Københavns Universitet
Mat Y Forår 2001

Afløsningsopgaver Sæt 1

Opgave 1

Lad $R \subseteq X \times Y$ være en relation fra X til Y og betegn med π projektionsafbildningen $X \times Y \to Y$. Lad A betegne en delmængde af X og giv et udførligt bevis for formlen

$$R(A) = \pi(R \cap (A \times Y)) . \tag{1}$$

Vejledning. Besvarelsen kan f.eks. se ud som her skitseret: Vi beviser først inklusionen "$\subseteq$". Antag derfor, at $y \in \cdots$. Af definitionen (se s.$\cdots$) følger, at der findes $x \in \cdots$, så $\cdots$. Det er nu klart, at $(x,y) \in \cdots$, hvorfor $y \in \cdots$, hvilket skulle bevises. Dernæst bevises inklusionen "$\supseteq$". Antag, at $y \in \cdots$. Så findes et element $(a,b) \in \cdots$, så $\pi(a,b) = y$. Så må $b = \cdots$ og $a \in \cdots$. Det er nu klart, at $y \in R(a) \subseteq \cdots$, ergo må $\cdots$, hvilket skulle bevises. Da nu begge inklusionerne hørende til (1) er vist, følger det (af ekstentionalitetsaksiomet, hvis vi skal være mere formelle og henvise til den aksiomatiske mængdelære), at (1) gælder.

Bemærkning. Man behøver ikke at følge denne vejledning, men for at få hele sættet godkendt kræves det, at denne opgave er korrekt besvaret (samt at væsentlige dele af de to følgende opgaver er korrekt besvaret).

Opgave 2

I denne opgave får man brug for følgende udgave af den distributive lov for mængder:

$$\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \cap \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right) = \bigcup_{(k_1,k_2)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} (A_{k_1} \cap B_{k_2}) . \tag{2}$$

Dette kræves ikke vist, men kan uden videre benyttes i det følgende.

(i) Forklar, hvorledes den simple distributive lov

$$A \cap (B_1 \cup B_2) = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2$$

kan opfattes som et specialtilfælde af (2).

(ii) Lad $\mathcal{E}$ være en brolægning af delmængder af grundmængden X og antag, at $\mathcal{E}$ er lukket under endelig fællesmængdedannelse. Lad $\mathcal{E}^*$ betegne brolægningen af tællelige foreningsmængder af mængder i $\mathcal{E}$. Bevis, at $\mathcal{E}^*$ er lukket under endelig fællesmængdedannelse. *Vejledning.* Det er nok at vise, at for alle mængder E og F med $E \in \mathcal{E}^*$ og

Opgave 2 fortsættes på side 2

$F \in \mathcal{E}^*$, vil $E \cap F \in \mathcal{E}^*$. For at vise dette udnyttes det givne, hvoraf det følger, at E kan skrives som en tællelig foreningsmængde af mængder i $\mathcal{E}$ og tilsvarende for F.

I resten af opgaven antages det, at $X = \mathbb{R}^2$ og at $\mathcal{E}$ består af alle kvadrater i $\mathbb{R}^2$, fraregnet siderne. Dvs. $\mathcal{E}$ består af alle delmængder af $\mathbb{R}^2$ af formen $E =]a, a+\delta[X]b, b+\delta[$, hvor $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ og $\delta \in [0, \infty[$ (bemærk, at for $\delta = 0$ fås $E = \emptyset$). Dan nu brolægningen $\mathcal{E}^*$ som beskrevet under (ii).

(iii) Bevis, at $\emptyset \in \mathcal{E}^*$ og at $\mathbb{R}^2 \in \mathcal{E}^*$.

(iv) Bevis, at enhver mængde i $\mathcal{E}^*$ er åben (jvf. Øvelse 4.8 i UES).

(v) Bevis, at $\mathcal{E}^*$ netop er brolægningen af alle åbne mængder. *Bemærkning.* Det kræves ikke, at man svarer på dette for at få godkendt sin besvarelse af sættet.

Opgave 3

Betragt $\mathbb{N}_0$ med den sædvanlige ordning.

(i) Indfør den leksikografiske ordning på $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ og vis, at $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ med denne ordning er en velordning.

(ii) Illustrér på en figur (et $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$-diagram), hvorledes elementerne i $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ stilles op i rækkefølge i den leksikografiske ordning.

(iii) Hvilken ordenstype har $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ i den leksikografiske ordning ? *Vejledning.* Hermed menes, at man skal bestemme et ordinaltal α, således, at $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ i den leksikografiske ordning er ordensisomorf med venstreafsnittet $V(\alpha)$; der skal altså findes en ordensbevarende bijektion af $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ på$V(\alpha)$. Man kan f.eks. lede efter det søgte α i NM §6.

(iv) Idet "$\leq$" betegner den leksikografiske ordning i $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ (samt den sædvanlige ordning i $\mathbb{N}_0$) indføres en relation R i $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ ved

$$(n_1, n_2) R (n_1^*, n_2^*) \Leftrightarrow (\max(n_1, n_2) < \max(n_1^*, n_2^*)) \vee \\ \Big[\Big(\max(n_1, n_2) = \max(n_1^*, n_2^*)\Big) \wedge \big((n_1, n_2) \leq (n_1^*, n_2^*)\big)\Big]$$

Bevis, at også R er en velordning i $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ og bestem ordenstypen for denne velordning.

Bemærkning. For spørgsmålet om godkendelse eller ikke godkendelse af sættet spiller det ingen rolle, om man besvarer dette spørgsmål. Det er for de ambitiøse, der har tid og lyst. Det er nu ikke særlig svært og i KT (beviset for Sætning 4 s. KT3) benyttes denne konstruktion (i en mere generel udgave, hvor $\mathbb{N}_0$ erstattes med en vilkårlig velordnet mængde – en generelisation, den ambitiøse naturligvis er velkommen til at behandle).