Københavns Universitet
Eksamen ved Det naturvidenskabelige Fakultet Sommer 2000

Mat Y Afløsningsopgaver Sæt 2

Opgaverne er stillet 12. maj. Besvarelserne skal afleveres senest 15. maj.

Opgave 1

(i) Bevis, at $\aleph_0^{2^{\aleph_0}} = 2^{2^{\aleph_0}}$ (obs. a^{b^c} betyder $a^{(b^c)}$).

(ii) Undersøg om der, mængdeteoretisk set, er flere afbildninger af $\mathbb{R}$ ind i $\mathbb{R}$ end der er afbildninger af $\mathbb{R}$ ind i $\mathbb{N}$.

Opgave 2

Lad $f : \mathbb{R} \to \mathbb{N}$ være en funktion og definer en relation R på $\mathbb{R}$ ved

$$xRz \Leftrightarrow f(x) = f(y).$$

(i) Bevis, at R er en ækvivalensrelation.

(ii) Bevis, at kvotientmængden $\mathbb{R}/R$ er af kardinalitet højst $\aleph_0$.

(iii) Angiv tre konkrete eksempler: ét, hvor $\mathrm{card}(\mathbb{R}/R) = 1$, ét hvor card $\mathrm{card}(\mathbb{R}/R) = 3$ og ét, hvor $\mathrm{card}(\mathbb{R}/R) = \aleph_0$.