_2 + L_{ij}\,\underline{n}\,,$$

$$\Gamma_{ij}^{k} = \Sigma_{l=1}^{2}\, g^{kl}\,\Gamma_{ijl}\,,\qquad \Gamma_{ijl} = \underline{r}''_{ij}\cdot\underline{r}'_l = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{il}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^l}\right).$$

Differentialligninger for jævn geodætisk bevægelse:

$$\frac{d^2u^1}{dt^2} + \Sigma_{i,j=1}^{2}\,\Gamma_{ij}^{1}(u^1,u^2)\,\frac{du^i}{dt}\frac{du^j}{dt} = 0$$
$$\frac{d^2u^2}{dt^2} + \Sigma_{i,j=1}^{2}\,\Gamma_{ij}^{2}(u^1,u^2)\,\frac{du^i}{dt}\frac{du^j}{dt} = 0\,.$$

Differentialligninger for geodætisk parallelforskydning:

$$\frac{d\xi^1}{dt} + \Sigma_{i,j=1}^{2}\,\Gamma_{ij}^{1}(\varphi^1(t),\varphi^2(t))\,\frac{d\varphi^j(t)}{dt}\,\xi^i = 0$$
$$\frac{d\xi^2}{dt} + \Sigma_{i,j=1}^{2}\,\Gamma_{ij}^{2}(\varphi^1(t),\varphi^2(t))\,\frac{d\varphi^j(t)}{dt}\,\xi^i = 0\,.$$

Geodætisk krumning:

$$\varkappa_g = \frac{\sqrt{g}}{\left(\Sigma_{i,j}\, g_{ij}\frac{d\varphi^i}{dt}\frac{d\varphi^j}{dt}\right)^{3/2}}\cdot\begin{vmatrix} \dfrac{d\varphi^1}{dt} & \dfrac{d\varphi^2}{dt} \\ \dfrac{d^2\varphi^1}{dt^2} + \Sigma_{i,j}\Gamma_{ij}^{1}\dfrac{d\varphi^i}{dt}\dfrac{d\varphi^j}{dt} & \dfrac{d^2\varphi^2}{dt^2} + \Sigma_{i,j}\Gamma_{ij}^{2}\dfrac{d\varphi^i}{dt}\dfrac{d\varphi^j}{dt} \end{vmatrix}\,.$$

27.4.75, GM