Københavns Universitet
Eksamen ved Det naturvidenskabelige Fakultet sommer 1999

Mat Y F99, Afløsningsopgavesæt nr. 2

Opgavesættet består af 1 opgave.

Lad X være en mængde og betegn med Δ_X *diagonalen* i $X \times X$, dvs.

$$\Delta_X = \{(x, y) \in X \times X \mid x = y\}.$$

(i). Idet $(E_n)_{n\geq 1}$ og $(F_n)_{n\geq 1}$ betegner to følger af delmængder af X, skal man vise, at den nødvendige og tilstrækkelige betingelse for at

$$\Delta_X = \bigcap_{n=1}^{\infty} (E_n \times E_n) \cup (F_n \times F_n) \tag{$*$}$$

er, at følgende to krav er opfyldt:

1°. For hvert $n \geq 1$, er $E_n \cup F_n = X$,

2°. For ethvert par (x, y) af forskellige punkter i X findes et $n \geq 1$ således, at hver af mængderne $E_n \setminus F_n$ og $F_n \setminus E_n$ indeholder netop ét af punkterne x og y.

(ii). Lad $X = \mathbb{R}$ og lad $n \curvearrowright q_n$ være en surjektiv afbildning af $\mathbb{N}$ på $\mathbb{Q}$. Lad $(E_n)_{n\geq 1}$ og $(F_n)_{n\geq 1}$ være følgerne af intervaller givet ved

$$E_n =]-\infty, q_n[\,,\ F_n = [q_n, \infty[\,;\ n \geq 1.$$

Vis, at i dette tilfælde gælder $(*)$.

(iii). Lad X være en vilkårlig mængde med $\mathrm{card}(X) = 2^{\aleph_0}$. Vis, at så findes følger $(E_n)_{n\geq 1}$ og $(F_n)_{n\geq 1}$ af delmængder af X, så $(*)$ gælder.

(iv). Vis endelig, at for en given mængde X er den nødvendige og tilstrækkelige betingelse for at der findes følger $(E_n)_{n\geq 1}$ og $(F_n)_{n\geq 1}$ af delmængder af X således, at $(*)$ gælder, at $\mathrm{card}(X) \leq 2^{\aleph_0}$. *Vejledning vedrørende nødvendigheden:* Betragt afbildningen der til $x \in X$ knytter mængden af alle $n \geq 1$ så $x \in E_n$.

Opgavesættet slut.

/LK