Københavns Universitet
Mat Y Forår 2001

Afløsningsopgave Sæt 2

Opgave 1

Bemærkning. Der er kun én opgave i dette sidste sæt.

Lad der være givet to topologier på samme mængde X, lad os sige $(X, \mathcal{G}_0)$ og $(X, \mathcal{G}_1)$. Så er $\mathcal{G}_0$ altså brolægningen af åbne mængder i den ene topologi og $\mathcal{G}_1$ brolægningen af åbne mængder i den anden.

(i) Antag, at der findes en klassedeling af X i to åbne ikke-tomme mængder, når vi ser på det topologiske rum $(X, \mathcal{G}_1)$. Bevis, at såfremt $(X, \mathcal{G}_0)$ og $(X, \mathcal{G}_1)$ er homeomorfe (jvf. noterne s. 99) så findes der også i $(X, \mathcal{G}_0)$ en klassedeling i to ikke-tomme åbne mængder.

I resten af opgaven ses på $\mathbb{R}$ med to topologier, dels den sædvanlige topologi $(\mathbb{R}, \mathcal{G}_0)$, dels topologien $(\mathbb{R}, \mathcal{G}_1)$ givet ved brolægningen $\mathcal{G}_1$, der består af alle mængder $G \subseteq \mathbb{R}$ således, at der for hvert $x \in G$ findes et $\varepsilon > 0$ med den egenskab, at det halv-åbne interval $[x, x + \varepsilon[$ er indeholdt i G.

(ii) Det er klart, at $\emptyset \in \mathcal{G}_1$ og at $\mathbb{R} \in \mathcal{G}_1$. Eftervis de to andre egenskaber der kræves, for at $\mathcal{G}_1$ er en topologi.

(iii) Undersøg hvilke af mængderne $]-\infty, 0\,[$, $]-\infty, 0]$, $[0, \infty[$ og $]0, \infty[$ der er åbne i $(\mathbb{R}, \mathcal{G}_1)$.

(iv) Bevis, at $(\mathbb{R}, \mathcal{G}_0)$ og $(\mathbb{R}, \mathcal{G}_1)$ ikke er homeomorfe.

(v) Lad $(x_n)_{n\geq 1}$ være en følge i $\mathbb{R}$ og lad $x \in \mathbb{R}$. Bevis, at $(x_n)_{n\geq 1}$ er konvergent i $(\mathbb{R}, \mathcal{G}_1)$ med grænsepunkt x, hvis og kun hvis $(x_n)_{n\geq 1}$ "konvergerer fra højre" mod x. Præcisér først, hvad der menes hermed.

Udfordring (kræves ikke besvaret): Bevis, at $(\mathbb{R}, \mathcal{G}_1)$ ikke er metriserbar.