Matematik 3, 1970–71

Werner Fenchel
Forelæsninger over geometri

Kapitel IV

§5. Fladers krumningsegenskaber.

1. Normalvektor og sfærisk afbildning.

Lad F være et regulært fladestykke af klasse C^2 i rummet E^3. Idet F og rummet antages orienteret, kan man i hvert punkt P på F definere normalvektoren $\underline{N}_P$ som enhedsvektoren i den positive normalretning til tangentplanen T_P i P (orienteret svarende til fladestykkets orientering). Er der valgt en parameterfremstilling ~~af F~~, $P(u^1,u^2)$, $(u^1,u^2) \in \Omega$, af F, vil vektorparret $(\underline{D}_1 P(u^1,u^2), \underline{D}_2 P(u^1,u^2))$ bestemme orienteringen af ~~F~~ T_P. Man har da

$$\underline{N}_P = \underline{N}(u^1,u^2) = \frac{\underline{D}_1 P(u^1,u^2) \times \underline{D}_2 P(u^1,u^2)}{|\underline{D}_1 P(u^1,u^2) \times \underline{D}_2 P(u^1,u^2)|}$$

(1)

$$= \frac{1}{\sqrt{g(u^1,u^2)}} \underline{D}_1 P(u^1,u^2) \times \underline{D}_2 P(u^1,u^2),$$

hvor der er benyttet, at

$$g = \det(g_{ij}) = |\underline{D}_1 P|^2 |\underline{D}_2 P|^2 - (\underline{D}_1 P \cdot \underline{D}_2 P)^2$$

(2)

$$= |\underline{D}_1 P|^2 |\underline{D}_2 P|^2 (1 - \cos^2(\underline{D}_1 P, \underline{D}_2 P)) = |\underline{D}_1 P \times \underline{D}_2 P|^2.$$

Vektoren $\underline{N}_P$ ændres ikke ved en orienteringsbevarende parametertransformation (men erstattes med den modsatte ved en orienteringsvendende).

De følgende betragtninger går ud på at beskrive de mulige former af et fladestykke F i omegnen af et af dets punkter. Hovedhjælpemidlerne er fladestykkets såkaldte sfæriske afbildning og krumningsegenskaber ved kurver på F gennem det pågældende punkt. For at undgå uvæsentlige vanskeligheder, antages, at de benyttede parameterfremstillinger af F er bijektive. På grund af regularitetsforudsætningen kan dette altid opnås ved at betragte en del af F svarende til parameterfremstillingens restriktion til et passende delområde af definitionsområdet.

Lad der være valgt et sædvanligt retvinklet koordinatsystem i E^3 med begyndelsespunkt O. Enhedskuglefladen med centrum O betegnes S^2 (2-dimensional sfære). En afbildning $\sigma: F \to S^2$ defineres ved til punktet P på F at lade svare det punkt N_P på S^2, hvis stedvektor er $\underline{N}_P$. Denne af C. F. Gauss (1827) indførte afbildning kaldes <u>fladestykkets sfæriske afbildning</u>. Den er i almindelighed hverken surjektiv eller injektiv. [Hvis F er (en del af) en plan, er σ konstant. Hvis F er en del af en cylinderflade eller af en omdrejningskegleflade, er billedet af F ved σ en del af en cirkel på S^2.] Af (1) ses, at forudsætningen F i klasse C^2 medfører, at σ tilhører klassen C^1.

<u>2. Den sfæriske afbildnings differential.</u>

Lad der være valgt en parameterfremstilling $P(u^1, u^2)$, $(u^1, u^2) \in \Omega$, af F, og lad $P(u_0^1, u_0^2) = P_0$ være et vilkårligt, i det følgende fastholdt punkt på F. Tangentplanen T_{P_0} til F i P_0 og tangentplanen til S^2 i billedpunktet $\sigma(P_0) = N(u_0^1, u_0^2) = N_0$ er parallelle. De har altså samme 2-dimensionale vektorrum V_0^2. Dette indeholder vektorerne

$$\underline{D}_i P_0 = \underline{D}_i P(u_0^1, u_0^2), \quad \underline{D}_i N_0 = \underline{D}_i N(u_0^1, u_0^2), \qquad i = 1, 2,$$

og orienteres ved fastsættelsen, at vektorparret $(\underline{D}_1 P_0, \underline{D}_2 P_0)$ skal være positivt. Med restriktionen af rummets sædvanlige indre produkt er V_0^2 et reelt vektorrum med indre produkt.

Afbildningen σ inducerer en lineær afbildning σ_{*P_0} eller (idet P_0 tænkes fast) kort σ_* af V_0^2 ind i sig selv. Den kaldes <u>den sfæriske afbildnings differential</u> i P_0 og defineres ved

(3) $\sigma_*(\underline{a}) = \sigma_*(a^i \underline{D}_i P_0) = a^i \underline{D}_i N_0 \qquad$ for $\underline{a} = a^i \underline{D}_i P_0 \in V_0^2$.

Specielt har man

(4) $$\sigma_*(\underline{D}_i P_0) = \underline{D}_i N_0, \qquad i = 1, 2.$$

Lad $P(u^1(t), u^2(t))$, $t \in]a, b[$, være en parameterfremstilling af klasse C^1 for en kurve på F, der går gennem P_0, altså således, at der findes et $t_0 \in]a, b[$, for hvilket $(u^1(t_0), u^2(t_0)) = (u_0^1, u_0^2)$. Hastighedsvektoren svarende til t_0 er da

$$\frac{dP}{dt} = \frac{du^i}{dt} \underline{D}_i P_0,$$

hvor det er underforstået, at de afledede med hensyn til t skal tages for $t = t_0$. Ved σ afbildes kurven på

$$\sigma(P(u^1(t), u^2(t))) = N(u^1(t), u^2(t)), \qquad t \in]a, b[,$$

med hastighedsvektoren

$$\frac{dN}{dt} = \frac{du^i}{dt} \underline{D}_i N_0.$$

i P_0. Der gælder altså

$$(5) \qquad \sigma_*\left(\frac{dP}{dt}\right) = \frac{dN}{dt},$$

hvilket gør det tydeligt, hvorledes σ_* induceres af σ, når det yderligere bemærkes, at enhver vektor $\underline{a} = a^i \underline{D}_i P_0 \in V_0^2$ er hastighedsvektor for en parameterfremstilling af en kurve på F gennem P_0, nemlig f.eks. den ved $u^i = u_0^i + a^i t$ bestemte.

Tilsyneladende afhænger den lineære afbildning σ_* af den valgte parameterfremstilling af F. At dette ikke er tilfældet, følger af (5) og den sidste bemærkning, idet kurvernes hastighedsvektorer ikke afhænger af, hvilken parameterfremstilling for F der er valgt (men selvfølgelig af valget af kurveparameteren).

Et direkte bevis for, at σ_* er uafhængig af fladestykkets parameterfremstilling, forløber således: Lad $\bar{u}^j = \bar{u}^j(u^1, u^2)$, $j = 1, 2$, være en orienteringsbevarende parametertransformation af klasse C^2, og lad $\bar{\sigma}_*$ være det ved den nye parameterfremstilling bestemte differential af σ. Med betegnelserne

$$\underline{\bar{D}}_j P_0 = \frac{\partial P}{\partial \bar{u}^j}, \quad \underline{\bar{D}}_j N_0 = \frac{\partial N}{\partial \bar{u}^j},$$

hvor de afledede med hensyn til $\bar{u}^j$ skal tages for $(\bar{u}_0^1, \bar{u}_0^2) = (\bar{u}^1(u_0^1, u_0^2), \bar{u}^2(u_0^1, u_0^2))$, har man da

$$\bar{\sigma}_*(\underline{\bar{D}}_j P_0) = \underline{\bar{D}}_j N_0 .$$

Idet

$$(6) \qquad \underline{D}_i P_0 = \frac{\partial \bar{u}^j}{\partial u^i} \underline{\bar{D}}_j P_0, \qquad \underline{D}_i N_0 = \frac{\partial \bar{u}^j}{\partial u^i} \underline{\bar{D}}_j N_0,$$

fås

$$\bar{\sigma}_*(\underline{D}_i P_0) = \bar{\sigma}_*\left(\frac{\partial \bar{u}^j}{\partial u^i}\bar{\underline{D}}_j P_0\right) = \frac{\partial \bar{u}^j}{\partial u^i}\bar{\underline{D}}_j N_0 = \underline{D}_i N_0 = \sigma_*(\underline{D}_i P_0).$$

Dette viser, at basen $(\underline{D}_1 P_0, \underline{D}_2 P_0)$ for V_0^2 ved $\bar{\sigma}_*$ og σ_* afbildes på samme vektorpar, og heraf sluttes, at $\bar{\sigma}_* = \sigma_*$.

Med hensyn til basen $(\underline{D}_1 P_0, \underline{D}_2 P_0)$ har σ_* en matrix, der betegnes

$$\underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} B_1^1 & B_2^1 \\ B_1^2 & B_2^2 \end{pmatrix}.$$

Idet dens søjler er koordinatsættene for basisvektorernes billedvektorer $\underline{D}_1 N_0$, $\underline{D}_2 N_0$, har man

(7) $$\underline{D}_j N_0 = B_j^i \underline{D}_i P_0, \qquad j = 1, 2.$$

Matricen $\underline{\underline{B}}$ for σ_* ændres naturligvis ved overgang til nye parametre $\bar{u}_1, \bar{u}_2$. Betegnes matricen for σ_* med hensyn til basen $(\bar{\underline{D}}_1 P_0, \bar{\underline{D}}_2 P_0)$ med

$$\bar{\underline{\underline{B}}} = \begin{pmatrix} \bar{B}_1^1 & \bar{B}_2^1 \\ \bar{B}_1^2 & \bar{B}_2^2 \end{pmatrix},$$

har man

$$\bar{\underline{D}}_l N_0 = \frac{\partial u^j}{\partial \bar{u}^l}\underline{D}_j N_0 = \frac{\partial u^j}{\partial \bar{u}^l} B_j^i \underline{D}_i P_0 = \frac{\partial u^j}{\partial \bar{u}^l} B_j^i \frac{\partial \bar{u}^k}{\partial u^i}\bar{\underline{D}}_k P_0,$$

altså

$$\bar{B}_l^k = \frac{\partial \bar{u}^k}{\partial u^i} B_j^i \frac{\partial u^j}{\partial \bar{u}^l}$$

eller i matrixform

$$\bar{\underline{\underline{B}}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \bar{u}^1}{\partial u^1} & \frac{\partial \bar{u}^1}{\partial u^2} \\ \frac{\partial \bar{u}^2}{\partial u^1} & \frac{\partial \bar{u}^2}{\partial u^2} \end{pmatrix} \underline{\underline{B}} \begin{pmatrix} \frac{\partial u^1}{\partial \bar{u}^1} & \frac{\partial u^1}{\partial \bar{u}^2} \\ \frac{\partial u^2}{\partial \bar{u}^1} & \frac{\partial u^2}{\partial \bar{u}^2} \end{pmatrix}$$

i overensstemmelse med et fra den lineære algebra kendt resultat. Den første matrix på højre side er nemlig koordinattransformationsmatricen og den sidste er dennes inverse.

3. Den anden fundamentalform.

Den sfæriske afbildnings differential σ_* er en selvadjungeret lineær afbildning af vektorrummet V_0^2 med indre produkt ind i sig selv.

Der påstås altså, at der for alle vektorer $\underline{a}, \underline{b} \in V_0^2$ gælder

(8) $$\sigma_*(\underline{a}) \cdot \underline{b} = \underline{a} \cdot \sigma_*(\underline{b}).$$

Med benyttelse af den til en parameterfremstilling af F hørende basis $(\underline{D}_1 P_0, \underline{D}_2 P_0)$ kan dette skrives

$$a^i b^j \underline{D}_i N_0 \cdot \underline{D}_j P_0 = a^i b^j \underline{D}_i P_0 \cdot \underline{D}_j N_0,$$

hvor der er sat $\underline{a} = a^i \underline{D}_i P_0$, $\underline{b} = b^j \underline{D}_j P_0$. Det er derfor tilstrækkeligt at vise, at

$$\underline{D}_i N_0 \cdot \underline{D}_j P_0 = \underline{D}_i P_0 \cdot \underline{D}_j N_0, \qquad i, j = 1, 2.$$

Men dette følger af, at der for alle (u^1, u^2) i parameterområdet gælder $\underline{N} \cdot \underline{D}_j P = 0$, altså $\frac{\partial}{\partial u^i}(\underline{N} \cdot \underline{D}_j P) = 0$, hvilket giver

(9) $$\underline{D}_i N \cdot \underline{D}_j P = -\underline{N} \cdot \underline{D}_i \underline{D}_j P = -\underline{N} \cdot \underline{D}_j \underline{D}_i P = \underline{D}_j N \cdot \underline{D}_i P.$$

Den ifølge (8) symmetriske bilinearform

$$-\sigma_*(\underline{a}) \cdot \underline{b} = -\underline{a} \cdot \sigma_*(\underline{b}), \qquad \underline{a}, \underline{b} \in V_0^2,$$

kaldes fladestykkets anden fundamentalform i punktet P_0.

Med hensyn til basen $(\underline{D}_1 P_0, \underline{D}_2 P_0)$ kan den ifølge (9) skrives

(10) $$-\sigma_*(\underline{a}) \cdot \underline{b} = -\underline{a} \cdot \sigma_*(\underline{b}) = L_{ij} a^i b^j,$$

hvor der er sat

(11) $$L_{ij} = L_{ji} = \underline{N}_0 \cdot \underline{D}_i \underline{D}_j P_0.$$

Dette udtryk er velegnet til beregning af den anden fundamentalforms koefficienter L_{ij} svarende til en given parameterfremstilling af F. Mellem disse, den første fundamentalforms koefficienter og elementerne i matricen $\underline{\underline{B}}$ for σ_* består relationerne

$$L_{jk} = L_{kj} = -g_{ki} B^i_j \,, \qquad j,k = 1,2, \tag{12}$$

der fås ved at multiplicere (7) skalært med $\underline{D}_k P_0$ og at benytte (9) samt $g_{ki} = \underline{D}_k P_0 \cdot \underline{D}_i P_0$. Med betegnelserne

$$\underline{\underline{g}} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{L}} = \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{12} & L_{22} \end{pmatrix}$$

for fundamentalformernes matricer kan (12) skrives

$$\underline{\underline{L}} = -\underline{\underline{g}}\,\underline{\underline{B}} \quad \text{eller} \quad \underline{\underline{B}} = -\underline{\underline{g}}^{-1}\underline{\underline{L}}\,. \tag{13}$$

Indføres betegnelsen

$$\underline{\underline{g}}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{g_{22}}{g} & -\frac{g_{12}}{g} \\ -\frac{g_{21}}{g} & \frac{g_{11}}{g} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{pmatrix},$$

hvor

$$g = \det(g_{ij}),$$

har man

$$g_{ij}\, g^{jk} = \delta^k_i = \begin{cases} 1 & \text{for } i = k, \\ 0 & \text{for } i \neq k, \end{cases} \tag{14}$$

og den sidste matrixligning kan da skrives

$$B^l_j = -g^{lk} L_{kj}\,, \qquad j,l = 1,2. \tag{15}$$

Dette kan også fås ved at multiplicere (12) med g^{lk} (summation over k) og at benytte (14).

4. Den Gaussiske Krumning. Totalkrumning.

Den sfæriske afbildnings differential σ_{*P_0} giver oplysning om fladestykkets krumningsforhold i punktet P_0.

Først betragtes arealforholdet ved σ_*, altså forholdet mellem arealet af et parallelograms billede ved σ_* og selve parallelogrammets areal, hvorved arealerne regnes med fortegn svarende til orienteringen af V_0^2. Det kaldes den Gaussiske krumning eller krumningsmålet af F i punktet P_0 og betegnes $K(P_0)$ eller, hvis der er valgt en parameterfremstilling $P(u^1,u^2)$ med $P_0 = P(u_0^1, u_0^2)$, også med $K(u_0^1,u_0^2)$. Idet arealforholdet som bekendt er lig med determinanten af matricen for σ_* med hensyn til en vilkårlig basis for V_0^2, har man ifølge (13)

$$K(P_0) = \det(B^i_j) = \frac{L}{g}, \tag{16}$$

hvor

$$L = \det(L_{ij}).$$

Af definitionen af K følger, at σ_* er orienteringsbevarende, hvis $K>0$, og orienteringsvendende, hvis $K<0$.

Lad $P(u^1,u^2)$, $(u^1,u^2)\in\Omega$, være en parameterfremstilling af F, og antag, at den er bijektiv. Lad endvidere ω være et afsluttet og begrænset delområde af Ω. Ved parameterfremstillingen svarer der til ω et stykke F_ω af F. Dettes areal er da (jf. (2))

$$\text{ar}\, F_\omega = \iint_\omega |\underline{D}_1 P(u^1,u^2) \times \underline{D}_2 P(u^1,u^2)|\, du^1 du^2 = \iint_\omega \sqrt{g(u^1,u^2)}\, du^1 du^2 .$$

Antag i første omgang, at F_ω afbildes bijektivt ved den sfæriske afbildning σ. Da er $N(u^1,u^2)$, $(u^1,u^2)\in\Omega$, en parameterfremstilling af stykket $\sigma(F_\omega)$ af kuglefladen S^2. Dette stykkes areal er altså

$$\operatorname{ar}\sigma(F_\omega) = \iint_\omega |\underline{D}_1 N(u^1,u^2)\times \underline{D}_2 N(u^1,u^2)|\,du^1du^2 .$$

Nu gælder i hvert punkt af F, at

$$\underline{D}_1 N \times \underline{D}_2 N = K\,\underline{D}_1 P\times \underline{D}_2 P .$$

Dette følger umiddelbart af vektorproduktets og arealforholdets definition, men bekræftes også direkte ved hjælp af (7):

$$\underline{D}_1 N\times\underline{D}_2 N = B_1^i B_2^j\,\underline{D}_i P\times\underline{D}_j P = (B_1^1B_2^2 - B_1^2B_2^1)\,\underline{D}_1 P\times\underline{D}_2 P .$$

Hvis $K>0$ på F_ω har man altså

$$(17)\qquad \operatorname{ar}\sigma(F_\omega) = \iint_\omega K(u^1,u^2)\sqrt{g(u^1,u^2)}\,du^1du^2 .$$

Man benytter nu (17) som <u>definition</u> på arealet af det sfæriske billede $\sigma(F_\omega)$ uanset fortegnet for K og også, når σ ikke er bijektiv. Dette kommer for det første ud på, at arealet regnes med fortegn, og for det andet, at man tager hensyn til eventuelle flerdobbelte overdækninger af dele af kuglefladen, idet man regner hver enkelt af dem positivt eller negativt, efter som orienteringen bevares eller vendes. Størrelsen $\operatorname{ar}\sigma(F_\omega)$ kaldes <u>totalkrumningen</u> af fladestykket F_ω.

Forholdet

$$\frac{\operatorname{ar}\sigma(F_\omega)}{\operatorname{ar}F_\omega} = \frac{\iint_\omega K\sqrt{g}\,du^1du^2}{\iint_\omega \sqrt{g}\,du^1du^2}$$

kan betragtes som en middelværdi af den Gaussiske krumning af fladestykket F_ω. Tænker man sig, at ω gennemløber en følge af områder, som indeholder et fast punkt (u_0^1, u_0^2) og trækker sig sammen om dette, vil forholdet konvergere mod $K(u_0^1, u_0^2)$. Vi skriver dette uden præcisering

$$\lim_{\omega \to \{(u_0^1, u_0^2)\}} \frac{\text{ar}\, \sigma(F_\omega)}{\text{ar}\, F_\omega} = K(u_0^1, u_0^2).$$

Denne anskuelige bestemmelse af K var Gauss benyttet som definition.

5. Normalsnit, Normalkrumning. Meusniers sætning.

Det følgende går ud på at finde en geometrisk fortolkning af den til den anden fundamentalform hørende kvadratiske form (som for korthеds skyld også vil blive kaldet den anden fundamentalform). Til dette formål bevises først:

Lad F være et regulært fladestykke af klasse C^2, og lad P_0 være et punkt på F. Da er fællesmængden for F og en plan, der går gennem P_0 og er forskellig fra tangentplanen til F i P_0, i en passende omegn af P_0 en regulær kurve af klasse C^2.

For at bevise dette, vælges en regulær parameterfremstilling $P(u^1, u^2)$ af F tilhørende klassen C^2. Lad (u_0^1, u_0^2) være parameterparret, for hvilket $P(u_0^1, u_0^2) = P_0$. Fællesmængden for F og en plan gennem P_0 med normalvektor $\underline{c} \neq \underline{0}$ består af punkterne $P(u^1, u^2)$, for hvilke

(18) $$\underline{c} \cdot \overrightarrow{P_0 P}(u^1, u^2) = 0.$$

Den venstre side er en C^2-funktion af (u^1, u^2). Dens partielle afledede i (u_0^1, u_0^2) er $\underline{c} \cdot \underline{D}_1 P(u_0^1, u_0^2)$ og $\underline{c} \cdot \underline{D}_2 P(u_0^1, u_0^2)$. Idet planen er forudsat forskellig fra tangentplanen til F i P_0, er disse afledede ikke begge lig 0. Antag f.eks. $\underline{c}\cdot\underline{D}_2(u_0^1,u_0^2) \neq 0$. Idet (18) er tilfredsstillet for $(u^1,u^2) = (u_0^1, u_0^2)$, eksisterer der ifølge sætningen om implicite funktioner et interval $]\alpha^1,\beta^1[\times]\alpha^2,\beta^2[$ omkring (u_0^1,u_0^2) og en C^2-funktion $\varphi:]\alpha^1,\beta^1[\to]\alpha^2,\beta^2[$ med $\varphi(u_0^1) = u_0^2$ således, at samtlige løsninger til (18) i intervallet er givet ved $(u^1, \varphi(u^1))$, $u^1 \in]\alpha^1,\beta^1[$. Fællesmængden for planen og den til intervallet svarende del af F har altså parameterfremstillingen $P(t,\varphi(t))$, $t \in]\alpha^1,\beta^1[$, der er af klasse C^2 og regulær, idet

$$\frac{d\,P(t,\varphi(t))}{dt} = \underline{D}_1 P(t,\varphi(t)) + \varphi'(t)\,\underline{D}_2(t,\varphi(t)) \neq \underline{0}.$$

Dermed er påstanden bevist.

Fladestykket F antages nu og i det følgende orienteret. Lad $\underline{a} \neq \underline{0}$ være en vektor i tangentplanen til F i P_0. Ved fladestykkets <u>normalsnit gennem P_0 i retningen $\underline{a}$</u> forstås dets fællesmængde med den af $\underline{a}$ og normalvektoren $\underline{N}_0$ udspændte plan $\nu(\underline{a})$ gennem P_0. Ifølge det viste er det i en omegn af P_0 en regulær kurve $n(\underline{a})$ af klasse C^2 i planen $\nu(\underline{a})$. Vektoren $\underline{a}$ ligger på kurvens tangent i P_0. Lad $P(s)$ være en naturlig parameterfremstilling af $n(\underline{a})$, og lad s_0 betegne den værdi af s, for hvilken $P(s_0) = P_0$. Antag endvidere, at kurvens orientering er valgt således, at tangentvektoren $\underline{v}_1(s_0)$ i P_0, som betegnes kort $\underline{v}_{10}$, er ensrettet med $\underline{a}$, altså

$$\underline{v}_{10} = \frac{\underline{a}}{|\underline{a}|}.$$

Idet planen $\nu(\underline{a})$ orienteres ved vektorparret $(\underline{v}_{10}, \underline{N}_0)$, har

$n(\underline{a})$ som regulær orienteret kurve af klasse C^2 i en orienteret plan en krumning (regnet med fortegn) i P_0. Denne kaldes <u>fladestykkets normalkrumning i P_0 i retningen $\underline{a}$</u> eller $\underline{v}_{10}$, og betegnes $\kappa_n(P_0, \underline{a})$ eller $\kappa_n(P_0, \underline{v}_{10})$. Idet $\underline{N}_0$ med den valgte orientering af $\nu(\underline{a})$ er den normalvektor til $n(\underline{a})$ i P_0, der i teorien for plane kurver er betegnet med $\underline{v}_2(s_0)$, vil $n(\underline{a})$ vende den hule side mod tangentplanens positive side, hvis $\kappa_n(P_0, \underline{a}) > 0$, og mod den negative, hvis $\kappa_n(P_0, \underline{a}) < 0$.

Da punktet P_0 tænkes fast indtil videre, skrives kort $\kappa_n(\underline{a})$ eller $\kappa_n(\underline{v}_{10})$ i stedet for $\kappa_n(P_0, \underline{a})$ eller $\kappa_n(P_0, \underline{v}_{10})$.

For at beregne $\kappa_n(\underline{v}_{10})$ bemærkes, at der i punkterne af $n(\underline{a})$ gælder $\underline{N}(s) \cdot \underline{v}_1(s) = 0$, altså $\frac{d}{ds}(\underline{N}(s) \cdot \underline{v}_1(s)) = 0$, hvilket for $s = s_0$ giver

$$\underline{N}_0 \cdot \frac{d\underline{v}_1}{ds}(s_0) = -\frac{d\underline{N}}{ds}(s_0) \cdot \underline{v}_{10} .$$

Ifølge Frenets første formel og på grund af $\underline{v}_2(s_0) = \underline{N}_0$ er den venstre side lig med $\kappa_n(\underline{v}_{10})$. Endvidere fås af (5)

$$\frac{d\underline{N}}{ds}(s_0) = \sigma_*\left(\frac{dP}{ds}(s_0)\right) = \sigma_*(\underline{v}_{10}),$$

altså

$$\kappa_n(\underline{v}_{10}) = -\sigma_*(\underline{v}_{10}) \cdot \underline{v}_{10} .$$

Dermed har vi vist:

<u>Normalkrumningen $\kappa_n(\underline{a})$ af fladestykket F i punktet P_0 og retningen $\underline{a}$ er lig med den anden fundamentalforms værdi for enhedsvektoren $\frac{\underline{a}}{|\underline{a}|}$ i retningen $\underline{a}$.</u>

Med benyttelse af en parameterfremstilling af F kan dette skrives

$$(19) \qquad \kappa_n(\underline{a}) = -\frac{\sigma_*(\underline{a}) \cdot \underline{a}}{\underline{a}^2} = \frac{L_{ij}\, a^i a^j}{g_{ij}\, a^i a^j}, \qquad \underline{a} = a^i \underline{D}_i P_0 .$$

Det bemærkes, at $\kappa_n(\lambda\underline{a}) = \kappa_n(\underline{a})$ for alle $\lambda \in \dot{R}\setminus\{0\}$. Specielt er $\kappa_n(-\underline{a}) = \kappa_n(\underline{a})$ (hvilket også kan sluttes af, at hvis normalsnittets orientering vendes, skifter ifølge ovenstående fastsættelse også snitplanens orientering).

Vi betragter nu en vilkårlig regulær kurve k af klasse C^2 på F, som går ~~gå~~ gennem P_0, og som i dette punkt har samme tangentvektor $\underline{v}_{10}$ som normalsnittet $n(\underline{v}_{10})$. Der vælges en naturlig parameterfremstilling $P(s)$ af k, og med s_0 betegnes den værdi af s, for hvilken $P(s_0) = P_0$. (Vi benytter altså de samme betegnelser som for normalsnittet; for dette vil de ikke blive brugt mere.) For tangentvektoren $\underline{v}_1(s)$ til k i $P(s)$ og normalvektoren $\underline{N}(s)$ til F i $P(s)$ gælder i parameterintervallet, at $\underline{N}(s)\cdot\underline{v}_1(s) = 0$. Den med hensyn til s differentierede ligning giver for $s = s_0$

$$\underline{N}_0 \cdot \frac{d\underline{v}_1}{ds}(s_0) = -\frac{d\underline{N}}{ds}(s_0)\cdot\underline{v}_{10} = -\sigma_*(\underline{v}_{10})\cdot\underline{v}_{10} = \kappa_n(\underline{v}_{10}).$$

Heraf sluttes i første omgang, at en fladekurve k gennem P_0 kun kan have krumningen $\kappa(s_0) = 0$ i P_0 (dvs. $\frac{d\underline{v}_1}{ds}(s_0) = \underline{0}$), hvis normalkrumningen i dens tangentretning er lig 0. (Det omvendte er ikke alment gyldigt.)

Vi antager dernæst, at k har fra 0 forskellig, altså (da k er rumkurve) positiv krumning $\kappa_0 = \kappa(s_0)$ i P_0. Dette er ensbetydende med, at k har en hovednormalvektor $\underline{v}_{20}$ og en oskulationsplan i P_0. Ifølge Frenets første formel for rumkurver fås af ovenstående ligning

(20) $$\kappa_0 \underline{N}_0 \cdot \underline{v}_{20} = \kappa_0 \cos(\underline{N}_0, \underline{v}_{20}) = \kappa_n(\underline{v}_{10}).$$

Hvis oskulationsplanen for k i P_0 er forskellig fra tangentplanen til F i P_0, er alle størrelser i denne ligning forskellige fra 0. Hovednormalvektoren $\underline{v}_{20}$ vil da være bestemt, når blot oskulationsplanen kendes. På forhånd kommer de to modsatte, til $\underline{v}_{10}$ ortogonale enhedsvektorer i planen i betragtning. Men da $\kappa_0 > 0$, må $\underline{v}_{20}$ være den af de to vektorer, som med $\underline{N}_0$ danner en spids eller stump vinkel, efter som $\kappa_n(\underline{v}_{10})$ er positiv eller negativ. Hermed har vi vist en sætning, der skyldes J. B. Meusnier (1776):

Alle regulære kurver af klasse C^2 på et fladestykke F, som går gennem samme punkt P_0, har i dette samme tangentvektor $\underline{v}_{10}$ og samme fra tangentplanen til F i P_0 forskellige oskulationsplan i P_0 (og dermed samme hovednormalvektor $\underline{v}_{20}$), vil i P_0 have samme krumning, nemlig

$$\kappa_0 = \frac{\kappa_n(\underline{v}_{10})}{\cos(\underline{N}_0, \underline{v}_{20})}.$$

Det fremhæves, at (20) ikke giver nogen oplysning om krumningen i P_0 af en fladekurve, som har en oskulationsplan, der falder sammen med tangentplanen (idet $\cos(\underline{N}_0, \underline{v}_{20}) = 0$ i dette tilfælde). Sammen med en tidligere bemærkning giver (20) kun følgende: Normalkrumningen i en fladekurves tangentretning i et punkt P_0 er lig 0, hvis og kun hvis kurven i P_0 enten har krumning 0 eller fladens tangentplan som oskulationsplan.

Idet forudsætningerne i Meusniers sætning medfører $\kappa_0 > 0$ og $\kappa_n(\underline{v}_{10}) \neq 0$, kan krumningsradierne $\varrho_0 = \frac{1}{\kappa_0}$ for k og $\varrho_n(\underline{v}_{10}) = \frac{1}{\kappa_n(\underline{v}_{10})}$ for $n(\underline{v}_{10})$ indføres. Man har da

$$\varrho_0 = \varrho_n(\underline{v}_{10}) \cos(\underline{N}_0, \underline{v}_{20}),$$

hvilket giver en anskuelig fortolkning af sætningens indhold:

Man betragter kuglefladen med centrum i krumningscentret for normalsnittet $n(\underline{v}_{10})$ i P_0 og radius $|\varrho_n(\underline{v}_{10})|$. (Den rører fladen F i P_0.) For en fladekurve gennem P_0 med tangentvektor $\underline{v}_{10}$ og en oskulationsplan i P_0, der er forskellig fra fladens tangentplan i P_0, fås krumningscirklen ved at skære kuglefladen med oskulationsplanen.

6. Hovedretninger og hovedkrumninger. Eulers formel.

Normalkrumningen af fladestykket F i punktet P_0 afhænger af den ved tangentvektoren $\underline{a}$ fastlagte retning som udtrykt ved (19). For at undersøge denne afhængighed nærmere benyttes, at den lineære afbildning $\sigma_{\ast}$ er selvadjungeret.

Dette medfører som bekendt, at det karakteristiske polynomium for $\sigma_{\ast}$, som er af anden grad, har lutter reelle rødder, altså enten to forskellige, der hver er egenværdi med egenværdimultiplicitet 1, eller en dobbeltrod, der er egenværdi med egenværdimultiplicitet 2. Egenværdierne betegnes i begge tilfælde med $-\kappa_1$ og $-\kappa_2$, idet der i det sidstnævnte sættes $\kappa_1 = \kappa_2$. Der findes endvidere en ortonormal basis

$(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$ for V_0^2 bestående af egenvektorer. Betegnelserne tænkes valgt således, at $\underline{e}_i$, $i = 1,2$, hører til egenværdien $-\kappa_i$.

Hvis $\kappa_1 \neq \kappa_2$ (og nummereringen af egenværdierne er valgt), er denne basis entydig bestemt bortset fra, at en eller begge vektorer kan erstattes men den eller de modsatte. Egenvektorerne bestemmer altså to på hinanden vinkelrette retninger i tangentplanen til F i P_0. De kaldes fladestykkets <u>hovedretninger</u> i punktet P_0.

Hvis $\kappa_1 = \kappa_2$, er hver egentlig vektor egenvektor til egenværdien $-\kappa_1 = -\kappa_2$, altså specielt vektorerne i en vilkårlig ortonormal basis. I dette tilfælde siges enhver retning i tangentplanen at være en <u>hovedretning</u>.

I begge tilfælde kan en hovedretning i P_0 karakteriseres på følgende måde:

<u>Hastighedsvektoren i P_0 for en regulær kurve k af klasse C^2 på F gennem P_0 bestemmer en hovedretning, hvis og kun hvis hastighedsvektoren for kurvens sfæriske billede $\sigma(k)$ i $N_0 = \sigma(P_0)$ bestemmer den samme retning eller er nulvektoren.</u>

Med hensyn til en ortonormal basis $(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$ bestående af egenvektorer har den sfæriske afbildnings differential σ_* en diagonalmatrix, nemlig den med diagonalelementerne $-\kappa_1, -\kappa_2$. Idet dennes determinant er den Gaussiske krumning, gælder

(21) $$K(P_0) = \kappa_1 \kappa_2 .$$

For en vilkårlig vektor $\underline{a} = \alpha^i \underline{e}_i \in V_0^2$ fås

$$\sigma_*(\underline{a}) = \alpha^1\sigma_*(\underline{e}_1) + \alpha^2\sigma_*(\underline{e}_2) = -\kappa_1\alpha^1\underline{e}_1 - \kappa_2\alpha^2\underline{e}_2,$$

og den anden fundamentalforms værdi for $\underline{a}$ bliver

$$(22) \qquad -\sigma_*(\underline{a})\cdot\underline{a} = \kappa_1(\alpha^1)^2 + \kappa_2(\alpha^2)^2.$$

Ifølge (19) får vi altså for normalkrumningen i retningen $\underline{a} \neq \underline{0}$

$$(23) \qquad \kappa_n(\underline{a}) = \frac{\kappa_1(\alpha^1)^2 + \kappa_2(\alpha^2)^2}{(\alpha^1)^2 + (\alpha^2)^2} = \kappa_1\cos^2(\underline{e}_1,\underline{a}) + \kappa_2\sin^2(\underline{e}_1,\underline{a}),$$

idet

$$\underline{a}^2 = (\alpha^1)^2 + (\alpha^2)^2, \quad \alpha^1 = |\underline{a}|\cos(\underline{e}_1,\underline{a}), \quad \alpha^2 = |\underline{a}|\sin(\underline{e}_1,\underline{a}).$$

Denne fremstilling af normalkrumningen skyldes L. Euler (1760) [for flader, der i sædvanlige retvinklede koordinater er fremstillet ved en ligning af formen $x_3 = f(x_1, x_2)$] og kaldes derfor <u>Eulers formel</u>.

Specielt har vi, at

$$\kappa_n(\underline{e}_1) = \kappa_1, \qquad \kappa_n(\underline{e}_2) = \kappa_2,$$

altså at κ_1 og κ_2 er normalkrumningerne i hovedretningerne. De kaldes kort fladestykkets <u>hovedkrumninger</u> i punktet P_0.

Af Eulers formel (23) sluttes endvidere, at

$$\min\{\kappa_1,\kappa_2\} \leq \kappa_n(\underline{a}) \leq \max\{\kappa_1,\kappa_2\},$$

for alle egentlige vektorer $\underline{a} \in V_0^2$, altså at <u>hovedkrumningerne er største og mindste normalkrumning i P_0</u>.

Et billede af normalkrumningens afhængighed af retningen fås ved med Ch. Dupin (1813) at betragte den kurve i tangentplanen, kaldet <u>Dupins indikatrix</u>, som med hensyn til koordinatsystemet $(P_0, \underline{e}_1, \underline{e}_2)$ har ligningen

$$|\kappa_1(\alpha^1)^2 + \kappa_2(\alpha^2)^2| = 1.$$

Den består, hvis den ikke er tom af et eller to keglesnit med akser i hovedretningerne. Idet den venstre side ifølge (23) er lig med $|\kappa_n(\underline{a})||\underline{a}|^2$, er afstanden fra P_0 til punktet på indikatrix, hvis stedvektor er $\underline{a}$, lig med

$$|\underline{a}| = \frac{1}{\sqrt{|\kappa_n(\underline{a})|}} .$$

Vi skelner nu mellem tre tilfælde:

$\underline{K(P_0) > 0}$: Fladestykket siges i P_0 at være *elliptisk krummet*. Ifølge (21) er begge hovedkrumninger forskellige fra 0 og har samme fortegn. Anden fundamentalform er positiv eller negativ definit. Alle normalkrumninger har samme fortegn. I en passende lille omegn af P_0 forløber alle normalsnit og dermed fladestykket helt på samme side af tangentplanen. Dupins indikatrix er en ellipse med halvakserne $\frac{1}{\sqrt{|\kappa_1|}}$ og $\frac{1}{\sqrt{|\kappa_2|}}$, specielt en cirkel, hvis $\kappa_1 = \kappa_2$. I det sidste tilfælde siges P_0 at være et *kuglepunkt*.

$\underline{K(P_0) = 0}$: Fladestykket siges i P_0 at være *parabolsk krummet*. Ifølge (21) er mindst én af hovedkrumningerne lig 0. Antag først, at f.eks. $\kappa_1 \neq 0$, $\kappa_2 = 0$. Anden fundamentalform er da positiv eller negativ semidefinit, efter som $\kappa_1 > 0$ eller $\kappa_1 < 0$. Bortset fra normalkrumningen i retningen $\underline{e}_2$, der er lig 0, har alle normalkrumninger samme fortegn. Heraf kan man dog ikke slutte, at fladen i en omegn af P_0 helt ligger på den ene side af tangentplanen. Indikatrix består af de to med $\underline{e}_2$ parallelle ~~to~~ linier, som har afstanden $\frac{1}{\sqrt{|\kappa_1|}}$ fra P_0. Hvis $\kappa_1 = \kappa_2 = 0$, er anden fundamentalform identisk lig 0. Alle normalkrumninger er 0. Man kan ikke slutte noget generelt om fladens beliggenhed i forhold til tangentplanen. Indikatrix er tom. I dette tilfælde siges P_0 at være et <u>fladpunkt</u>.

<u>$K(P_0) < 0$</u>: Fladestykket siges i P_0 at være <u>hyperbolsk krummet</u>. Ifølge (11) er begge hovedkrumninger forskellige fra 0 og har modsat fortegn. Anden fundamentalform er indefinit. Der findes altså retninger, i hvilke normalkrumningen er positiv, og retninger, i hvilke den er negativ. Der findes to retninger, bestemt ved $\kappa_1(\alpha^1)^2 + \kappa_2(\alpha^2)^2 = 0$, i hvilke normalkrumningen er lig 0. I enhver omegn af P_0 ligger fladen dels på den ene, dels på den anden side af tangentplanen. Indikatrix består af to hyperbler med fælles asymptoter, nemlig de to linier gennem P_0, i hvis retninger normalkrumningen er lig 0. Hver af hyperblerne ligger i sit af de to par af topvinkelrum bestemt af asymptoterne. Hyperblerne har de samme halvakser $\frac{1}{\sqrt{|\kappa_1|}}$, $\frac{1}{\sqrt{|\kappa_2|}}$, men med "ombyttede roller". I retningerne tilhørende det ene par af topvinkelrum er normalkrumningen positiv, i retningerne tilhørende det andet er den negativ.

En retning i tangentplanen til F i P_0, i hvilken normalkrumningen er 0, kaldes en <u>asymptoteretning</u> i P_0. Hvis $K(P_0) > 0$, findes der ingen. Hvis $K(P_0) = 0$, men P_0 er ikke fladpunkt, findes der netop én. Hvis P_0 er fladpunkt, er enhver retning i tangentplanen asymptoteretning. Hvis $K(P_0) < 0$, findes der netop to.

Vi skal nu udlede formler til bestemmelse af hovedretningerne og hovedkrumningerne ud fra en valgt parameterfremstilling af F. Under de sædvanlige forudsætninger om denne og med de tidligere indførte betegnelser kan κ_1 og κ_2 findes som rødderne i andengradsligningen

$$\det(\underline{\underline{B}} + \lambda \underline{\underline{E}}) = \lambda^2 - 2H(P_0)\lambda + K(P_0) = 0,$$

hvor der er sat

$$H(P_0) = -\tfrac{1}{2} \operatorname{tr} \underline{\underline{B}} = -\tfrac{1}{2} B_i^i = \tfrac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2). \tag{24}$$

Denne størrelse kaldes fladestykkets middelkrumning i P_0. Sammen med den Gaussiske krumning $K(P_0)$ bestemmer den altså hovedkrumningerne. En ækvivalent andengradsligning fås ved hjælp af (13):

$$\det(\underline{\underline{L}} - \lambda \underline{\underline{g}}) = 0,$$

og udtrykt ved fundamentalformernes koefficienter bliver middelkrumningen (jf. (15))

$$H(P_0) = \tfrac{1}{2} g^{ik} L_{ik} = \frac{g_{22}L_{11} - 2g_{12}L_{12} + g_{11}L_{22}}{2g}. \tag{25}$$

Ved bestemmelsen af hovedretningerne $\underline{e}_1, \underline{e}_2$ kan man se bort fra tilfældet $\kappa_1 = \kappa_2$, da i dette alle retninger i tangentplanen er hovedretninger. Sættes

$$\underline{e}_\ell = e_\ell^i D_i P_0, \qquad \ell = 1, 2,$$

må koordinatparret (e_ℓ^1, e_ℓ^2) være en egentlig løsning til det lineære homogene ligningssystem

$$\begin{pmatrix} B_1^1 + \kappa_\ell & B_2^1 \\ B_1^2 & B_2^2 + \kappa_\ell \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_\ell^1 \\ e_\ell^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

eller det dermed ækvivalente

$$\begin{pmatrix} L_{11}-\kappa_\ell g_{11} & L_{12}-\kappa_\ell g_{12} \\ L_{21}-\kappa_\ell g_{21} & L_{22}-\kappa_\ell g_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_\ell^1 \\ e_\ell^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

hvis matricer har rang 1, idet κ_ℓ (ifølge antagelsen $\kappa_1 \neq \kappa_2$) har egenværdimultiplicitet 1. Løsningen skal desuden være normeret, altså opfylde

$$g_{ij}\, e_\ell^i e_\ell^j = 1 .$$

Er (z_ℓ^1, z_ℓ^2) en vilkårlig egentlig løsning, altså f.eks. $(-L_{12}+\kappa_\ell g_{12},\ L_{11}-\kappa_\ell g_{11})$ eller $(-L_{22}+\kappa_\ell g_{22},\ L_{21}-\kappa_\ell g_{21})$ (mindst én af disse er jo forskellig fra $(0,0)$), kan

$$(e_\ell^1, e_\ell^2) = \left(\frac{z_\ell^1}{g_{ij} z_\ell^i z_\ell^j},\ \frac{z_\ell^2}{g_{ij} z_\ell^i z_\ell^j} \right)$$

bruges.

Om flad- og kuglepunkter gælder følgende sætning:

<u>Et regulært fladestykke F af klasse C^3, hvis punkter alle er flad- eller kuglepunkter, er enten et stykke af en plan eller et stykke af en kugleflade.</u>

Bevis: Lad der være valgt en regulær parameterfremstilling $P(u^1,u^2)$ af F af klasse C^3. Ifølge forudsætning er normalkrumningen kun afhængig af punktet, men ikke af retningen. Den kan altså betragtes som funktion $\kappa_n(u^1,u^2)$. Da alle tangentretninger i hvert punkt af F er hovedretninger, gælder (jf. sætningen på side 16)

$$(26) \qquad \begin{aligned} \underline{D}_1 N(u^1,u^2) &= \kappa_n(u^1,u^2)\,\underline{D}_1 P(u^1,u^2), \\ \underline{D}_2 N(u^1,u^2) &= \kappa_n(u^1,u^2)\,\underline{D}_2 P(u^1,u^2). \end{aligned}$$

Multipliceres den første ligning skalært med $\underline{D}_1 P$, fås $\underline{D}_1 N \cdot \underline{D}_1 P = \kappa_n g_{11}$. Da $\underline{D}_1 N$, $\underline{D}_1 P$, g_{11} er mindst af klasse C^1

og $g_{11}>0$, sluttes, at κ_n er af klasse C^1. Differentieres den første af ligningerne (26) med hensyn til u^2 og den anden med hensyn til u^1, og subtraheres de differentierede ligninger, fås

$$\underline{0} = \frac{\partial \kappa_n}{\partial u^2}(u^1,u^2)\,\underline{D}_1 P(u^1,u^2) - \frac{\partial \kappa_n}{\partial u^1}(u^1,u^2)\,\underline{D}_2 P(u^1,u^2),$$

altså, idet $\underline{D}_1 P$ og $\underline{D}_2 P$ er lineært uafhængige,

$$\frac{\partial \kappa_n}{\partial u^1}(u^1,u^2) = \frac{\partial \kappa_n}{\partial u^2}(u^1,u^2) = 0.$$

Normalkrumningen κ_n er følgelig konstant på F. Ligningerne (26) kan derfor skrives

$$\underline{D}_i\left(\underline{N}(u^1,u^2) - \kappa_n \overrightarrow{OP}(u^1,u^2)\right) = \underline{0}, \qquad i=1,2,$$

hvor O er et vilkårligt fast punkt i rummet. Heraf sluttes, at

$$\underline{N}(u^1,u^2) - \kappa_n \overrightarrow{OP}(u^1,u^2) = \underline{c},$$

hvor $\underline{c}$ er en konstant vektor. Hvis $\kappa_n \neq 0$, kan dette skrives

$$\overrightarrow{OP}(u^1,u^2) = \frac{1}{\kappa_n}\underline{c} + \frac{1}{\kappa_n}\underline{N}(u^1,u^2),$$

hvilket viser, at F ligger på kuglefladen med radius $\frac{1}{|\kappa_n|}$ og centrum i punktet C bestemt ved $\overrightarrow{OC} = \frac{1}{\kappa_n}\underline{c}$. Hvis $\kappa_n = 0$, fås $\underline{N}(u^1,u^2) = \underline{c}$, altså

$$\frac{\partial}{\partial u^i}\left(\underline{c}\cdot\overrightarrow{OP}(u^1,u^2)\right) = \underline{c}\cdot \underline{D}_i P(u^1,u^2) = 0, \qquad i=1,2.$$

Heraf sluttes, at

$$\underline{c}\cdot\overrightarrow{OP}(u^1,u^2) = k,$$

hvor k er en konstant. Dette viser, at F ligger i en plan.

Det bemærkes, at sætningens forudsætning er opfyldt og $\kappa_n = 0$, altså F indeholdt i en plan, hvis der gælder $K = 0$ og $H = 0$ i alle punkter på F.

7. Den oskulerende paraboloide.

Vi betragter igen et regulært orienteret fladestykke F af klasse C^2 og et punkt P_0 på dette. Lad $P(u^1, u^2)$ være en parameterfremstilling af F og $P_0 = P(u_0^1, u_0^2)$. Vektoren $\overrightarrow{P_0P}$ kan da ifølge Taylors grænseformel skrives

$$\overrightarrow{P_0P}(u^1,u^2) = (u^i - u_0^i)\underline{D}_i P_0 + \tfrac{1}{2}(u^j - u_0^j)(u^k - u_0^k)\underline{D}_j \underline{D}_k P_0 + \\ + [(u^1-u_0^1)^2 + (u^2-u_0^2)^2]\,\underline{\varepsilon}(u^1,u^2),$$

hvor vektorfunktionen $\underline{\varepsilon}(u^1,u^2)$ er kontinuert i (u_0^1,u_0^2) og $\underline{\varepsilon}(u_0^1,u_0^2) = \underline{0}$. Betegner $\underline{N}_0$ normalvektoren til F i P_0, vil

$$p(u^1,u^2) = \underline{N}_0 \cdot \overrightarrow{P_0P}(u^1,u^2)$$

være afstanden fra tangentplanen i P_0 til punktet $P(u^1,u^2)$, regnet med fortegn svarende til den ved $\underline{N}_0$ bestemte orientering af normalen. For denne afstand fås på grund af (11)

$$(27)\quad p(u^1,u^2) = \tfrac{1}{2} L_{jk}(u^j - u_0^j)(u^k - u_0^k) + [(u^1-u_0^1)^2 + (u^2-u_0^2)^2]\,\varepsilon(u^1,u^2),$$

hvor L_{jk} er koefficienterne for anden fundamentalform i P_0, og hvor der er sat $\varepsilon(u^1,u^2) = \underline{N}_0 \cdot \underline{\varepsilon}(u^1,u^2)$.

Vi indfører nu en speciel parameterfremstilling af F i en omegn af P_0. Lad $(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$ være et ortonormalt par af vektorer i hovedretninger i P_0, valgt i overensstemmelse med planens orientering, og lad $x_i = x_i(u^1,u^2)$, $i = 1,2,3$, være koordinaterne for $P(u^1,u^2)$ med hensyn til det sædvanlige retvinklede koordinatsystem $(P_0, \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$, hvor $\underline{e}_3 = \underline{N}_0$. Vi har da $x_i(u_0^1,u_0^2) = 0$, $i = 1,2,3$, og $x_3(u^1,u^2) = p(u^1,u^2)$.

Endvidere er med hensyn til dette system

$$\underline{D}_1 P_0 = \left(\frac{\partial x_1}{\partial u^1}(u_0^1, u_0^2), \frac{\partial x_2}{\partial u^1}(u_0^1, u_0^2), 0\right),$$
$$\underline{D}_2 P_0 = \left(\frac{\partial x_1}{\partial u^2}(u_0^1, u_0^2), \frac{\partial x_2}{\partial u^2}(u_0^1, u_0^2), 0\right),$$

idet x_1x_2-planen er tangentplanen i P_0. Da disse vektorer er lineært uafhængige og vektorparrene $(\underline{D}_1P_0, \underline{D}_2P_0)$ og $(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$ ens-orienterede, er funktionaldeterminanten for funktionsparret $x_1(u^1, u^2)$, $x_2(u^1, u^2)$ positivt i (u_0^1, u_0^2). I en passende omegn af (u_0^1, u_0^2) bestemmer det altså en tilladt parametertransformation med x_1, x_2 som nye parametre. Med disse bliver parameterfremstillingen $x_1 = x_1$, $x_2 = x_2$, $x_3 = \varphi(u^1(x^1, x^2), u^2(x_1, x_2))$. Idet de nye parameterkurvers hastighedsvektorer i P_0 er enhedsvektorerne $\underline{e}_1, \underline{e}_2$ i hovedretninger, har anden fundamentalform nu udseendet (22). Anvendelse af (26) på den nye parameterfremstilling giver derfor

(28) $$x_3 = \tfrac{1}{2}(\kappa_1 x_1^2 + \kappa_2 x_2^2) + (x_1^2 + x_2^2)\,\varepsilon(x_1, x_2),$$

hvor $\varepsilon(x_1, x_2)$ er kontinuert i $(0,0)$ og $\varepsilon(0,0) = 0$. Heraf kan man slutte, at fladestykket F i nærheden af punktet P_0 approximeres af kvadrikken med ligning

(29) $$x_3 = \tfrac{1}{2}(\kappa_1 x_1^2 + \kappa_2 x_2^2)$$

i den forstand, at for punkter på de to flader, der har samme projektion på den fælles tangentplan i P_0, er den absolutte differens mellem deres afstande fra tangentplanen lille i forhold til kvadratet på projektionens afstand fra P_0.

Hvis $K(P_0) > 0$, er kvadrikken (29) en elliptisk paraboloide (specielt en omdrejningsparaboloide, hvis P_0 er kuglepunkt). Hvis $K(P_0) = 0$, er den en parabolsk cylinder eller tangentplanen i P_0, efter som P_0 ikke er eller er fladpunkt. Hvis $K(P_0) < 0$, er den en hyperbolsk paraboloide. I alle tilfælde kaldes den ved (29) bestemte kvadrik for fladestykkets <u>oskulerende paraboloide</u> i punktet P_0. Det ses let, at den i P_0 har samme tangentplan, de samme hovedretninger og de samme hovedkrumninger som fladestykket F.

Antag, at P_0 ikke er fladpunkt. Ved at skære den oskulerende paraboloide med planerne $x_3 = \pm c$, hvor c er en positiv konstant, og at projicere snittene (hvoraf ét kan være tomt) på tangentplanen i P_0, fås kurver, der fremgår af Dupins indikatrix ved multiplikation med $\sqrt{2c}$. For $c = \frac{1}{2}$ fås selve indikatrix.

For små værdier af c, vil man i betragtning af (28) skønne, at planernes snit med F approximeres af de samme planers snit med den oskulerende paraboloide. I en vis forstand er dette også rigtigt, men især i det paraboske og det hyperbolske tilfælde ikke helt let at præcisere. Man kan formulere det noget løst således: <u>Skæres fladen F med to planer, som er parallelle med tangentplanen i P_0 og har en lille afstand fra denne, vil foreningen af snittenes projektioner på tangentplanen tilnærmelsesvis være ligedannet med indikatrix i P_0.</u> Dette var Dupins udgangspunkt ved indikatricens indførelse.

8. Krumningskurver og asymptotekurver.

En regulær kurve på et regulært fladestykke F af klasse C^2 kaldes en krumningskurve, hvis tangenten i hvert af dens punkter falder i en hovedretning i punktet. Hvis F er en del af en plan eller en kugleflade, er enhver regulær kurve på F en krumningskurve. Man overbeviser sig let om, at en omdrejningsflades meridiankurver og parallel-cirkler er krumningskurver. Vi skal bevise:

Lad F være et regulært fladestykke af klasse C^3. Da går gennem hvert punkt på F, som hverken er kugle- eller fladpunkt, netop to krumningskurver, og disse er vinkelrette på hinanden i punktet.

En regulær kurve på F med parameterfremstilling $P(t)$ vil ifølge sætningen på side 16 være en krumningskurve, hvis og kun hvis der for hvert t i parameterintervallet gælder, at hastighedsvektoren $\dot{N} = \sigma_*(\dot{P})$ for kurvens sfæriske billede er (nulvektoren eller) parallel med kurvens hastighedsvektor $\dot{P}$. (Her og i det følgende angives differentiation med hensyn til t ved en prik.) Indføres en regulær parameterfremstilling $P(u^1,u^2)$, $(u^1,u^2) \in \Omega$ af F, og antages kurvens parameterfremstilling bestemt ved $u^1(t), u^2(t)$, er den nævnte betingelse ensbetydende med, at koordinatparrene $(\dot{u}^1, \dot{u}^2)$ og $(B^1_k \dot{u}^k, B^2_k \dot{u}^k)$ for $\dot{P}$ og $\dot{N}$ med hensyn til (D_1P, D_2P) er lineært afhængige, altså med

$$\begin{vmatrix} \dot{u}^1 & B^1_k \dot{u}^k \\ \dot{u}^2 & B^2_k \dot{u}^k \end{vmatrix} = 0$$

Lighedstegnet gælder netop i kugle- og fladpunkter, og i disse er den kvadratiske form identisk 0, idet alle retninger er hovedretninger. For (31) er betingelsen ensbetydende med $K \leqq 0$, hvor lighedstegnet gælder når fladen er parabolsk krummet i det pågældende punkt. Forudsætningerne i de to ovenstående sætninger kan altså sammenfattes i, at

(33) $$a_{11}a_{22} - a_{12}^2 < 0$$

i det i sætningerne omtalte punkt. Begge sætninger vil altså følge, hvis følgende er bevist:

<u>Gennem hvert punkt</u> $(u_0^1, u_0^2) \in \Omega$, <u>således at</u>

$$a_{11}(u_0^1, u_0^2)\, a_{22}(u_0^1, u_0^2) - a_{12}(u_0^1, u_0^2)^2 < 0,$$

<u>går netop to løsningskurver til differentialligningen (32); disse er af klasse C^2 og regulære og har forskellige tangenter i (u_0^1, u_0^2).</u>

Bevis: Foreløbig antages, at $a_{22}(u_0^1, u_0^2) \neq 0$. Der findes da en omegn $\omega \subseteq \Omega$ af (u_0^1, u_0^2), i hvilken $a_{22} \neq 0$ og (33) er opfyldt. For en løsning $(u^1(t), u^2(t))$ til (32) i ω vil da for alle t i definitionsintervallet gælde, at $\dot{u}^1(t) \neq 0$. Man kan derfor benytte u^1 som kurveparameter, altså sætte $\dot{u}^1 = 1$, $\dot{u}^2 = \dfrac{du^2}{du^1}$. Funktionen

$$\delta = \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}$$

er af klasse C^1 i ω, da dette gælder for a_{ij} og (33) er opfyldt. Man kan nu omskrive (32) til

$$a_{22}\left(a_{11} + 2a_{12}\frac{du^2}{du^1} + a_{22}\left(\frac{du^2}{du^1}\right)^2\right)$$

$$= \left(-a_{12} + \delta + a_{22}\frac{du^2}{du^1}\right)\left(-a_{12} - \delta + a_{22}\frac{du^2}{du^1}\right) = 0.$$

For en C^1-løsning $u^2(u^1)$ til (32) må for hvert u^1 i dens definitionsinterval ~~være~~ en af de to parenteser på højre side være lig 0, og på grund af $\delta > 0$ og kontinuiteten af $\frac{du^2}{du^1}$ må det være den samme parentes for hele løsningen. Enhver løsning må altså tilfredsstille én af differentialligningerne

$$\frac{du^2}{du^1} = \frac{a_{12}-\delta}{a_{22}}, \qquad \frac{du^2}{du^1} = \frac{a_{12}+\delta}{a_{22}}.$$

Omvendt vil enhver løsning til en af disse tilfredsstille (32). Da de højre sider er funktioner af klasse C^1 i ω, følger påstanden i tilfældet $a_{22}(u_0^1, u_0^2) \neq 0$ af eksistens- og entydighedssætningen for sædvanlige differentialligninger. At løsningerne er af klasse C^2, følger af, at de højre sider er af klasse C^1, og at tangenterne til ~~[illegible]~~ de to integralkurver gennem samme punkt i dette er forskellige, følger af $\delta > 0$.

Tilfældet $a_{22}(u_0^1, u_0^2) = 0$ kan føres tilbage til det foregående ved at skifte fladeparametre. Er $a_{11}(u_0^1, u_0^2) \neq 0$, kan man lade u^1 og u^2 bytte rolle. Hvis også $a_{11}(u_0^1, u_0^2) = 0$, har man $a_{12}(u_0^1, u_0^2) \neq 0$, og man får ved at indføre nye parametre $\bar{u}^1, \bar{u}^2$ ved

$$u^1 = \bar{u}^1 - \bar{u}^2, \quad u^2 = \bar{u}^1 + \bar{u}^2,$$

at i (u_0^1, u_0^2) er

$$2a_{12}\dot{u}^1\dot{u}^2 = 2a_{12}(\dot{\bar{u}}^1)^2 - 2a_{12}(\dot{\bar{u}}^2)^2.$$

Hermed er alle påstande bevist.

Lad F være et fladestykke med en parameterfremstilling $P(u^1,u^2)$, $(u^1,u^2)\in\Omega$, af klasse C^r, hvor $r\geqq 3$. Hvis $P_0 = P(u_0^1,u_0^2)$ er et punkt på F, $\left\{\begin{array}{l}\text{som hverken er kugle- eller fladpunkt,}\\ \text{hvori } F \text{ er hyperbolsk krummet,}\end{array}\right\}$ vil der eksistere en omegn af P_0 og en parametertransformation af klasse C^{r-2} for denne, således at den nye parameterfremstillings parameterkurver er $\left\{\begin{array}{l}\text{krumningskurverne.}\\ \text{asymptotekurverne.}\end{array}\right.$

Det kan (som ovenfor) antages, at $a_{22}(u_0^1,u_0^2)\neq 0$. Forudsætningen medfører, at de højre sider i ovenstående differentialligninger tilhører klassen C^{r-2}. Ifølge existens- og entydighedssætningen for sædvanlige differentialligninger findes der et interval $]\alpha^1,\beta^1[\times]\alpha^2,\beta^2[\subseteq\Omega$ omkring (u_0^1,u_0^2) med følgende egenskab: For alle $v^1,v^2\in]\alpha^2,\beta^2[$ eksisterer der løsninger

$$u^2=\varphi(u^1,v^1),\quad u^1\in]\alpha^1,\beta^1[,\quad \text{til}\quad \frac{du^2}{du^1}=\frac{-a_{12}-\delta}{a_{22}}$$

og

$$u^2=\psi(u^1,v^2),\quad u^1\in]\alpha^1,\beta^1[,\quad \text{til}\quad \frac{du^2}{du^1}=\frac{-a_{12}+\delta}{a_{22}},$$

således at

(34) $\qquad \varphi(u_0^1,v^1)=v^1,\qquad \psi(u_0^1,v^2)=v^2.$

Funktionerne φ og ψ er kontinuerte, ifølge en supplerende sætning (som ikke skal bevises her) endda af klasse C^{r-2}.

Vi skal vise, at ligningsparret

(35) $\qquad \varphi(u^1,v^1)-u^2=0,\qquad \psi(u^1,v^2)-u^2=0$

i en omegn af (u_0^1,u_0^2) implicit bestemmer v^1 og v^2 som funktioner af u^1 og u^2. (Dette går ud på at finde de begyndelsesværdier v^1, v^2, for hvilke integralkurverne til de to differentialligninger mødes i punktet (u^1, u^2).) For $(u^1,u^2) = (u_0^1, u_0^2)$ og $(v^1, v^2) = (u_0^2, u_0^2)$ er ligningerne opfyldt. Endvidere har vi ifølge (34)

$$\frac{\partial(\varphi(u_0^1, v^1) - u_0^2)}{\partial v^1} = 1, \qquad \frac{\partial(\varphi(u_0^1, v^1) - u_0^2)}{\partial v^2} = 0,$$

$$\frac{\partial(\psi(u_0^1, v^2) - u_0^2)}{\partial v^1} = 0, \qquad \frac{\partial(\psi(u_0^1, v^2) - u_0^2)}{\partial v^2} = 1.$$

Funktionaldeterminanten for de venstre sider med hensyn til (v^1, v^2) er altså forskellig fra 0 for $(u^1,u^2) = (u_0^1, u_0^2)$. Ifølge sætningen om implicite funktioner findes der omegne af $(u^1,u^2) = (u_0^1,u_0^2)$ og $(v^1, v^2) = (u_0^2, u_0^2)$, i hvilkes mængdeprodukt løsningerne til ligningssystemet (35) er bestemt ved C^{r-2}-funktioner $v^1 = v^1(u^1,u^2)$, $v^2 = (u^1,u^2)$. At der herved bestemmes en C^{r-2}-parametertransformation i en (muligvis mindre) omegn af (u_0^1, u_0^2) ses således: Idet

$$\frac{\partial(\varphi(u^1, v^1) - u^2)}{\partial u^1} = \frac{-a_{12} - \delta}{a_{22}}, \qquad \frac{\partial(\varphi(u^1, v^1) - u^2)}{\partial u^2} = -1,$$

$$\frac{\partial(\psi(u^1, v^2) - u^2)}{\partial u^1} = \frac{-a_{12} + \delta}{a_{22}}, \qquad \frac{\partial(\psi(u^1, v^2) - u^2)}{\partial u^2} = -1,$$

er funktionaldeterminanten for de venstre sider i (35) med hensyn til (u^1,u^2) lig $\frac{2\delta}{a_{22}} \neq 0$. Der findes derfor omegne af $(u^1,u^2) = (u_0^1,u_0^2)$ og $(v^1,v^2) = (u_0^2,u_0^2)$, i hvilkes mængdeprodukt løsningerne til (35) er bestemt ved C^{r-2}-funktioner $u^1 = u^1(v^1,v^2)$, $u^2 = u^2(v^1,v^2)$. Ved disse funktioner afbildes altså fællesmængden for de to omegne af (u_0^2, u_0^2) bijektivt på fællesmængden for de to omegne af (u_0^1,u_0^2), og $v^1 = v^1(u^1,u^2)$, $v^2 = v^2(u^1,u^2)$ bestemmer den inverse afbildning. Der fore–

ligger altså en parametertransformation af den forlangte art.

At parameterkurverne ved parameterfremstillingen med v^1, v^2 som parametre er henholdsvis krumnings- eller asymptotekurver, følger simpelthen af, at der til et fast v^1 eller v^2 svarer en integralkurve til henholdsvis den første eller anden af de to differentialligninger.

Hermed er den fremsatte påstand bevist.

Som en anvendelse bevises følgende bemærkelsesværdige sætning:

<u>Lad F være et fladestykke af klasse C^4, som er overalt parabolsk krummet, men ikke har nogen fladpunkter. Gennem hvert punkt på F går da netop én asymptotekurve. Denne er retlinet, og langs den er tangentplanen til F konstant.</u>

Bevis: Idet F ikke kan have kuglepunkter og ifølge forudsætning ikke har fladpunkter, går der gennem hvert punkt på F to krumningskurver. Da i hvert punkt netop én af hovedkrumningerne er 0, og da normalkrumningen i en regulær kurves tangentretninger varierer kontinuert, må normalkrumningen i den ene af de to krumningskurvers tangentretninger være konstant lig 0. Den er altså tillige asymptotekurve. Omvendt må enhver asymptotekurve også være krumningskurve, fordi der i hvert punkt på F kun findes én retning, i hvilken normalkrumningen er 0, og den er en hovedretning. Hermed er den første påstand bevist.

Omkring et vilkårligt punkt på F kan der ifølge den foregående sætning afgrænses en del af F, som har en parameterfremstilling $P(v^1,v^2)$, $(v^1,v^2)\in\omega$, af klasse C^2 med krumningskurverne som parameterkurver. Vi vil antage, at afgrænsningen er foretaget således, at parameterområdet ω med enhver linie $v^2 =$ konstant har ét interval eller intet fælles. Betegnelserne tænkes valgt således, at v^1-kurverne er de krumningskurver, der tillige er asymptotekurver, altså således, at $\kappa_1 = 0$, $\kappa_2 \neq 0$. Der gælder da i ω, at

$$\underline{D}_1 N(v^1,v^2) = -\kappa_1 \underline{D}_1 P(v^1,v^2) = \underline{0}.$$

Da v^1 for hvert fast v^2 gennemløber et interval, medfører dette, at $\underline{N}$ er uafhængig af v^1. Heraf kan sluttes, at for et fast v_0^1 gælder i ω

$$(36) \qquad \underline{N}(v^2)\cdot\overrightarrow{P(v_0^1,v^2)\,P(v^1,v^2)} = 0\,;$$

thi venstre side er 0 for $v^1 = v_0^1$, og dens afledede med hensyn til v^1 er $\underline{N}(v^2)\cdot\underline{D}_1 P(v^1,v^2) = 0$. Dette viser, at for hvert fast v^2 ligger hele v^1-kurven gennem $P(v_0^1,v^2)$ i tangentplanen til F i dette punkt, og at denne plan er tangentplanen i alle kurvens punkter, da jo normalvektoren er uafhængig af v^1. Ved differentiation af (36) med hensyn til v^2 fås ligningen

$$\underline{D}_2 N(v^2)\cdot\overrightarrow{P(v_0^1,v^2)\,P(v^1,v^2)} + \underline{N}(v^2)\cdot\left(\underline{D}_2 P(v^1,v^2) - \underline{D}_2 P(v_0^1,v^2)\right) = 0,$$

som betragtes for faste v_0^1, v^2 og variabelt v^1. Det andet led er 0, fordi de to vektorer $\underline{D}_2 P$ ligger i den fælles tangentplan til F i v^1-kurvens punkter. Vi har altså

$$\underline{D}_2 N(v^2)\cdot\overrightarrow{P(v_0^1,v^2)\,P(v^1,v^2)} = 0,$$

hvilket viser, at v^1-kurven gennem $P(v_0^1,v^2)$ også ligger i planen gennem dette punkt og med normalvektoren $\underline{D}N(v^2)$, som er forskellig fra $\underline{0}$, idet

$$\underline{D}_2 N(v^2) = -\kappa_2(v^1, v^2)\underline{D}_2 P(v^1, v^2)$$

og $\kappa_2 \neq 0$. Da endvidere $\underline{N}(v^2)$ og $\underline{D}_2 N(v^2)$ er ortogonale, ligger v^1-kurven på skæringslinien mellem to forskellige planer.

Dermed er sætningen bevist.

En omvendt sætning vises let under svagere forudsætninger:

<u>Hvis et fladestykke F af klasse C^3 indeholder et ret liniestykke og har samme tangentplan i dettes punkter, da er F parabolsk krummet i disse punkter.</u>

Bevis: Liniestykket er en asymptotekurve. For en regulær parameterfremstilling af det er desuden $\frac{dN}{dt} = \underline{0}$, hvilket viser, at liniestykkets retning i hvert af dets punkter er en hovedretning. En asymptoteretning kan imidlertid kun være en hovedretning i punkter, hvori F er parabolsk krummet.

d) Find krumningscentret for et normalsnit gennem et punkt på en omdrejningsflade i tangentretningen til parallelcirklen gennem punktet.

e) Lad P_0 være et punkt på et regulært fladestykke F. Vis, at hastighedsvektoren $\frac{dP}{dt}$ i P_0 for en regulær kurve k på F gennem P_0 bestemmer en asymptoteretning, hvis og kun hvis hastighedsvektoren $\frac{dN}{dt}$ i $N_0 = \sigma(P_0)$ for kurvens sfæriske billede $\sigma(k)$ er ortogonal til $\frac{dP}{dt}$.

f) Vis, at hver af fladerne, som i sædvanlige retvinklede koordinater er bestemt ved ligningerne

$$x_3 = x_1^2 + x_2^4 , \qquad x_3 = x_1^2 - x_2^4 ,$$
$$x_3 = x_1^2 + x_2^3 , \qquad x_3 = (x_1 - x_2^2)^2 ,$$
$$x_3 = x_1(3x_1^2 - 4x_2^2) ,$$

er paraboloid krummet i punktet (0,0,0). Find i hvert af tilfældene fladens fællesmængde med tangentplanen i (0,0,0), og beskriv fladens beliggenhed i forhold til denne i omegnen af (0,0,0).

g) Vis, at hvis $\underline{a}$ og $\underline{b}$ er to ortogonale egentlige vektorer i tangentplanen i et punkt P_0 på et regulært fladestykke, gælder for normalkrumningerne i disse retninger og middelkrumningen i P_0, at

$$H(P_0) = \frac{1}{2}\left(\kappa_n(\underline{a}) + \kappa_n(\underline{b})\right).$$

Mat. 3, 1969-70 IV, 5, opg. h-k

h) Lad $P(u^1,u^2)$, $(u^1,u^2) \in \Omega$, være en parameterfremstilling af klasse C^2 af et fladestykke. Vis, at parameterkurverne er
1) krumningskurver, hvis og kun hvis $g_{12} = 0$ og $L_{12} = 0$,
2) asymptotekurver, hvis og kun hvis $L_{11} = 0$ og $L_{22} = 0$.

i) Lad F være et fladestykke af klasse C^2. Vis, at en plan kurve på F, som har fra 0 forskellig krumning, er en krumningskurve, hvis og kun hvis vinklen mellem dens plan og tangentplanen til F i et af dens punkter er uafhængig af dette punkt.

j) Lad F være et fladestykke af klasse C^2. Vis, at i hvert punkt på F gælder for vilkårlige tangentvektorer $\underline{a}$ og $\underline{b}$ i dette, at

$$K\underline{a}\cdot\underline{b} - 2H\sigma_*(\underline{a})\cdot\underline{b} + \sigma_*(\underline{a})\cdot\sigma_*(\underline{b}) = 0.$$

[Forslag: Benyt en ortonormal basis bestående af vektorer i hovedretninger.]

Vis, at hvis en asymptotekurve på et fladestykke af klasse C^4 har positiv krumning i et punkt, gælder for torsionen τ i dette punkt, at $\tau^2 = -K$.

k) Lad F være et fladestykke af klasse C^3, som overalt er parabolsk krummet. Vis ved at benytte asymptotekurvernes differentialligning, at der gennem hvert punkt på F, som ikke er fladpunkt, går netop én asymptotekurve.

Rettelser til § 5.

Side	linie			
4	1	P_0	skal være	N_0
9	1	bijektiv	skal være	injektiv
	2	Ω	skal være	ω
	10 f.n.	bijektiv	skal være	injektiv
14	12	P_0, har	skal være	P_0 og har
21	9	$g_{ij} z^i_l z^j_l$	skal være	$\sqrt{g_{ij} z^i_l z^j_l}$ (2 gange)
29	1 f.n.	$(-a_{12} + \ldots)(-a_{12} - \ldots)$	skal være	$(a_{12} + \ldots)(a_{12} - \ldots)$
30	6	$\frac{a_{12} - \delta}{a_{22}}, \frac{a_{12} + \delta}{a_{22}}$	skal være	$\frac{-a_{12} - \delta}{a_{22}}, \frac{-a_{12} + \delta}{a_{22}}$
21	4-3 f.n.	$= K_n(u^1, u^2)$	skal være	$= -K_n(u^1, u^2)$ (2 gange)

Rettelser til § 5.

Side	Linie	i stedet for:	læs:
4	1	P_0	N_0
9	1	bijektiv	injektiv
	2	Ω	ω
	10 f.n.	bijektiv	injektiv
14	12	P_0, har i dette	P_0, og som i dette har
	14	oskulationsplan i P_0 (	oskulationsplan (
21	9	$g_{ij}\, z_\ell^i z_\ell^j$	$\sqrt{g_{ij}\, z_\ell^i z_\ell^j}$ (2 gange)
	4–3 f.n.	$= \kappa_n(u^1, u^2)$	$= -\kappa_n(u^1, u^2)$ (2 gange)
25	5 f.n.	har en lille	har samme lille
28	1 f.n.	$-(\kappa_1 - \kappa_2)^2$	$-\frac{1}{4}(\kappa_1 - \kappa_2)^2$
29	12	to løsningskurver	to regulære løsningskurver
	13	C^2 og regulære og	C^2 og
	9 f.n.	en løsning	en regulær løsning
	1 f.n.	$(-a_{12} + \ldots)(-a_{12} - \ldots)$	$(a_{12} + \ldots)(a_{12} - \ldots)$
30	6	$\dfrac{a_{12} - \delta}{a_{22}}, \quad \dfrac{a_{12} + \delta}{a_{22}}$	$\dfrac{-a_{12} - \delta}{a_{22}}, \quad \dfrac{-a_{12} + \delta}{a_{22}}$
Opg.	j	$K\underline{a} \cdot \underline{b} - 2H\sigma_*(\underline{a}) \cdot \underline{b} + \ldots$	$K\underline{a} \cdot \underline{b} + 2H\sigma_*(\underline{a}) \cdot \underline{b} + \ldots$